Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Захарова, О некоторых задачах для уравнений с частными производными, содержащих малый параметр в главной части, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 183, 61–72

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-183-61-72>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:00:19

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 183 (2020). С. 61–72
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-183-61-72

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© 2020 г. И. В. ЗАХАРОВА

Аннотация. В работе рассмотрены задачи для уравнений с частными производными, которые содержат малый параметр в главной части. Построены точные решения исходных сингулярно возмущенных задач и с помощью предельного перехода установлено соответствие между этими решениями и решениями предельных задач, которые получаются из исходных, если малый параметр положить равным нулю. Приведенные в работе примеры показывают, что среди сингулярно возмущенных задач для уравнений с частными производными встречаются такие, которые обладают характерными свойствами регулярно возмущенных задач и допускают построение асимптотического решения методами регулярной теории возмущений.

Ключевые слова: малый параметр, сингулярно возмущенное уравнение, предельная задача, задача Дирихле, задача Коши.

ON SOME PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER IN THE PRINCIPAL PART

© 2020 I. V. ZAKHAROVA

ABSTRACT. In this paper, we consider problems for partial differential equations that contain a small parameter in the principal part. We construct exact solutions of the original singularly perturbed problems and, passing to the limit, we state a correspondence between these solutions and solutions of the limit problems obtained from the original problems if the small parameter is set equal to zero. Examples given in this paper show that among singularly perturbed problems for partial differential equations, there are problems that possess characteristic properties of regularly perturbed problems and allow constructing asymptotic solutions by methods of the theory of regular perturbations.

Keywords and phrases: small parameter, singularly perturbed equation, limit problem, Dirichlet problem, Cauchy problem.

AMS Subject Classification: 35A20

1. Введение. Основной вопрос при решении задач, содержащих малый параметр, состоит в следующем: можно ли дать приближенную формулу для решения возмущенной задачи, пользуясь невозмущенным (предельным) уравнением, которое получается из исходного при $\varepsilon = 0$. Для регулярно возмущенных задач ответ на этот вопрос звучит утвердительно. Для сингулярно возмущенных задач возникают принципиальные трудности. Очень часто это связано с невозможностью предельного перехода, равномерного относительно области, где изучается задача. Для обыкновенных дифференциальных уравнений чаще всего это происходит из-за понижения порядка исходного уравнения при $\varepsilon = 0$. Для уравнений с частными производными картина более

разнообразна. Так, обращение в нуль малых параметров в главной части уравнения с частными производными может не понизить порядок уравнения, но привести к изменению типа уравнения. Поскольку для каждого типа корректны свои задачи, то представляет интерес исследование перехода решения уравнения с малым параметром в решение предельного уравнения. Примеры задач, которые иллюстрируют эффекты, возникающие при предельном переходе в уравнениях с частными производными, содержащих малый параметр в главной части рассмотрены в [7]. В данной работе рассмотрены примеры задач для сингулярно возмущенного уравнения с частными производными, решения которых стремятся к решению предельных задач различным образом.

2. Пример задачи Коши для уравнения гиперболического типа. Рассмотрим задачу Коши для уравнения гиперболического типа:

$$U_{xx} - \varepsilon U_{tt} - aU_t = 0, \quad (2.1)$$

$$U(x, 0, \varepsilon) = f(x), \quad (2.2)$$

$$U_t(x, 0, \varepsilon) = g(x), \quad (2.3)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — абсолютно интегрируемые функции. Установим соответствие между исходной задачей (2.1)–(2.3) и предельной задачей, которая получается из (2.1)–(2.3), если положить $\varepsilon = 0$. Для этого построим точное решение задачи (2.1)–(2.3), а затем исследуем его поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Вначале избавимся от младшей производной по времени. Для этого введем новую независимую переменную ξ и новую функцию по формулам

$$\xi = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad U(x, \xi) = V(x, \xi) \exp\left(-\frac{a\xi}{2\sqrt{\varepsilon}}\right). \quad (2.4)$$

Тогда задача (2.1)–(2.3) примет следующий вид:

$$V_{xx} - V_{\xi\xi} + \frac{a^2}{4\varepsilon}V = 0, \quad (2.5)$$

$$V(x, 0, \varepsilon) = f(x), \quad (2.6)$$

$$V_\xi(x, 0, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}g(x) + \frac{a}{2\sqrt{\varepsilon}}f(x). \quad (2.7)$$

Далее будем рассматривать задачу (2.5)–(2.7). Следуя [3], решение задачи (2.5)–(2.7) построим методом Римана. С помощью замены

$$\zeta = \xi - x, \quad \eta = \xi + x \quad (2.8)$$

уравнение (2.5) приводится к каноническому виду:

$$W_{\zeta\eta} - \frac{a^2}{16\varepsilon}W = 0. \quad (2.9)$$

Учитывая условия (2.6), (2.7) и замену (2.8), в качестве границы области интегрирования возьмем биссектрису

$$\eta = -\zeta \quad (2.10)$$

и две прямые, которые параллельны осям координат и выходят из точки $\mathring{E}M(\zeta_0, \eta_0)$. Согласно методу Римана для решения задачи (2.5)–(2.7) нужно найти частное решение $W^*(\zeta, \eta, \zeta_0, \eta_0)$ уравнения, сопряженного уравнению (2.9), которое удовлетворяло бы условиям на характеристиках:

$$W^*(\zeta_0, \eta, \zeta_0, \eta_0) = 1, \quad W^*(\zeta, \eta_0, \zeta_0, \eta_0) = 1. \quad (2.11)$$

В силу самосопряженности оператора, стоящего в левой части уравнения (2.9), и независимости коэффициентов этого уравнения от ζ и η функция Римана является симметричной относительно точек (ζ, η) , (ζ_0, η_0) и зависит только от их взаимного расположения. Поэтому построим ее как функцию одной переменной:

$$z = (\zeta - \zeta_0)(\eta - \eta_0). \quad (2.12)$$

Положив $R = W^*(z)$, для уравнения (2.9) получим

$$zR_{zz} + R_z - \frac{a^2}{16\varepsilon}R = 0. \quad (2.13)$$

Далее введем замену по формуле

$$\lambda = \frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{\varepsilon}}. \quad (2.14)$$

Тогда уравнение (2.13) примет вид

$$\lambda^2 R_{\lambda\lambda} + \lambda R_\lambda - \lambda^2 a^2 R = 0. \quad (2.15)$$

Последнее уравнение при помощи замены $\tau = \lambda a$ преобразуется в уравнение Бесселя мнимого аргумента, общее решение которого имеет вид:

$$R = C_1 I_0(\lambda a) + C_2 K_0(\lambda a), \quad (2.16)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, $I_0(\lambda a)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $K_0(\lambda a)$ — функция Макдональда.

Для функций Бесселя и Макдональда воспользуемся известными представлениями в виде рядов:

$$I_0(\lambda a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda a/2)^{2k}}{k! \Gamma(k+1)}, \quad K_0(\lambda a) = -I_0(\lambda a) \ln \frac{\lambda a}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda a/2)^{2k} \Gamma'(k+1)}{(k!)^2 \Gamma(k+1)}.$$

Учитывая поведение функций $I_0(\lambda a)$ и $K_0(\lambda a)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, положим в (2.16) $C_1 = 1$, а $C_2 = 0$. Далее, принимая во внимание (2.12) и (2.14) получим

$$R(\zeta, \eta, \zeta_0, \eta_0) = I_0 \left(\frac{a}{2} \sqrt{\frac{(\zeta - \zeta_0)(\eta - \eta_0)}{\varepsilon}} \right). \quad (2.17)$$

Функция (2.17) удовлетворяет условиям (2.11) и, таким образом, является искомой функцией Римана.

Для построения решения уравнения (2.9) через функцию Римана воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} W(\zeta_0, \eta_0) &= \frac{(WR)_P + (WR)_Q}{2} + \frac{1}{2} \int_{-\eta_0}^{\zeta_0} \left(R \frac{\partial W}{\partial \zeta} - W \frac{\partial R}{\partial \zeta} \right) d\zeta + \left(R \frac{\partial W}{\partial \eta} - W \frac{\partial R}{\partial \eta} \right) d\zeta = \\ &= \frac{(WR)_P + (WR)_Q}{2} + \frac{1}{2} \int_{-\eta_0}^{\zeta_0} R \left(\frac{\partial W}{\partial \zeta} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) d\zeta - \frac{1}{2} \int_{-\eta_0}^{\zeta_0} W \left(\frac{\partial R}{\partial \zeta} + \frac{\partial R}{\partial \eta} \right) d\zeta, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $Q(-\eta_0, \eta_0)$, $P(\zeta_0, -\zeta_0)$.

Учитывая выражения (2.8) и условия (2.7), вычислим производные, входящие в выражение (2.18):

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta} + \frac{\partial W}{\partial \eta} = \sqrt{\varepsilon} g(-\zeta) + \frac{a}{2\sqrt{\varepsilon}} f(-\zeta), \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \zeta} + \frac{\partial R}{\partial \eta} = -\frac{dR}{d\lambda} \cdot \frac{a(\zeta_0 + \eta_0)}{4\sqrt{\varepsilon}(\zeta + \eta_0)(\zeta_0 - \zeta)}. \quad (2.20)$$

Кроме этого, чтобы воспользоваться формулой (2.18), вычислим значения функции W на биссектрисе и в точках P и Q :

$$\begin{aligned} W|_{\eta=-\zeta} &= W(\zeta, -\zeta) = V(x, 0) = f(x) = f(-\zeta), \\ W(P) &= W(\zeta_0, -\zeta_0) = f(-\zeta_0), \quad W(Q) = W(-\eta_0, \eta_0) = f(\eta_0). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Подставив значения выражений (2.19) в (2.18), будем иметь:

$$\begin{aligned}
 W(\zeta_0, \eta_0) = & \frac{f(-\zeta_0) + f(\eta_0)}{2} \\
 & + \frac{1}{2} \int_{-\eta_0}^{\zeta_0} I_0 \left(\frac{a\sqrt{(\zeta - \zeta_0)(\eta - \eta_0)}}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) \cdot \left(\sqrt{\varepsilon}g(-\zeta) + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}f(-\zeta) \right) d\zeta + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{-\eta_0}^{\zeta_0} f(-\zeta) \frac{dR}{d\lambda} \Big|_{\eta=-\zeta} \cdot \left(\frac{a(\zeta_0 + \eta_0)}{4\sqrt{\varepsilon}\sqrt{(\zeta_0 - \zeta)(\zeta + \eta_0)}} \right) d\zeta. \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменным x и ξ , получим решение задачи (2.5)–(2.7) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 V(x, \xi) = & \frac{f(x - \xi) + f(x + \xi)}{2} + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{-\xi-x}^{\xi-x} I_0 \left(\frac{a\sqrt{(\zeta - \xi + x)(-\zeta - \xi - x)}}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) (\sqrt{\varepsilon}g(-\zeta) + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}f(-\zeta)) d\zeta + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{-\xi-x}^{\xi-x} f(-\zeta) I_1 \left(\frac{a\sqrt{(\zeta - \xi + x)(-\zeta - \xi - x)}}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) \frac{\xi}{2\sqrt{\varepsilon}(\xi - x - \zeta)(\zeta + \xi + x)} d\zeta. \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

С учетом (2.4) решение задачи (2.1)–(2.3) примет вид

$$\begin{aligned}
 U(x, t, \varepsilon) = & e^{-at/(2\varepsilon)} \left[\frac{f(x - t/\sqrt{\varepsilon}) + f(x + t/\sqrt{\varepsilon})}{2} + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \int_{-x-t/\sqrt{\varepsilon}}^{-x+t/\sqrt{\varepsilon}} I_0 \left(\frac{a\sqrt{(\sqrt{\varepsilon}\zeta - t + \sqrt{\varepsilon}x)(-\sqrt{\varepsilon}\zeta - t - \sqrt{\varepsilon}x)}}{2\varepsilon} \right) \left(\sqrt{\varepsilon}g(-\zeta) + \frac{f(-\zeta)}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) d\zeta + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{-x-t/\sqrt{\varepsilon}}^{-x+t/\sqrt{\varepsilon}} f(-\zeta) I_1 \left(\frac{a\sqrt{(\sqrt{\varepsilon}\zeta - t + \sqrt{\varepsilon}x)(-\sqrt{\varepsilon}\zeta - t - \sqrt{\varepsilon}x)}}{2\varepsilon} \right) \cdot \\
 & \cdot \frac{at}{2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{(-\sqrt{\varepsilon}\zeta + t - \sqrt{\varepsilon}x)(\sqrt{\varepsilon}\zeta + t + \sqrt{\varepsilon}x)}} d\zeta \left. \right]. \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

Далее будем изучать решение задачи (2.1)–(2.3) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого рассмотрим предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(x, t, \varepsilon) \equiv U_0(x, t).$$

Для первого слагаемого в формуле (2.24) предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ равен нулю. При вычислении предела для второго слагаемого в (2.24), воспользуемся асимптотическим разложением в ряд функции Бесселя. Согласно [1] имеем

$$I_0(z) \approx \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 + \frac{1^2}{1!8z} + \frac{1^2 3^2}{2!(8z)^2} + \dots \right].$$

С учетом множителя $e^{-at/(2\varepsilon)}$ для этого слагаемого получим:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{-x-t/\sqrt{\varepsilon}}^{-x+t/\sqrt{\varepsilon}} \left(\varepsilon g(-\zeta) + \frac{f(-\zeta)}{2} \right) \frac{\exp \left(\frac{-at + a\sqrt{(\sqrt{\varepsilon}\zeta - t + \sqrt{\varepsilon}x)(-\sqrt{\varepsilon}\zeta - t - \sqrt{\varepsilon}x)}}{2\varepsilon} \right)}{\sqrt{\pi a\sqrt{(\sqrt{\varepsilon}\zeta - t + \sqrt{\varepsilon}x)(-\sqrt{\varepsilon}\zeta - t - \sqrt{\varepsilon}x)}}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[1 + \frac{\varepsilon}{4a\sqrt{(\sqrt{\varepsilon}\zeta - t + \sqrt{\varepsilon}x)(-\sqrt{\varepsilon}\zeta - t - \sqrt{\varepsilon}x)}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3^2(2\varepsilon)^2}{2!8^2a^2(\sqrt{\varepsilon}\zeta - t + \sqrt{\varepsilon}x)(-\sqrt{\varepsilon}\zeta - t - \sqrt{\varepsilon}x)} + \dots \right] d\zeta = \\
& = \frac{1}{4\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-\zeta) \exp\left(-\frac{a(\zeta+x)^2}{4t}\right) d\zeta. \quad (2.25)
\end{aligned}$$

При вычислении предела при $\varepsilon \rightarrow 0$ в третьем слагаемом также воспользуемся асимптотический разложением в ряд для функции Бесселя:

$$I_1(z) \approx \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 - \frac{4-1^2}{1!8z} + \frac{(4-1^2)(4-3^2)}{2!(8z)^2} - \dots \right].$$

С учетом множителя $e^{-at/(2\varepsilon)}$ для этого слагаемого получим:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{-x-t/\sqrt{\varepsilon}}^{-x+t/\sqrt{\varepsilon}} \frac{f(-\zeta) \exp\left(\frac{-at + a\sqrt{(\sqrt{\varepsilon}\zeta - t + \sqrt{\varepsilon}x)(-\sqrt{\varepsilon}\zeta - t - \sqrt{\varepsilon}x)}}{2\varepsilon}\right)}{2\sqrt{\pi a} \sqrt[4]{((\sqrt{\varepsilon}\zeta - t + \sqrt{\varepsilon}x)(-\sqrt{\varepsilon}\zeta - t - \sqrt{\varepsilon}x))^3}} \times \\
& \times \left[1 - \frac{(4-1^2)2\varepsilon}{1!8a\sqrt{(\sqrt{\varepsilon}\zeta - t + \sqrt{\varepsilon}x)(-\sqrt{\varepsilon}\zeta - t - \sqrt{\varepsilon}x)}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(4-1^2)(4-3^2)(2\varepsilon)^2}{2!8^2a^2(\sqrt{\varepsilon}\zeta - t + \sqrt{\varepsilon}x)(-\sqrt{\varepsilon}\zeta - t - \sqrt{\varepsilon}x)} - \dots \right] d\zeta = \\
& = \frac{1}{4\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-\zeta) \exp\left(-\frac{a(\zeta+x)^2}{4t}\right) d\zeta. \quad (2.26)
\end{aligned}$$

С учетом (2.25) и (2.26) имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(x, t, \varepsilon) \equiv U_0(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-\zeta) \exp\left(-\frac{a(\zeta+x)^2}{4t}\right) d\zeta. \quad (2.27)$$

Правая часть (2.27) есть интеграл Пуассона, который дает решение задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} - a \frac{\partial U_0}{\partial t} = 0, \quad U_0(x, 0) = f(x). \quad (2.28)$$

Задача (2.28) является предельной по отношению к задаче (2.1)–(2.3). Таким образом, установили, что решение допредельной задачи (2.1)–(2.3) переходит в решение предельной задачи (2.28), если малый параметр стремится к нулю. Но решение предельной задачи не удовлетворяет второму начальному условию (2.2). Иными словами, область определения предельной задачи шире области определения допредельной задачи, что является характерной особенностью сингулярно возмущенной задачи, а в окрестности $t = 0$ возникает область пограничного слоя.

Совершенно иная ситуация наблюдается при рассмотрении эллиптической задачи.

3. Пример задачи для уравнения эллиптического типа с постоянными коэффициентами. Задача Дирихле. Рассмотрим следующую задачу Дирихле в полупространстве $t > 0$:

$$U_{x_1 x_1} + U_{x_2 x_2} + \varepsilon U_{tt} - U_t = 0, \quad (3.1)$$

$$U(x_1, x_2, 0, \varepsilon) = f(x_1, x_2), \quad (3.2)$$

где ε — малый параметр, $\varepsilon > 0$, $f(x_1, x_2) \in C(\Gamma)$, Γ — граница области $D^+ = \{t > 0\}$, $x = (x_1, x_2, t)$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |u(x)| < \infty.$$

Построим точное решение задачи (3.1)–(3.2). Для начала введем новую независимую переменную ξ и новую функцию V по формулам

$$\xi = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad U(x_1, x_2, \xi) = V(x_1, x_2, \xi) \exp\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\varepsilon}}\right). \quad (3.3)$$

Тогда задача (3.1), (3.2) примет вид

$$V_{x_1 x_1} + V_{x_2 x_2} + V_{\xi \xi} - \frac{1}{4\varepsilon} V = 0, \quad (3.4)$$

$$V(x_1, x_2, 0, \varepsilon) = f(x_1, x_2). \quad (3.5)$$

Для уравнения (3.4) введем сферические координаты:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + r \sin \theta \cos \phi, & x_2 &= y_2 + r \sin \theta \sin \phi, & \xi &= y_3 + r \cos \theta, \\ r &= |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (\xi - y_3)^2}, \end{aligned}$$

где $x = (x_1, x_2, \xi)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ — параметрическая точка.

Следуя работе [5], в качестве фундаментального решения уравнения (3.4) после перехода к сферическим координатам, возьмем функцию

$$E(x, y) = \frac{1}{|x - y|} \exp\left(-\frac{|x - y|}{2\sqrt{\varepsilon}}\right). \quad (3.6)$$

Решение задачи (3.4), (3.5) построим методом функции Грина (см. [5]); оно имеет вид

$$V(x_1, x_2, \xi, \varepsilon) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} f(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu} d\sigma_y, \quad (3.7)$$

где σ — плоскость $y_3 = 0$, $G(x, y)$ — функция Грина для уравнения (3.4) в D^+ :

$$G(x, y) = E(x, y) - E(x', y), \quad (3.8)$$

где $x' = (x_1, x_2, -\xi) \in D^+$.

Вычислим производную по нормали, учитывая, что вектор нормали ν , выходящий из полупространства D^+ , имеет направление противоположное оси y_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu} &= -\frac{\partial}{\partial y_3} \left\{ \frac{\exp\left(-\frac{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (\xi - y_3)^2}}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (\xi - y_3)^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\exp\left(-\frac{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (\xi + y_3)^2}}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (\xi + y_3)^2}} \right\} \Bigg|_{y_3=0} = \\ &= \frac{-\xi \exp\left(-\frac{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \xi^2}}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) \left(\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \xi^2} + 2\sqrt{\varepsilon}\right)}{\sqrt{\varepsilon} \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \xi^2\right)^{3/2}}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Подставляя выражение для производной по нормали (3.9) в формулу (3.7), получим:

$$V(x_1, x_2, \xi, \varepsilon) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) \xi \frac{2\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \xi^2}}{\left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \xi^2\right]^{3/2}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \xi^2}}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) dy_1 dy_2. \quad (3.10)$$

С учетом (3.3) получим точное решение задачи (3.1), (3.2):

$$U(x_1, x_2, t, \varepsilon) = \frac{t}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) \frac{2\varepsilon + \sqrt{\varepsilon(x_1 - y_1)^2 + \varepsilon(x_2 - y_2)^2 + t^2}}{\left[\varepsilon(x_1 - y_1)^2 + \varepsilon(x_2 - y_2)^2 + t^2\right]^{3/2}} \times \\ \times \exp\left(\frac{t - \sqrt{\varepsilon(x_1 - y_1)^2 + \varepsilon(x_2 - y_2)^2 + t^2}}{2\varepsilon}\right) dy_1 dy_2. \quad (3.11)$$

Устремляя в (3.11) ε к нулю, получим:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(x_1, x_2, t, \varepsilon) \equiv w(x_1, x_2, t) = \\ = \frac{1}{4\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) \exp\left(-\frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{4t}\right) dy_1 dy_2. \quad (3.12)$$

Как известно (см. [5]), формула (3.12) дает решение задачи Коши для уравнения теплопроводности, которая получается из задачи (3.1), (3.2), если положить $\varepsilon = 0$. Таким образом, при $\varepsilon = 0$ порядок уравнения (3.1) не изменился, но поменялся тип уравнения. При этом решение соответствующей предельной задачи удовлетворяет всем условиям исходной задачи (3.1), (3.2). Такое свойство решения предельной задачи является нетипичным для сингулярно возмущенных задач, к которым относится задача (3.1), (3.2). В предыдущем примере сингулярно возмущенной задачи для уравнения гиперболического типа мы четко видели эту характерную особенность решения — наличие области пограничного слоя в окрестности $t = 0$. В нашем примере решение задачи Дирихле при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится регулярным образом к решению предельной задачи Коши для уравнения параболического типа. Это обстоятельство позволяет построить асимптотическое решение задачи (3.1), (3.2) в виде ряда классической теории возмущений.

4. Пример задачи для уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами. Задача Дирихле (см. [2]). Рассмотрим задачу для общего случая уравнения (3.1):

$$a(x, y)U_{xx} + 2b(x, y)U_{xy} + d(x, y)U_{yy} + \varepsilon U_{tt} - cU_t = 0, \quad (4.1)$$

$$U(x, y, 0, \varepsilon) = f(x, y), \quad (4.2)$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области $D^+ = \{t \geq 0\}$, функции $f(x, y)$, $U(x, y, t, \varepsilon)$ стремятся к нулю на бесконечности, c — постоянная, коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$, $d(x, y)$ ограничены в полупространстве $t > 0$ и удовлетворяют в нем условию Гельдера с показателем λ .

Введя в уравнении новую неизвестную функцию $V(x, y, t, \varepsilon)$ по формуле

$$U(x, y, t, \varepsilon) = V(x, y, t, \varepsilon) \exp\left(\frac{c(t - \tau)}{2\varepsilon}\right), \quad (4.3)$$

получим уравнение

$$a(x, y)V_{xx} + 2b(x, y)V_{xy} + d(x, y)V_{yy} + \varepsilon V_{tt} - \frac{c^2}{4\varepsilon}V = 0. \quad (4.4)$$

Для уравнения (4.4) построим фундаментальное решение, определенное в полупространстве $t > 0$. Для этого необходимо знать функцию Леви для уравнения (4.4). Согласно [4], нужно построить функцию $\tilde{L}(X, Y)$, непрерывную вместе со своими производными первого и второго

порядка включительно по x, y, t , когда X и Y изменяются в некоторой области C и $X \neq Y$, чтобы при некотором $\lambda > 0$ удовлетворяла оценкам вида

$$\begin{aligned}\tilde{L}(X, Y) - H &= O(r^{\lambda-1}), \\ \frac{\partial(\tilde{L} - H)}{\partial x} &= O(r^{\lambda-2}), \quad \frac{\partial(\tilde{L} - H)}{\partial y} = O(r^{\lambda-2}), \quad \frac{\partial(\tilde{L} - H)}{\partial t} = O(r^{\lambda-2}), \\ \frac{\partial^2(\tilde{L} - H)}{\partial x \partial y} &= O(r^{\lambda-3})\end{aligned}\tag{4.5}$$

равномерно в каждой замкнутой области, содержащейся в C . Здесь r — расстояние между точками X и Y , $X = (x, y, t)$, $Y = (y_1, y_2, \tau)$,

$$\begin{aligned}H(X, Y) &= \frac{1}{\omega_3 \sqrt{\varepsilon(a(y_1, y_2)d(y_1, y_2) - b^2(y_1, y_2))}} \left(\frac{d(y_1, y_2)}{a(y_1, y_2)d(y_1, y_2) - b^2(y_1, y_2)}(x - y_1)^2 - \right. \\ &\quad - \frac{2b(y_1, y_2)}{a(y_1, y_2)d(y_1, y_2) - b^2(y_1, y_2)}(x - y_1)(y - y_2) + \frac{a(y_1, y_2)}{a(y_1, y_2)d(y_1, y_2) - b^2(y_1, y_2)}(y - y_2)^2 + \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon}(t - \tau)^2 \right)^{-1/2}\end{aligned}\tag{4.6}$$

и $\omega_3 = 2\pi^{3/2}/\Gamma(3/2)$.

Оценки (4.5) справедливы для всякой ограниченной замкнутой области, содержащейся в C . Поэтому для задачи в полупространстве, следуя методике [4], рассмотрим уравнение

$$\Delta V - \frac{c^2}{4\varepsilon}V = 0,\tag{4.7}$$

которое имеет решение, зависящее только от r :

$$F(X, Y) = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon}}\varphi\left(\frac{c}{2\sqrt{\varepsilon}}r\right),\tag{4.8}$$

где $\varphi(t)$ — решение уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2t\frac{d\varphi}{dt} - t^2\varphi = 0.$$

С помощью замены $\phi = \sqrt{t}\varphi$ последнее уравнение сводится к уравнению Бесселя, которое имеет два частных решения

$$\phi_1 = C_1 \frac{I_{1/2}(t)}{\sqrt{t}}, \quad \phi_2 = C_2 \frac{K_{1/2}(t)}{\sqrt{t}},$$

где $I_{1/2}(t)$, $K_{1/2}(t)$ — функции Бесселя мнимого аргумента первого и второго рода соответственно. Исходя из соображений регулярности решения на бесконечности, будем использовать второе решение.

Положим

$$\begin{aligned}\tilde{L}(X, Y, \varepsilon) &= \frac{c^2}{4\varepsilon \sqrt{2\pi^3(a(y_1, y_2)d(y_1, y_2) - b^2(y_1, y_2))}} K_{1/2} \left[\frac{c}{2\varepsilon \sqrt{a(y_1, y_2)d(y_1, y_2) - b^2(y_1, y_2)}} \times \right. \\ &\quad \times \left(\varepsilon d(y_1, y_2)(x - y_1)^2 - 2\varepsilon b(y_1, y_2)(x - y_1)(y - y_2) + \varepsilon a(y_1, y_2)(y - y_2)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left. + (a(y_1, y_2)d(y_1, y_2) - b^2(y_1, y_2))(t - \tau)^2 \right)^{1/2} \right],\end{aligned}\tag{4.9}$$

где $K_{1/2}$ — функция Макдональда, имеющая асимптотики $O(t^{-1})$ при $|t| < 1$ и $O(e^{-at})$ при $t > 1$, где $a < 1$. Функция $\tilde{L}(X, Y, \varepsilon)$ есть функция Леви для уравнения (4.4); для достаточно больших

r справедливы оценки

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= O(\exp(-pr)), & \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} &= O(\exp(-pr)), \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y} &= O(\exp(-pr)), & \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial x \partial y} &= O(\exp(-pr)).\end{aligned}$$

Далее, чтобы построить функцию Леви для уравнения (4.1), примем во внимание следующее выражение для функции Макдональда (см. [1]):

$$K_n(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \left[1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1!8x} + \dots\right].$$

С учетом замены (4.3) получим:

$$\begin{aligned}L(X, Y, \varepsilon) &= \frac{c}{4\pi} \left[\varepsilon d(y_1, y_2)(x - y_1)^2 - 2\varepsilon b(y_1, y_2)(x - y_1)(y - y_2) + \varepsilon a(y_1, y_2)(y - y_2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(a(y_1, y_2)d(y_1, y_2) - b^2(y_1, y_2) \right) (t - \tau)^2 \right]^{-1/2} \times \\ &\quad \times \exp \left(\left(c\sqrt{a(y_1, y_2)d(y_1, y_2) - b^2(y_1, y_2)}(t - \tau) \right) - \right. \\ &\quad \left. - c \left[\varepsilon d(y_1, y_2)(x - y_1)^2 - 2\varepsilon b(y_1, y_2)(x - y_1)(y - y_2) + \varepsilon a(y_1, y_2)(y - y_2)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(a(y_1, y_2)d(y_1, y_2) - b^2(y_1, y_2) \right) (t - \tau)^2 \right]^{1/2} / 2\varepsilon \sqrt{a(y_1, y_2)d(y_1, y_2) - b^2(y_1, y_2)} \right). \quad (4.10)\end{aligned}$$

Следуя работе [4], фундаментальное решение уравнения (4.4) будем искать как решение интегрального уравнения

$$\tilde{G}(X, Y, \varepsilon) = \tilde{L}(X, Y, \varepsilon) + \int_D \tilde{G}(X, \zeta, \varepsilon) K(\zeta, Y, \varepsilon) d\zeta. \quad (4.11)$$

Решение уравнения (4.11) имеет вид

$$\tilde{G}(X, Y, \varepsilon) = \tilde{L}(X, Y, \varepsilon) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_D \tilde{L}(X, \zeta, \varepsilon) K^n(\zeta, Y, \varepsilon) d\zeta, \quad (4.12)$$

где

$$K^{(0)}(X, Y, \varepsilon) = K(X, Y, \varepsilon), \quad (4.13)$$

$$K^{(n)}(X, Y, \varepsilon) = \int_D K(X, \zeta, \varepsilon) K^{(n-1)}(\zeta, Y, \varepsilon) d\zeta \quad (4.14)$$

и

$$\begin{aligned}K(X, Y, \varepsilon) &= \frac{a(x, y) - a(y_1, y_2)}{c} \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial x^2} + \frac{2b(x, y) - 2b(y_1, y_2)}{c} \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial x \partial y} + \\ &\quad + \frac{d(x, y) - d(y_1, y_2)}{c} \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial y^2} - \frac{c}{4\varepsilon} \tilde{L}. \quad (4.15)\end{aligned}$$

Решение задачи (4.1), (4.2) будем искать в виде

$$U(X, \varepsilon) = -2 \int_{\partial D} \Im G(X, \eta) f(\eta) d_\eta \sigma, \quad (4.16)$$

где оператор $\Im G$ в данном случае имеет вид

$$\Im G = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} G + (1 + c)G. \quad (4.17)$$

Функция $G(X, Y, \varepsilon)$ — главное фундаментальное решение уравнения (4.1), которое получается из формулы (4.12) с учетом (4.3).

В [2] рассмотрена задача для уравнения (4.1), если в нем положить $\varepsilon = 0$:

$$L_0 W \equiv a(x, y)W_{xx} + 2b(x, y)W_{xy} + d(x, y)W_{yy} - cW_t = 0.$$

Таким образом, при $\varepsilon = 0$ в (4.1) изменился тип уравнения с эллиптического на параболический. Принимая во внимание условие (4.2), для предельного уравнения получим задачу Коши в полупространстве:

$$a(x, y)W_{xx} + 2b(x, y)W_{xy} + d(x, y)W_{yy} - cW_t = 0, \quad (4.18)$$

$$W(x, y, 0) = f(x, y). \quad (4.19)$$

Решение задачи (4.18), (4.19) имеет следующий вид (см. [2]):

$$W(X, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(X, t; \Xi, 0) f(\Xi) d\Xi, \quad (4.20)$$

где Γ — фундаментальное решение уравнения (4.18), $X = (x, y)$, $\Xi = (\xi_1, \xi_2)$. Фундаментальное решение строится методом параметрика (см. [6]). Для этого вводится функция параметрика, которая для уравнения (4.18) имеет вид

$$Z(x, y, t; \xi_1, \xi_2, \tau) = \frac{c}{4(t - \tau)\pi\sqrt{a(\xi_1, \xi_2)d(\xi_1, \xi_2) - b^2(\xi_1, \xi_2)}} \times \\ \times \exp \left[-\frac{c(d(\xi_1, \xi_2)(x - \xi_1)^2 - 2b(\xi_1, \xi_2)(x - \xi_1)(y - \xi_2) + a(\xi_1, \xi_2)(y - \xi_2)^2)}{4(t - \tau)(a(\xi_1, \xi_2)d(\xi_1, \xi_2) - b^2(\xi_1, \xi_2))} \right]. \quad (4.21)$$

Для любых фиксированных (Ξ, τ) функция $Z(X, t; \Xi, \tau)$ удовлетворяет следующему уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\bar{L}_0 W \equiv a(\xi_1, \xi_2)W_{xx} + 2b(\xi_1, \xi_2)W_{xy} + d(\xi_1, \xi_2)W_{yy} - cW_t = 0. \quad (4.22)$$

Для построения фундаментального решения уравнения (4.18), $\bar{L}_0$ считают первым приближением к L_0 и рассматривают Z как главную часть фундаментального решения Γ . Далее фундаментальное решение строится в форме

$$\Gamma(X, t; \Xi, \tau) = Z(X, t; \Xi, \tau) + \int_{\tau}^t \int_D Z(X, t; \eta, \sigma) \Phi(\eta, \sigma; \Xi, \tau) d\eta d\sigma. \quad (4.23)$$

Функция Φ определяется из условия, что Γ должно удовлетворять уравнению (4.18). Тогда (см. [6]) имеет место равенство

$$\Phi(X, t; \Xi, \tau) = \Lambda Z(X, t; \Xi, \tau) + \int_{\tau}^t \int_D \Lambda Z(X, t; z, \sigma) \Phi(z, \sigma; \Xi, \tau) dz d\sigma, \quad (4.24)$$

где

$$\Lambda Z(X, t; z, \sigma) = \frac{1}{c}(a(x, y) - a(z_1, z_2)) \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z(x, y, t; z_1, z_2, \sigma) + \\ + \frac{1}{c}(2b(x, y) - 2b(z_1, z_2)) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} Z(x, y, t; z_1, z_2, \sigma) + \\ + \frac{1}{c}(d(x, y) - d(z_1, z_2)) \frac{\partial^2}{\partial y^2} Z(x, y, t; z_1, z_2, \sigma). \quad (4.25)$$

Таким образом, для каждого фиксированного (Ξ, τ) функция $\Phi(X, t; \Xi, \tau)$ является решением интегрального уравнения Вольтерра с особым ядром $\Lambda Z(X, t; z, \sigma)$. В [6] показано, что особенность ядра интегрируема, а уравнение (4.24) имеет решение вида

$$\Phi(X, t; \Xi, \tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\Lambda Z)_{\nu}(X, t; \Xi, \tau), \quad (4.26)$$

где

$$(\Lambda Z)_1 = \Lambda Z, \quad (\Lambda Z)_{\nu+1}(X, t; \Xi, \tau) = \int_{\tau}^t \int_D (\Lambda Z(X, t; z, \sigma)) (\Lambda Z)_{\nu}(z, \sigma; \Xi, \tau) dz d\sigma. \quad (4.27)$$

Как видно из построения решения задачи (4.18), (4.19), решение предельного уравнения (4.18) удовлетворяет всем дополнительным условиям исходной задачи (4.1), (4.2).

Далее установим связь между решением предельной задачи (4.18), (4.19) и решением исходной сингулярно возмущенной задачи (4.1), (4.2). Для этого в выражении (4.10) для функции Леви перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(X, Y, \varepsilon) = \frac{c}{4\pi \sqrt{a(y_1, y_2)d(y_1, y_2) - b^2(y_1, y_2)}(t - \tau)} \times \\ \times \exp \left(- \frac{c \left(d(y_1, y_2)(x - y_1)^2 - 2b(y_1, y_2)(x - y_1)(y - y_2) + a(y_1, y_2)(y - y_2)^2 \right)}{4(t - \tau) \left(a(y_1, y_2)d(y_1, y_2) - b^2(y_1, y_2) \right)} \right). \quad (4.28)$$

Последнее выражение совпадает с функцией параметрика (4.21), для уравнения (4.18), т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(x, y, t, y_1, y_2, \tau, \varepsilon) = Z(x, y, t, \xi_1, \xi_2, \tau). \quad (4.29)$$

Иными словами, функция Леви для уравнения (4.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в функцию параметрика для уравнения (4.18). Затем в формуле (4.15) рассмотрим последнее слагаемое $(-c/4\varepsilon)\tilde{L}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. С учетом выражения (4.9) для функции $\tilde{L}$ получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c}{4\varepsilon} \tilde{L} = 0. \quad (4.30)$$

Принимая во внимание выражение (4.25), заметим, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K(x, y, t, y_1, y_2, \varepsilon) = \Lambda Z(x, y, t; z, \sigma). \quad (4.31)$$

Тогда с учетом замены (4.3) и равенств (4.29), (4.31) получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(X, Y, \varepsilon) = \Gamma(X, t; \Xi, \tau). \quad (4.32)$$

Таким образом, фундаментальное решение сингулярно возмущенного уравнения (4.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в фундаментальное решение предельного уравнения (4.18).

Рассмотрим выражение (4.16). Выполнив вычисления под знаком интеграла в соответствии с (4.17) и учитывая (4.11), (4.32), имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(x, y, t, \varepsilon) = W(x, y, t,). \quad (4.33)$$

Таким образом, решение задачи Дирихле (4.1), (4.2) в полупространстве $t > 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в решение задачи Коши (4.18), (4.19).

5. Заключение. При составлении математических моделей реальных процессов неизбежно приходится пренебрегать теми или иными малыми параметрами. Иными словами, любая математическая модель является идеализированной, упрощенной. Вопрос о том, насколько хорошо такая упрощенная модель описывает процесс, в математической постановке часто сводится к проблеме исследования зависимости решений соответствующих уравнений от малых величин. В регулярном случае решение можно представить в виде ряда по степеням малого параметра. Главным членом такого ряда является решение предельной задачи, которая получается из

возмущенного уравнения, если в нем положить малый параметр равным нулю. Если же зависимость правых частей дифференциальных уравнений от малого параметра становится нерегулярной (сингулярной), то у решений таких уравнений появляется характерная особенность, которая выражается в наличии областей быстрого изменения решения: пограничных и переходных слоев. В этом случае решение уже нельзя построить, пользуясь методами регулярной теории возмущений. Приведенные примеры дают основание полагать, что среди задач для уравнений с частными производными, содержащими малый параметр в главной части, существует класс задач, имеющих регулярную асимптотику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ватсон Т. Н.* Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949.
2. *Захарова И. В.* Одна задача для уравнений с частными производными эллиптического типа, содержащего малый параметр в главной части // Междунар. ж. прикл. фундам. иссл. — 2017. — № 5. — С. 235–239.
3. *Кошляков Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970.
4. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: ИЛ, 1957.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Изд-во МГУ, 2004.
6. *Фридман Ф.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968.
7. *Янушаускас А.* О зависящих от малого параметра уравнениях с частными производными // в кн.: Краевые задачи. — Иркутск, 1990. — С. 94–103.

Захарова Ирина Валентиновна
Иркутский государственный университет
E-mail: zair@math.isu.ru