Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Кедрин, Оценка спектра дискретных последовательностей в некорректных задачах на основании исследования численного ранга траекторной матрицы, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 183, 73–84

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-183-73-84>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:59:25

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 183 (2020). С. 73–84
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-183-73-84

УДК 519.715

ОЦЕНКА СПЕКТРА ДИСКРЕТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ НА ОСНОВАНИИ ИССЛЕДОВАНИЯ ЧИСЛЕННОГО РАНГА ТРАЕКТОРНОЙ МАТРИЦЫ

© 2020 г. В. С. КЕДРИН

Аннотация. Рассмотрены свойства сингулярного разложения (SVD-разложения) в рамках анализа численного ранга в некорректных задачах для определения частотных свойств дискретных последовательностей, состоящих из совокупности тригонометрических биномов. Указаны свойства определения численного ранга сингулярного разложения. Предложен алгоритм определения частот тригонометрических биномов, входящих в исходную функцию, образующую дискретную последовательность, на основании оценки численного ранга. Определен устойчивый критерий оценки численного ранга на базе средней арифметической оценки псевдо-нуль-пространства траекторной матрицы. Проведен численный эксперимент, показывающий состоятельность средней арифметической оценки псевдо-нуль-пространства в условиях анализа спектра зашумленных последовательностей.

Ключевые слова: сингулярное разложение, спектральный анализ, численный ранг, некорректная задача, анализ частотных компонент.

ESTIMATION OF THE SPECTRUM OF DISCRETE SEQUENCES IN ILL-POSED PROBLEMS BASED ON THE STUDY OF THE NUMERICAL RANK OF THE TRAJECTORY MATRIX

© 2020 V. S. KEDRIN

ABSTRACT. In this paper, we discuss properties of the singular value decomposition (SVD-decomposition) within the framework of the analysis of the numerical rank in ill-posed problems for determining frequency properties of discrete sequences consisting of trigonometric binomials. The properties of the numerical rank of the SVD-decomposition are indicated. We propose an algorithm for determining the frequencies of trigonometric binomials involved in the original function that forms a discrete sequence; this algorithm is based on estimators of the numerical rank. We obtain a stable criterion for estimating the numerical rank based on the arithmetic-mean estimators of the pseudo-null-space of the trajectory matrix. Also, we present the results of numerical experiments that demonstrate the consistency of the arithmetic-mean estimator of the pseudo-zero-space for the analysis of the spectrum of noisy sequences.

Keywords and phrases: singular value decomposition, spectral analysis, numerical rank, ill-posed problem, analysis of frequency components.

AMS Subject Classification: 15A03, 15A18

В случае регистрации параметров, характеризующих динамику системы, с постоянным шагом τ по времени (пространству) в виде совокупности конечных дискретных последовательностей $t_i = t_0 + (i - 1)\tau$, $y_i = y(t_i)$, $i = \overline{1, n}$, задача идентификации их функциональной модели является достаточно сложной и многозначной. Указанная проблема имеет место для многих сложных реальных систем, так как получение систем динамических уравнений в этом случае связано со значительными трудностями при большом количестве переменных (динамической размерности системы), либо практически невозможно в силу их многосвязности и многосложности. Поэтому возникает необходимость развития современных методов обработки дискретных последовательностей (в том числе и в условиях активного развития цифрового мониторинга и методов анализа больших данных) с целью формирования приближенной оценки параметров идентификации динамики системы.

1. Сингулярное разложение. Дальнейшее изложение основывается на возможности представления $(n \times n)$ -матрицы $\mathbf{A}$ в виде произведения матриц специального вида:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \quad (1)$$

где $\mathbf{U}$ — унитарная матрица размером $(n \times n)$, столбцы которой определяют левые сингулярные векторы, $\mathbf{V}$ — унитарная матрица размером $(n \times n)$, $\mathbf{\Sigma}$ — матрица размером $(n \times n)$, на главной диагонали которой находится последовательность положительных сингулярных чисел $\{s_i\}$, расположенные в порядке убывания, а все внедиагональные элементы равны нулю.

Приведем ключевую теорему линейной алгебры (см. [11]), определяющую фундаментальное соотношение сингулярного разложения $(n \times n)$ -матрицы $\mathbf{A}$.

Теорема 1. *Для любой вещественной $(n \times n)$ -матрицы $\mathbf{A}$ существуют такие две вещественные ортогональные $(n \times n)$ -матрицы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, что $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{V}$ — диагональная матрица. Более того, можно выбрать $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ так, чтобы диагональные элементы матрицы $\mathbf{\Sigma}$ удовлетворяли условиям*

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r \geq s_{r+1} = \dots = s_n = 0,$$

где r — ранг матрицы $\mathbf{A}$; $s_1, \dots, s_n$ — сингулярные числа матрицы $\mathbf{A}$.

Теорема 1 позволяет доказать, что любая матрица $\mathbf{A}$ представима в виде (1). Для этого приведем следующие преобразования:

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{V}^T = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T,$$

откуда в силу свойств ортогональности $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$ и $\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}$ получаем

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T.$$

Теорема 1 может быть распространена с небольшими изменениями на произвольную прямоугольную $(m \times k)$ -матрицу $\mathbf{A}$. Приведем теорему о сингулярном разложении для указанной матрицы, сформулированную в [1].

Теорема 2 (SVD-разложение). *Если $\mathbf{A}$ — вещественная $(m \times k)$ -матрица, то существуют такие ортогональные матрицы*

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k] \in \mathbb{R}^{k \times k},$$

что

$$\mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{V}^T = \text{diag}(s_1, \dots, s_l), \quad l = \min(m, k),$$

где $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_l \geq 0$.

Указанные выше теоремы определяют возможность формирования метода SSA-анализа (см. [2, 3, 8, 12]), основанного на преобразовании дискретной выборки в матрицу развертки с помощью однопараметрической процедуры сдвига элементов ряда последовательности и описании пространства данных через линейную комбинацию взаимно ортогональных собственных подпространств с коэффициентами, равными значениям сингулярных чисел матрицы $\mathbf{\Sigma}$.

2. Оптимальные свойства сингулярного разложения. Оптимальные свойства сингулярного разложения основаны на экстремальных свойствах собственных чисел и собственных векторов.

Обозначим через $\mathcal{M}_k$ множество всех матриц, ранг которых не превышает k . Пусть $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$ — собственные тройки сингулярного разложения (1). Оптимальные свойства SVD могут быть сформулированы следующим образом.

Предложение 1.

1. *Справедливо соотношение*

$$\min_{\mathbf{Y} \in \mathcal{M}_k} \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_{\mathcal{M}}^2 = \sum_{j=k+1}^d \lambda_j.$$

2. *Если положить*

$$\mathbf{Y}_0 = \sum_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T \in \mathcal{M}_k,$$

то имеет место равенство

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}_0\|_{\mathcal{M}}^2 = \min_{\mathbf{Y} \in \mathcal{M}_k} \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_{\mathcal{M}}^2.$$

Предложение 1 говорит о том, что сумма первых k членов сингулярного разложения дает наилучшую аппроксимацию исходной матрицы матрицей ранга, не превосходящего k . Первый пункт предложения дает вид ошибки такой аппроксимации.

Сформулируем данное свойство оптимальности иначе. Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_K\}$.

Предложение 2. Минимум

$$\min_{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^K \text{dist}^2(X_i, \mathcal{L})$$

по всем подпространствам размерности, не превосходящей k , достигается на $\mathcal{L} = \text{span}(U_1, \dots, U_k)$.

Естественной характеристикой этих двух (эквивалентных) оптимальных аппроксимаций является величина

$$\frac{\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}_0\|_{\mathcal{M}}^2}{\|\mathbf{X}\|_{\mathcal{M}}^2} = \frac{\lambda_{k+1} + \dots + \lambda_d}{\lambda_1 + \dots + \lambda_d}.$$

Если иметь дело не с оптимальной аппроксимацией и положить

$$\mathbf{X}_I = \sum_{i \in I} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T,$$

где $I = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, d\}$, $j_1 > \dots > j_k$, $k < d$, то

$$1 - \frac{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_I\|_{\mathcal{M}}^2}{\|\mathbf{X}\|_{\mathcal{M}}^2} = \frac{\lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_k}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_d}. \quad (2)$$

Величина, задаваемая формулой (2), определяет долю собственных троек с номерами $j_1, \dots, j_k$ в описании пространства данных, заключенное в матрице $\mathbf{X}$.

Другое описание оптимальных свойств сингулярного разложения связано с так называемыми главными векторами набора векторов $X_1, \dots, X_K \in \mathbb{R}^L$. Пусть $X, P \in \mathbb{R}^L$, $X \neq \mathbf{0}_L$, $\|P\| = 1$. Тогда (X, P) является проекцией X на одномерное пространство $\mathcal{L}_P = \text{span}(P)$ и $c = |(X, P)|$ — норма этой проекции. Число $c = c(P)$ можно рассматривать как меру качества аппроксимации вектора X пространством $\mathcal{L}_P$: чем больше $c = c(P)$, тем лучше X аппроксимируется $\text{span}(P)$.

Если мы хотим найти такое P , что $\mathcal{L}_P$ аппроксимирует набор векторов $X_1, \dots, X_K$ наилучшим образом, то приходим к следующей оптимизационной задаче: найти такой вектор P_0 , что $\|P_0\| = 1$ и

$$\nu_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^K (X_i, P_0)^2 = \max_P \sum_{i=1}^K (X_i, P)^2, \quad (3)$$

где максимум в правой берется по всем $P \in \mathbb{R}^L$ с $\|P\| = 1$. Решение этой задачи может быть описано в терминах сингулярного разложения.

Предложение 3. Рассмотрим матрицу $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_K]$ и ее сингулярное разложение (1). Справедливы следующие утверждения.

1. Вектор $P_0 = U_1$ дает решение задачи (3) с $\nu_1 = \lambda_1$.
2. Пусть P_0 — решение следующей оптимизационной задачи:

$$\nu_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^K (X_i, P_0)^2 = \max_P^{(k)} \sum_{i=1}^K (X_i, P)^2, \quad (4)$$

где максимум в правой части берется по всем $P \in \mathbb{R}^L$, для которых $\|P\| = 1$ и $(P, U_i) = 0$ при $1 \leq i \leq k$. Если $k \leq d$, то вектор $P_0 = U_k$ является решением задачи (4) и $\nu_k = \lambda_k$. Если $k > d$, то $\nu_k = 0$.

Предложение 3 дает основание называть вектор U_i i -м главным вектором набора векторов $X_1, \dots, X_K$.

Положим $c_j(U_i) = (X_j, U_i)$. Так как

$$X_j = \sum_{i=1}^d c_j(U_i) U_i,$$

коэффициент $c_j(U_i)$ называется i -й главной компонентой вектора X_j ; вектор

$$Z_i = (c_1(U_i), \dots, c_K(U_i))^T = \mathbf{X}^T U_i$$

естественно назвать вектором i -х главных компонент.

Заметим, что, в силу (1), $Z_i = \sqrt{\lambda_i} V_i$, и сингулярное разложение (1) можно интерпретировать как одновременное разложение всех столбцов матрицы $\mathbf{X}$ по базису из их главных векторов. Такая интерпретация является стандартной в анализе главных компонент в статистике, когда столбцы матрицы $\mathbf{X}$ образуют l -мерную выборку объема K . Заметим, что термин *факторные векторы*, применяемый для обозначения векторов V_i , также имеет статистическое происхождение.

3. Численный ранг. В силу указанных выше свойств можно определить сингулярного разложение как описание подпространств данных, заключенных в матрице $\mathbf{A}$, через суммы взаимно ортогональных собственных подпространств. При этом количество значимых (отличных от погрешности и шума) подпространств будет зависеть от количества сингулярных чисел, существенно отличных от нуля. Это подтверждает положение, сформированное в фундаментальной работе [1], что сингулярное разложение позволяет ввести практическое понятие численного ранга, так называемого ε -ранга матрицы, который для некоторого малого $\varepsilon > 0$ определяется по формуле

$$\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon) = \min_{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 \leq \varepsilon} \text{rank}(\mathbf{B}). \quad (5)$$

Количество сингулярных значений, позволяющих с допустимой погрешностью ε определить $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$ на фоне остального их количества, характеризует близость ранга исследуемой матрицы $\mathbf{A}$ к матрице $\mathbf{B}$ меньшего ранга. Поэтому сингулярное разложение позволяет раскрыть «скрытую» информацию о значимой структуре исследуемой матрицы $\mathbf{A}$. Так, оценивая значения сингулярных чисел

$$s_1 \geq \dots \geq s_r > s_{r+1}, \quad s_{r+1} = \dots = s_m \approx 0,$$

получаем:

$$\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon) = r, \quad \text{range}(\mathbf{A}) = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}, \quad \text{null}(\mathbf{A}) = \text{span}\{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_m\},$$

где $\text{rank}(\mathbf{A})$ — ранг матрицы $\mathbf{A}$; $\text{range}(\mathbf{A})$ — область значений матрицы $\mathbf{A}$:

$$\text{range}(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^r : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \text{ для некоторого } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r \right\};$$

$\text{null}(\mathbf{A})$ — нуль-пространство матрицы $\mathbf{A}$:

$$\text{null}(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m-r} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}.$$

Отметим, что сингулярное разложение позволяет оценить размерности двух важных подпространств: $\text{range}(\mathbf{A})$ ранга r , содержащего существенную для исследования информацию, и $\text{null}(\mathbf{A})$ ранга $m - r$, содержащего остаточную составляющую, которая может быть интерпретирована как шум или погрешность.

Понятие численного (сингулярного) ранга r позволяет раскрыть и выявить скрытые (латентные) внутренние взаимосвязи между элементами матрицы $\mathbf{A}$. В случае, если матрица $\mathbf{A}$ является траекторной и характеризует исследуемую временную (пространственную) выборку процесса, то ранг r , определяемый с помощью сингулярного разложения, должен быть связан с числом степеней свободы системы, порождающей исследуемый процесс, т.е. числом переменных, которые определяют фазовые состояния системы.

Теорема 3. Пусть для матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times k}$ определено сингулярное разложение $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$. Если $p < r = \text{rank}(\mathbf{A})$ и $\mathbf{A}_p = \sum_{i=1}^p s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$, то

$$\min_{\text{rank}(\mathbf{B})=p} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_p\|_2 = s_{p+1}.$$

Теорема 3 утверждает, что наименьшее сингулярное число матрицы $\mathbf{A}$ равняется измеренному в 2-норме расстоянию от этой матрицы до множества всех матриц неполного ранга. Из нее также следует, что множество матриц полного ранга является открытым и всюду плотным в $\mathbb{R}^{m \times k}$. Наконец, если $r_\varepsilon = \text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$, то

$$s_1 \geq \dots \geq s_{r_\varepsilon} > \varepsilon \geq s_{r_\varepsilon+2} \geq \dots \geq s_l, \quad l = \min\{m, k\}.$$

Таким образом, оценка численного (сингулярного) ранга r позволяет идентифицировать скрытые (латентные) внутренние взаимосвязи между элементами матрицы $\mathbf{A}$.

В случае, если матрица $\mathbf{A}$ является траекторной и характеризует динамику исследуемой временной (пространственной) выборки процесса, то численный ранг r может косвенно характеризовать число степеней свободы системы, порождающей исследуемый процесс, или число переменных, которые определяют фазовое состояние системы.

4. Алгоритм определения частотных свойств дискретных последовательностей на базе анализа численного ранга. Сформулированный в предыдущем пункте вывод применим к исследованию динамики гармонических процессов, порождаемых аддитивной комбинацией тригонометрических биномов (в общем случае соединенных с шумовой компонентой):

$$f(t) = \sum_{i=1}^I A_i \cos(\alpha_i t + \phi_i) + B_T \sin(\alpha_i t + \phi_i) \quad (6)$$

В этом случае свойства инвариантности численного ранга r относительно значений частот аддитивных составляющих и его пропорциональной зависимости от количества I тригонометрических биномов для любого $\alpha_i \neq \pi k$, $k \in \mathbb{N}$, позволяют создать метод анализа частот (спектра) по исходной дискретной выборке временного ряда (см. [4, 9, 10]). Эта идея основана на принципе активной идентификации системы, когда используются специально выбранные тестовые сигналы и изучается влияние состояния системы на данное воздействие. Применительно к контексту решаемой задачи предлагается рассматривать изменение численного ранга r траекторной матрицы временного ряда, образованного сложением отсчетов исходного ряда и простейшей тестовой тригонометрической компоненты заданной частоты:

$$f_T(x) = A_T \cos(\alpha_T x + \phi) + B_T \sin(\alpha_T x + \phi).$$

В случае «воздействия» на исходную временную выборку тестовой компоненты частоты α_T , не присутствующей в исходном временном ряду ($\forall a_i: a_i \neq \alpha_T$), будет наблюдаться увеличение

Рис. 1. Алгоритм определения частот гармонических компонент.

численного ранга r в силу свойства его пропорциональной зависимости от количества I гармонических компонент при $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_I$.

При «воздействии» на исходную временную выборку тестовой компоненты частоты α_T , присутствующей в исходном временном ряде ($\forall a_i: a_i = a_T$), в силу свойств инвариантности относительно значений частот аддитивных составляющих $\forall a_i \neq \pi k, k \in \mathbb{N}$ и дистрибутивности численный ранг r останется неизменным:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(A_i \cos(\alpha_i x + \phi) + B_i \sin(\alpha_i x + \phi) \right) + \left(A_T \cos(\alpha_T x + \phi) + B_T \sin(\alpha_T x + \phi) \right) = \\ &= (A_i + A_T) \cos(\alpha_i x + \phi) + (B_i + B_T) \sin(\alpha_i x + \phi) \quad \forall a_i: a_i = a_T. \end{aligned}$$

Сформулированная идея легла в основу создания итерационного алгоритма определения частот (спектра) компонент гармонических составляющих, присутствующих в исходном модели последовательности, элементы которой порождаются гармонической функцией вида (6) (см. рис. 1).

Входными данными для алгоритма служат:

- (1) выборка исходного временного ряда $f(t)$, порождаемого периодической функцией вида (6), преобразованного в матрицу развертки A ;
- (2) диапазон частот $(\alpha_{\text{start}}; \alpha_{\text{end}})$, в котором будет производиться поиск частот тригонометрических биномов, входящих в исходный ряд;
- (3) дискретность $\Delta\alpha$, разбивающая диапазон $(\alpha_{\text{start}}; \alpha_{\text{end}})$ на k отсчетов.

5. Критерии расчета численного ранга. В рамках применения сформулированного алгоритма необходимо оценивать количество сингулярных чисел, отличных от нуля. В [6, 7] показано, что численными критериями оценки последовательности сингулярных чисел, расположенных в порядке убывания модуля на главной диагонали матрицы Σ , может служить величина абсолютной погрешности ϵ_σ , выше которой сингулярные числа являются значимыми и попадают в область значений $\text{range}(\mathbf{A})$ и характеризуют численный ранг r , а ниже — в область значений $(\mathbf{A})$.

Для примера приведем результаты анализа выборки сингулярных чисел, полученной в результате сингулярного разложения 200 отсчетов временной последовательности с шагом на интервале $T \in [0, 200]$, образованной функцией

$$f(t) = 2 \sin(0,3t) + 2 \sin(0,5t), \quad (7)$$

при критерии оценки численного ранга $\epsilon_\sigma = 0,01$ и выборке тестовой частоты $\alpha_k \in [0; 1]$ с шагом $\Delta\alpha = 0,05$ (21 отсчет тестовой функции). Результаты анализа численного ранга с заявленным критерием проиллюстрированы на рис. 2; видно, что в множество β идентифицированных частот, характеризующих понижение численного ранга, попадают значения 0, 0,3, 0,5, что согласуется с выводами о зависимостях численного ранга относительно периодических функций, сделанных в [6, 8, 9]. Заметим, что в предложенном модельном примере идентифицированные отсчеты строго совпадают с исходными частотами компонент модельной функции (7). В случае анализа произвольной дискретной выборки это требование зачастую не выполнимо. Так изменение модельного примера в части количества отсчетов выборки тестовой частоты $\alpha_k \in [0; 1]$ с 21 до 26 при выборе шага $\Delta\alpha = 0,04$ дает неудовлетворительную картину в части идентификации частот относительно выбранного критерия оценки численного ранга с помощью абсолютной ошибки $\epsilon_\sigma = 0,01$ (см. рис. 3).

Таким образом, критерий оценки численного ранга с помощью абсолютной ошибки ϵ является достаточно строгим относительно приближения отсчетов выборки теста к имеющимся частотам компонент и характеризует чувствительность аппарата сингулярного разложения относительно малых изменений. Для преодоления указанного ограничения предлагается рассмотреть критерий оценки численного ранга путем анализа средней арифметической оценки $\bar{d}_s$ псевдо-нуль-пространства $\text{null}_s(\mathbf{A})$ матрицы $\mathbf{A}$:

$$\bar{d}_s = \frac{1}{n-s} \sum_{i=s}^n \sigma_i.$$

Под псевдо-нуль-пространством $\text{null}_s(\mathbf{A})$ будем понимать область сингулярных чисел матрицы Σ , из которой исключены первые s сингулярных чисел. Результаты анализа численного ранга на

Рис. 2. Частотный анализ компонент последовательности на базе критерия абсолютной погрешности $\epsilon_\sigma = 0,01$ при выборке тестовой частоты $\alpha_k \in [0; 1]$ с шагом $\Delta\alpha = 0,05$.

Рис. 3. Частотный анализ компонент последовательности на базе критерия абсолютной погрешности $\epsilon_\sigma = 0,01$ при выборке тестовой частоты $\alpha_k \in [0; 1]$ с шагом $\Delta\alpha = 0,04$.

Рис. 4. Частотный анализ компонент последовательности на базе критерия средней арифметической оценки $\bar{d}_s$ пространства $\text{null}_s(\mathbf{A})$ при выборке тестовой частоты $\alpha_k \in [0; 1]$ с шагом $\Delta\alpha = 0,04$.

основании критерия средней арифметической оценки $\bar{d}_s$ для выборки тестовой частоты $\alpha_k \in [0; 1]$ с 21 до 26 при выборе шага $\Delta\alpha = 0,04$ представлены на рис. 4.

Исходя из анализа динамики критерия $\bar{d}_s$ можно выделить подмножества отсчетов частот, характеризующие идентификацию частоты в исходной модельной выборке. Так на основании анализа псевдо-нуль-пространств при $s = 2$ и $s = 4$ можно выделить подмножества индексов отсчетов (7, 8) и (12, 13), которые определяют диапазоны частот $\alpha_1 \in (0,28; 0,32)$ и $\alpha_2 \in (0,48; 0,52)$, определяющих частоты модельной выборки. Заметим, что первый и второй локальный минимумы (без учета отсчета $\alpha_k = 0$) для области $\text{null}(\mathbf{A})$ близких к нулю сингулярных чисел при $s = 6$ и $s = 8$ (см. рис. 4), также идентифицирует частоты компонент модельной выборки.

Таким образом, критерий средней арифметической оценки $\bar{d}_s$ пространства $\text{null}_s(\mathbf{A})$ позволяет преодолеть чувствительность сингулярного разложения к малым изменениям и связан с анализом локальных минимумов получаемых зависимостей для данного критерия.

6. Численный эксперимент анализа численного ранга по зашумленной последовательности. Сформированный выше алгоритм был использован при проведении численного эксперимента по применению метода сингулярного разложения к временной последовательности, образованной суммированием рассмотренной выше последовательности, образованной функцией вида (7), и последовательности (белый шум), образованной функцией нормальной случайной величины $\Psi(t)$, задаваемой в диапазоне $[0, \psi_R]$:

$$f(t) = 2 \sin(0,3t) + 2 \sin(0,5t) + \Psi(t). \quad (8)$$

Рис. 5. Частотный анализ компонент зашумленной последовательности на базе критерия средней арифметической оценки $\bar{s}$ пространства $\text{null}_s(\mathbf{A})$ при выборке 70 отсчетов тестовой частоты $\alpha_k \in [0; 1]$ при различном уровне шума ψ_R .

Результаты анализа численного ранга на основании критерия средней арифметической оценки $\bar{d}_s$ пространства $\text{null}_s(\mathbf{A})$ для последовательности, образованной функцией (8), при различных значениях уровня шума ψ_R представлены на рис. 5.

На основании численного эксперимента было определено, что оценка численного ранга r траекторной матрицы ряда $\mathbf{A}$ с помощью критерия средней арифметической оценки $\bar{d}_s$ пространства $\text{null}_s(\mathbf{A})$ остается состоятельной даже в условиях большого уровня шума и позволяет идентифицировать исходные частоты модельной выборки. При этом в случае зашумленной последовательности применение сформулированного выше алгоритма определяет постановку для оптимальной задачи по исследованию локальных минимумов функционала в псевдо-нуль-пространстве $\text{null}_s(\mathbf{A})$, который формируется путем расчета средней арифметической оценки критерия $\bar{d}_s$. Очевидно, что такая задача должна решаться в рамках многократного статистического эксперимента и иметь статистическую оценку, о которой речь пойдет в последующих работах по данной тематике.

Вывод. Таким образом, с помощью оценки численного ранга r можно сформировать методику, которая позволяет не только оценить динамическую размерность, но и идентифицировать параметры частот периодических компонент, присутствующих в исходной дискретной последовательности, порождаемой периодической функцией вида (6). Сингулярное преобразование позволяет

рассматривать информационную матрицу развертки совместно с парами собственных векторов сингулярных чисел этой матрицы. Роль набора базисных функций выполняет (ортонормированный) набор собственных векторов. При этом методика сингулярного разложения разделяет процедуру двумерного разложения на два этапа. На первом этапе сигнал переводится в двумерное представление с практически равноправными координатами, на втором производится сингулярное разложение этого двумерного представления по двум системам ортогональных функций. Интерпретация набора этих функций не является жёстко фиксированной, как в вейвлет-анализе, а определяется параметром разложения и особенностями самого исходного сигнала. Анализ, выполненный в [5], показал, что в случаях отсутствия или исключения медленных трендов, получается разложение, достаточно схожее с вейвлет-преобразованием, а для строго периодических сигналов и при соответствующем выборе параметров сингулярное разложение фактически осуществляет разложение в ряд Фурье. Отсюда можно отметить следующие преимущества сингулярного разложения перед методами спектрального анализа:

1. Набор функций разложения порождается самой исследуемой функцией процесса и длиной окна.
2. Длина строки (окна) сингулярной матрицы развертки позволяет легко варьировать качество и состав выделяемых составляющих.
3. Возможность управляемого восстановления исходного процесса по интерпретируемым компонентам, в отличие от практически однозначных компонент Фурье- и вейвлет-преобразований.
4. Отсутствие для реальных временных рядов граничного эффекта по параметру сдвига, определяемого, например, жесткой фиксацией набора вейвлет-функций.
5. Представление отдельной собственной сингулярной функции в виде линейного фильтра показывает, что он обладает не комплексной, как в случае Фурье, а действительной частотной характеристикой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999.
2. Данилов Д. Л., Жиглявский А. А. Главные компоненты временных рядов: метод «гусеница». — М.: Наука, 2004.
3. Дойников А. Н., Кедрин В. С., Сальникова М. К. Моделирование нестационарных процессов с использованием алгоритмов их сингулярного разложения// Науч.-техн. вед. СПбГПУ. — 2006. — № 5. — С. 143–147.
4. Кедрин В. С., Кузьмин О. В. Рекуррентные соотношения аддитивных последовательностей для периодических функций// Пробл. управл. — 2015. — 2. — С. 22–30.
5. Кедрин В. С. Спектральные методы анализа в задачах оценки состояния сложных энергетических систем// Вестн. Иркутск. рег. отд. Акад. наук высшей школы России. — 2008. — 1, № 13. — С. 193–198.
6. Кедрин В. С., Кузьмин О. В. Частотный анализ гармонических рядов с помощью оценки сингулярного ранга// Науч.-техн. вед. СПбГПУ. Информатика, телекоммуникации и управление. — 2013. — № 4 (176). — С. 47–54.
7. Кедрин В. С., Кузьмин О. В. Методика определения частот периодических компонент временной выборки на основании численного ε -ранга// Мат. V Всеукр. науч.-практ. конф. «Информатика и системные науки» (Полтава, 13-15 апреля 2014 г.). — Полтава: ПУЕТ, 2014. — С. 141–145.
8. Кузьмин О. В., Кедрин В. С. Сингулярное разложение в моделях дискретных последовательностей. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014.
9. Кузьмин О. В., Кедрин В. С. Анализ структуры гармонических рядов динамики на базе алгоритма сингулярного разложения// Пробл. управл. — 2013. — 1. — С. 26–31.
10. Кузьмин О. В., Кедрин В. С. Выделение осциллирующих и трендовых компонент на базе критериальной модификации сингулярного анализа// Вестн. Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та им. М. Ф. Решетнева. — 2012. — № 2 (128). — С. 27–32.
11. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. — М.: Мир, 1969.

12. *Golub G. H., Reinsch C.* Singular value decomposition and least squares solutions// in: Handbook for Automatic Computation, II. Linear Algebra. — New York: Springer-Verlag, 1971. — P. 134–151.

Кедрин Виктор Сергеевич
Иркутский государственный университет
E-mail: kedrinvs82@gmail.com