Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Керимбеков, Синтез распределенного оптимального управления в задаче слежения при оптимизации тепловых процессов, описываемых интегродифференциальными уравнениями, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 183, 85–97

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-183-85-97>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:37:27

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 183 (2020). С. 85–97
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-183-85-97

УДК 517.97

СИНТЕЗ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ СЛЕЖЕНИЯ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

© 2020 г. А. КЕРИМБЕКОВ

Аннотация. В работе исследуется задача синтеза для распределенной системы терморегулирования в случае, когда краевая задача содержит интегральный оператор Фредгольма. Мы используем метод, предложенный А. И. Егоровым, и развиваем его на основе схемы Беллмана. Используя понятия обобщенного решения краевой задачи и дифференциала Фреше для функционала Беллмана, мы получаем интегро-дифференциальное уравнение в частных производных. Для синтеза распределенного оптимального управления предложен численный алгоритм.

Ключевые слова: обобщенное решение, функционал Беллмана, дифференциал Фреше, интегро-дифференциальное уравнение, синтез оптимального управления.

SYNTHESIS OF DISTRIBUTED OPTIMAL CONTROL IN THE TRACKING PROBLEM AT THE OPTIMIZATION OF THERMAL PROCESSES DESCRIBED BY INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2020 А. KERIMBEKOV

ABSTRACT. In this paper, we examine the synthesis problem for a distributed thermal control system in the case where a Fredholm integral operator is involved in the boundary-value problem. We use the method proposed by A. I. Egorov and develop it based on the Bellman scheme. Using the notions of a generalized solution of a boundary-value problem and the Fréchet differential for the Bellman functional, we obtain a partial integro-differential equation. For synthesizing a distributed optimal control, we propose a numerical algorithm.

Keywords and phrases: generalized solution, Bellman functional, Fréchet differential, integro-differential equation, synthesis of optimal control.

AMS Subject Classification: 49K20

1. Introduction. Многие прикладные задачи описываются интегро-дифференциальными уравнениями (см., например, [2, 3, 6, 27]). При решении задачи управления встречаются случаи, когда управление ищется как функция независимых переменных, т.е. как программа, и когда оно находится как функция состояния управляемого процесса, т.е. в форме синтеза.

Задачи программного управления системами с распределенными параметрами, а также процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями, изучались многими авторами (см. [1, 4–6, 11, 13, 16, 18–23, 25, 26, 28–30]). Однако проблема синтеза для управляемых систем с

распределенными параметрами мало изучена (см. [4, 6, 9, 10, 14]); в частности, для управляемых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями, проблема синтеза почти не изучена (см. [17, 24]).

Изучение проблемы синтеза, как правило, начинается с принципа оптимальности Беллмана. Использование схемы Беллмана для решения задачи синтеза управляемых систем с распределенными параметрами стало возможным после появления работы А. И. Егорова (см. [4]). Для вывода уравнения Беллмана он использовал интегральное тождество обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса и дифференциал Фреше для функционала Беллмана. Таким образом, ему удалось получить уравнение Беллмана в удовлетворительном виде при решении задачи синтеза для систем с распределенными параметрами.

В данной статье исследуются вопросы разрешимости задачи синтеза управляемых тепловых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями с оператором Фредгольма. По схеме Беллмана—Егорова для функционала Беллмана получено интегро-дифференциальное уравнение в частных производных. При исследовании разрешимости этого уравнения оказалось невозможным применить методы, которые использовались в [4, 6, 9, 10, 14]. Мы начали исследовать это уравнение, представив структуру решения в виде суммы двух функций. Такой подход позволил преобразовать уравнение в систему двух уравнений, одно из которых является независимым. Таким образом, оказалось возможным исследовать задачу синтеза процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями.

2. Обобщенное решение краевой задачи. Рассмотрим задачу распределенного оптимального управления процессом, описываемым краевой задачей

$$V_t - AV = \lambda \int_0^T K(t, \tau) V(\tau, x) d\tau + f[t, x, u(t, x)], \quad x \in Q \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$V(0, x) = \psi(x), \quad x \in Q, \quad (2)$$

$$\Gamma V(t, x) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \frac{\partial V}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) + a(x)V = 0, \quad x \in \gamma, \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

где A — эллиптический оператор, определяемый формулой

$$AV(t, x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial V}{\partial x_j} \right) - c(x)V(t, x),$$

$$a_{i,j}(x) = a_{i,j}(x), \quad \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) a_i a_j \geq c_0 \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad c_0 > 0;$$

Q — область пространства $\mathbb{R}^n$, ограниченная кусочно гладкой поверхностью γ , ν — вектор внешней нормали в точке $x \in \gamma$, функция $K(t, \tau)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^T \int_0^T K^2(t, \tau) d\tau dt = K_0 < \infty;$$

$\psi(x) \in H_1(Q)$, $a(x)$, $c(x)$ и $a_{i,j}(x)$ — заданные функции, $x \in Q$, $f(t, x, u(t, x)) \in H(Q_T)$, $Q_T = Q \times (0, T)$, — функция внешнего источника, нелинейно зависящая от управления $u(t, x) \in H(Q_T)$, являющаяся элементом гильбертова пространства для любого управления $u(t, x) \in H(Q_T)$ и удовлетворяющая условию монотонности:

$$f_u[t, x, u(t, x)] \neq 0 \quad \forall (t, x) \in Q_T; \quad (4)$$

$H_1(Q)$ — пространство Соболева первого порядка, λ — параметр, T — фиксированный момент времени.

При исследовании задач оптимального управления целесообразно использовать понятие обобщенного решения краевой задачи.

Определение 1. Обобщенное решение краевой задачи (1)–(4) — это функция $V(t, x) \in H(Q_T)$, которая вместе с обобщенной производной $V_{x_i}(t, x)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_Q [V(t, x)\Phi(t, x)]_{t_1}^{t_2} dx \equiv & \int_{t_1}^{t_2} \int_Q \left[V(t, x)\Phi_t(t, x) - \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x_i} - c(x)V(t, x)\Phi(t, x) \right] dx dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_Q \left[\lambda \int_0^T K(t, \tau)V(t, x) d\tau + f[t, x, u(t, x)] \right] \Phi(t, x) dx dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_\gamma a(x)V(t, x)\Phi(t, x) dx dt \quad (5) \end{aligned}$$

для всех t_1 и t_2 , $0 < t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$, и всех $\Phi(t, x) \in H_1(Q_T)$, а также удовлетворяет начальным условиям в слабом смысле, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_Q [V(t, x) - \psi_1(x)] \phi_0(x) dx = 0$$

для всех функций $\phi_0(x) \in H(Q)$.

Будем искать решение задачи (1)–(4) в виде

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \quad (6)$$

где

$$V_n(t) = \langle V(t, x), z_n(x) \rangle = \int_Q V(t, x) z_n(x) dx$$

— коэффициенты Фурье, $z_n(x)$ — обобщенные собственные функции краевой задачи (см. [8])

$$\begin{aligned} D_n(V(t, x), z_n(x)) \equiv \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_j} \frac{\partial z_n(t, x)}{\partial x_i} + c(x)V(t, x)z_n(x) \right) dx + \\ + \int_\gamma a(x)V(t, x)z_n(x) dx = \lambda_n \int_Q V(t, x)z_n(x) dx, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\Gamma z_n(x) = 0$, $x \in \gamma$, $0 < t < T$, $n = 1, 2, \dots$; они образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(Q)$, а соответствующие собственные значения λ_n удовлетворяют условиям $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. Для определения коэффициентов Фурье в

интегральном тождестве (5) предположим, что $\Phi(t, x) = z_n(x)$. Тогда согласно соотношениям

$$\begin{aligned} \int_Q \left[V(t, x) z_n(x) \right]_{t_1}^{t_2} dx &\equiv \\ &\equiv \int_{t_1}^{t_2} \int_Q \left[V(t, x) * 0 - \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_j} \frac{\partial z_n(t, x)}{\partial x_i} - c(x) V(t, x) z_n(x) \right] dx dt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \int_\gamma a(x) V(t, x) z_n(x) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_Q \left[\lambda \int_0^T K(t, \tau) V(\tau, x) d\tau + f[t, x, u(t, x)] \right] z_n(x) dx dt \end{aligned}$$

и

$$\int_Q \left[V(t, x) z_n(x) \right]_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_Q V(t, x) z_n(x) dx dt,$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \langle V(t, x), z_n(x) \rangle + \lambda_n \langle V(t, x), z_n(x) \rangle - \lambda \int_0^T K(t, \tau) \langle V(\tau, x), z_n(x) \rangle d\tau - \right. \\ \left. - \langle f[t, x, u(t, x)], z_n(x) \rangle \right\} dt \equiv 0, \end{aligned}$$

где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение в пространстве $H(Q)$. Положив $t_2 = t$ и дифференцируя по t , получим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle V(t, x), z_n(x) \rangle_{H(Q)} + \lambda_n \langle V(t, x), z_n(x) \rangle_{H(Q)} = \\ = \lambda \int_0^T K(t, \tau) \langle V(\tau, x), z_n(x) \rangle_{H(Q)} d\tau + \langle f[t, x, u(t, x)], z_n(x) \rangle_{H(Q)}, \end{aligned}$$

$$\langle V(\tau, x), z_n(x) \rangle_{H(Q)}|_{t=t_1} = \langle V(t_1, x), z_n(x) \rangle_{H(Q)}.$$

Используя подход Лиувилля, представим решение этой задачи в виде

$$\begin{aligned} \langle V(t, x), z_n(x) \rangle_{H(Q)} &= e^{-\lambda_n t} \langle V(t_1, x), z_n(x) \rangle_{H(Q)} + \\ &+ \int_{t_1}^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \left(\lambda \int_0^T K(\tau, s) \langle V(s, x), z_n(x) \rangle_{H(Q)} ds + \langle f(\tau, x, u(\tau, x)), z_n(x) \rangle_{H(Q)} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, при $t_1 \rightarrow 0$ имеем

- (1) $\langle V(t_1(x), z_n(x)) \rangle_{H(Q)} \xrightarrow{t_1 \rightarrow 0} \langle \psi(x), z_n(x) \rangle = \psi_n,$
- (2) $\langle V(t(x), z_n(x)) \rangle = V_n(t),$
- (3) $\langle f[t, x, u(t, x)], z_n(x) \rangle_{H(Q)} = f_n[t, u].$

Принимая во внимание эти соотношения, получаем

$$\begin{aligned} V_n(t) &= e^{-\lambda_n t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \left\{ \lambda \int_0^T K(\tau, s) V_n(s) ds + f_n(\tau, u) \right\} d\tau = \\ &= e^{-\lambda_n t} \psi_n + \lambda \int_0^T \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} K(\tau, s) d\tau \right) V_n(s) ds + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau, u) d\tau. \end{aligned}$$

Можно показать, что коэффициенты Фурье для каждого фиксированного $n = 1, 2, 3, \dots$ определяются как решение линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$V_n(t) = \lambda \int_0^T K_n(t, s) V_n(s) ds + a_n(t), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} K_n(t, s) &= \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} K(\tau, s) d\tau, \quad K_n(0, s) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \\ a_n(t) &= e^{-\lambda_n t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau, u) d\tau. \end{aligned}$$

Решение интегрального уравнения (8) выражается формулой

$$V_n(t) = \lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t), \quad (9)$$

где

$$R_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

— резольвента ядра $K_n(t, s)$, и итерированные ядра $K_{n,i}(t, s)$ выражаются формулами

$$K_{n,i+1}(t, s) = \int_0^T K_n(t, \eta) K_{n,i}(\eta, s) d\eta, \quad K_{n,1}(t, s) = K_n(t, s)$$

для каждого $n = 1, 2, 3, \dots$

Используя оценки

$$|K_{n,i}(t, s)|^2 \leq \frac{(K_0 T)^{i-1}}{(2\lambda_n)^i} \int_0^T K^2(\tau, s) d\tau, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

для ряда Неймана (10) получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^{i-1} |K_{n,i}(t, s)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^{i-1} \sqrt{\int_0^T K^2(\tau, s) d\tau} \frac{1}{\sqrt{2\lambda_n}} \sum_{i=1}^{\infty} \left(|\lambda| \sqrt{\frac{K_0 T}{2\lambda_n}} \right)^{i-1}.$$

Следовательно, при выполнении условия

$$|\lambda| \sqrt{\frac{K_0 T}{2\lambda_n}} < 1$$

ряд Неймана (10) равномерно сходится к непрерывной функции $R(t, s, \lambda)$. Получаем оценку

$$|R_n(t, s, \lambda)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^{i-1} |K_{n,i}(t, s)| \leq \sqrt{\int_0^T K^2(\eta, s) d\eta} \frac{1}{\sqrt{2\lambda_n}} \frac{1}{1 - |\lambda| \sqrt{\frac{K_0 T}{2\lambda_n}}} \leq \frac{\sqrt{\int_0^T K^2(\eta, s) d\eta}}{\sqrt{2\lambda_n} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}}.$$

и

$$\int_0^T R_n^2(t, s, \lambda) ds \leq \int_0^T \frac{\int_0^T K^2(\eta, s) d\eta}{(\sqrt{2\lambda_n} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} ds = \frac{K_0}{(\sqrt{2\lambda_n} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2}. \quad (11)$$

Отметим, что ряд Неймана абсолютно сходится при значениях параметра λ , удовлетворяющих неравенству

$$|\lambda| < \frac{\sqrt{2\lambda_n}}{\sqrt{K_0 T}} \rightarrow \infty$$

для всех $n = 1, 2, 3, \dots$. Легко видеть, что радиус сходимости ряда Неймана увеличивается с ростом n , и он сходится для любых $n = 1, 2, 3, \dots$ только на интервале

$$|\lambda| < \frac{\sqrt{2\lambda_1}}{\sqrt{K_0 T}}. \quad (12)$$

Таким образом, формальное решение краевой задачи (1)–(4) имеет вид

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right) z_n(x). \quad (13)$$

Лемма 1. *Функция $V(t, x)$, определенная формулой (13), является элементом гильбертова пространства $H(Q_T)$.*

Доказательство. Непосредственным вычислением доказывается следующее неравенство, из которого вытекает утверждение леммы:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_Q V^2(t, x) dx dt &= \int_0^T \int_Q \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right) z_n(x) \right]^2 dx dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda^2 \int_0^T R_n^2(t, s, \lambda) ds \int_0^T a_n^2(s) ds + a_n^2(t) \right) dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda^2 \frac{K_0}{(\sqrt{2\lambda_n} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \int_0^T a_n^2(s) ds + a_n^2(t) \right) dt \leq \\ &\leq 2 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right)^2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(t) dt \leq \\ &\leq 4 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right)^2 \left\{ \|\psi(x)\|_{H(Q)}^2 + \frac{1}{2\lambda_1} \|f[t, x, u(t, x)]\|_{H_{Q_T}} \right\} < \infty, \end{aligned}$$

т.е. $V(t, x) \in H(Q_T)$. □

3. Задача синтеза оптимального управления и интегро-дифференциальное уравнение Беллмана—Егорова. Пусть управляемый процесс описывается краевой задачей (1)–(4).

Согласно условию монотонности (4), каждому управлению $u(t, x) \in H(Q_T)$ соответствует единственное решение $V(t, x) \in H(Q_T)$ краевой задачи, определяемое формулами (6) и (9) и удовлетворяющее интегральному тождеству (5).

Рассмотрим задачу поиска управления, которое вместе с соответствующим решением краевой задачи (1)–(4) минимизирует квадратичный интегральный функционал

$$J[u(t, x)] = \int_0^T \int_Q [V(t, x) - \xi(t, x)]^2 dx dt + \beta \int_0^T \int_Q p^2[t, x, u(t, x)] dx dt, \quad \beta > 0, \quad (14)$$

где $\xi(x, t) \in H(Q_T)$ и $p[t, x, u(t, x)] \in H(Q_T)$ — заданные функции и $p[t, x, u(t, x)]$ нелинейно зависит от функциональной переменной $u(t, x) \in H(Q_T)$ на множестве решений краевой задачи (1)–(4). Будем искать управление $u^0(t, x)$ в виде $u^0(t, x) = u[t, x, V^0(t, x)]$, т.е. как функционал состояния процесса управления. Такие задачи управления называются задачами синтеза оптимального распределенного управления.

Согласно схеме Беллмана функционал Беллмана для функционала (14) имеет вид

$$S(t, V(t, x)) = \min_{\substack{u(\tau, x) \in U, \\ t \leq \tau \leq T, \\ x \in Q}} \left\{ \int_0^T \int_Q [V(t, x) - \xi(t, x)]^2 dx dt + \beta \int_t^T \int_Q p^2(\tau, x, u(\tau, x)) dx dt \right\}, \quad (15)$$

где $V(t, x)$ — функция состояния $\xi(t, x)$ — известная функция, U — множество допустимых значений управления $u(t, x) \in Q_T$.

В основе метода решения задач синтеза лежит принцип оптимальности Беллмана. Согласно этому принципу имеет место соотношение

$$\begin{aligned} S[t, V(t, x)] &= \min_{\substack{u(\tau, x) \in U, \\ t \leq \tau \leq t+\Delta t, \\ x \in Q}} \left\{ \beta \int_t^{t+\Delta t} \int_Q p^2[\tau, x, u(\tau, x)] d\tau dx + \right. \\ &+ \min_{\substack{u(\tau, x) \in U, \\ t+\Delta t \leq \tau \leq T, \\ x \in Q}} \left(\beta \int_{t+\Delta t}^T \int_Q p^2[\tau, x, u(\tau, x)] dx dt + \int_0^T \int_Q [V(t, x) - \xi(t, x)]^2 dx dt \right) \Big\} = \\ &+ \min_{\substack{u(\tau, x) \in U, \\ x \in Q}} \left\{ \beta \int_T^{t+\Delta t} \int_Q p^2[\tau, x, u(\tau, x)] d\tau dx + S[t + \Delta t, V(t + \Delta t, x)] \right\} = \\ &+ \min_{\substack{u(\tau, x) \in U, \\ x \in Q}} \left\{ \beta \int_T^{t+\Delta t} \int_Q p^2[\tau, x, u(\tau, x)] d\tau dx + S[t + \Delta t, V(t, x) + \Delta V(t, x)] \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

где $V(t + \Delta t, x) = V(t, x) + \Delta V(t, x)$. Предположим, что величина $S[t, V(t, x)]$ дифференцируема по t как функция и дифференцируема по $V(t, x)$ как функционал. Тогда выполняется соотношение

$$\begin{aligned} S[t + \Delta t, V(t, x) + \Delta V(t, x)] &= S[t, V(t, x)] + \frac{\partial S[t, V(t, x)]}{\partial t} \Delta t + \\ &+ dS[t, V(t, x); \Delta V(t, x)] + o(\Delta t) + r[t, V(t, x); \Delta V(t, x)], \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0 \text{ при } \Delta t \rightarrow 0, \quad \frac{r[t, V(t, x); \Delta V(t, x)]}{\|\Delta V(t, x)\|_{H(Q_T)}} \rightarrow 0 \text{ при } \|\Delta V(t, x)\|_{H(Q_T)} \rightarrow 0$$

и $dS[t, V(t, x); \Delta V(t, x)]$ — дифференциал Фреше функционала $S[t, V(t, x)]$, вычисленный в точке (t, V) .

Подставляя (17) в (16), получим

$$\begin{aligned} S[t, V(t, x)] = & \min_{\substack{u(\tau, x) \in U, \\ t \leq \tau \leq t + \Delta t, \\ x \in Q}} \left\{ \beta \int_t^{t+\Delta t} \int_Q p^2[\tau, x, u(\tau, x)] d\tau dx + S[t, V(t, x)] + \right. \\ & \left. + dS[t, V(t, x); \Delta V(t, x)B] + \frac{\partial S[t, V(t, x)]}{\partial t} \Delta t + o(\Delta t) + r[t, V(t, x); \Delta V(t, x)] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку дифференциал Фреше по $\Delta V(t, x) \in H(Q_T)$, $(t, x) \in Q_T$, является линейным функционалом, получаем равенство

$$dS[t, V; \Delta V] = \int_Q m(t, x) \Delta V(t, x) dx, \quad (19)$$

где градиент $m(t, x)$ функционала $S[t, V]$ принадлежит пространству $H(Q_T)$ для почти всех $(t, x) \in Q_T$. Принимая во внимание (19), перепишем (18) в следующем виде:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial S[t, V]}{\partial t} \Delta t = & \min_{u \in U} \left\{ \beta \int_Q \int_t^{t+\Delta t} p^2(\tau, u(\tau)) d\tau dx + \int_Q m(t, x) \Delta V(t, x) dx + o(\Delta t) + \delta[t, W, \Delta W] \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Легко проверить следующее тождество:

$$\begin{aligned} \int_Q m(t, x) \Delta V(t, x) dx &= \int_Q m(t, x) [V(t, x)]_t^{t+\Delta t} dx = \\ &= \int_Q [m(t, x) V(t, x)]_t^{t+\Delta t} dx - \int_Q V(t + \Delta t, x) [m(t, x)]_t^{t+\Delta t} dx = \\ &= \int_Q [m(t, x) V(t, x)]_t^{t+\Delta t} dx - \int_Q V(t + \Delta t, x) \Delta m(t, x) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Согласно (21), перепишем соотношение (20) в виде

$$\begin{aligned} - \frac{\partial S[t, W]}{\partial t} \Delta t = & \min_{\substack{u(\tau, x) \in U, \\ t \leq \tau \leq t + \Delta t, \\ x \in Q}} \left\{ \beta \int_Q \int_t^{t+\Delta t} p^2(\tau, u(\tau, x)) d\tau + \right. \\ & \left. + \int_Q [m(t, x) V(t, x)]_t^{t+\Delta t} dx - \int_Q V(t + \Delta t, x) \Delta m(t, x) dx + o(\Delta t) + r[t, V, \Delta V] \right\}. \end{aligned}$$

Предположим, что $m(t, x) \in H_1(Q_T)$. Полагая $\Phi(t, x) = m(t, x)$, $t_1 = t$ и $t_2 = t + \Delta t$ в интегральных тождествах (5) и (21), получим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S[t, V]}{\partial t} \Delta t = & \min_{\substack{u(\tau, x) \in U, \\ t \leq \tau \leq t + \Delta t, \\ x \in Q}} \left\{ \frac{\beta}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_Q p^2(\tau, u(\tau)) dx d\tau + \right. \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_Q \left[V(t, x) m_t(t, x) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_j} \frac{\partial m(t, x)}{\partial x_i} - c(x) V(t, x) m(t, x) \right] dx dt - \\ & - \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\gamma} a(x) V(t, x) m(t, x) dx dt + \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_Q \left(\lambda \int_0^T K(t, \tau) V(\tau, x) d\tau + f[t, x, u(t, x)] \right) m(t, x) dx dt + \\ & \left. + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} + \frac{r[t, V(t, x); \Delta V(t, x)]}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta t} \int_Q V(t + \Delta t, x) \Delta m(t, x) dx \right\}. \end{aligned}$$

Имеем следующие предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} \int_Q p^2(\tau, u(\tau, x)) dx d\tau &= \int_Q p^2[t, x, u(t, x)] dx; \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \int_Q \left[V(t, x) m_t(t, x) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_j} \frac{\partial m(t, x)}{\partial x_i} - c(x) V(t, x) m(t, x) \right] dx - \right. \\ & \left. - \int_{\gamma} a(x) V(t, x) m(t, x) dx \right\} dt = \\ &= \int_Q \left[V(t, x) m_t(t, x) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) V_{x_j}(t, x) m_{x_i}(t, x) - c(x) V(t, x) m(t, x) \right] dx - \\ & \quad - \int_{\gamma} a(x) V(t, x) m(t, x) dx; \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_Q \left(\lambda \int_0^T K(t, \tau) V(\tau, x) d\tau + f[t, x, u(t, x)] \right) m(t, x) dx dt &= \\ &= \int_Q \left(\lambda \int_0^T K(t, \tau) V(\tau, x) d\tau + f[t, x, u(t, x)] \right) m(t, x) dx; \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_Q V(t + \Delta t, x) \Delta m(t, x) dx = \int_Q V(t, x) m_t(t, x) dx,$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r[t, V(t, x); \Delta V(t, x)]}{\Delta t} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S[t, V(t, x)]}{\partial t} = & \min_{\substack{u(\tau, x) \in U, \\ t \leq \tau \leq T, \\ x \in Q}} \left\{ \beta \int_Q p^2[t, x, u(t, x)] dx - \right. \\ & - \int_Q \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) V_{x_j}(t, x) m_{x_i}(t, x) + c(x) V(t, x) m(t, x) \right] dx - \int_{\gamma} a(x) V(t, x) m(t, x) dx + \\ & \left. + \int_Q \left(\lambda \int_0^T K(t, \tau) V(\tau, x) d\tau + f[t, x, u(t, x)] \right) m(t, x) dx \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

В этом интегро-дифференциальном уравнении $S[t, V(t, x)]$ является неизвестным функционалом. Согласно (15), имеем дополнительное условие для функционала Беллмана:

$$S[T, V(T, x)] = \int_Q [V(T, x) - \xi(T, x)]^2 dx. \quad (23)$$

Задача поиска решения уравнения (22), удовлетворяющего условию (23), называется задачей Коши.

4. Задача Коши. Для исследования разрешимости задачи Коши в зависимости от свойств функций $p[t, x, u(t, x)]$ и $f[t, x, u(t, x)]$ и от множества U допустимых значений управления $u(t, x)$, $(t, x) \in Q_T$, можно использовать различные методы решения экстремальных задач. Например, пусть U — открытое множество, а функции $p[t, x, u(t, x)]$ и $f[t, x, u(t, x)]$ имеют частные производные первого и второго порядка по функциональной переменной $u(t, x)$ почти всюду.

При помощи классического метода решения экстремальных задач находим управление, которое может быть оптимальным управлением $u^0(t, x)$, из следующих соотношений:

$$2\beta p[t, x, u(t, x)] p_u[t, x, u(t, x)] + m(t, x) f_u[t, x, u(t, x)] = 0, \quad (24)$$

$$2\beta \left(p[t, x, u(t, x)] p_u[t, x, u(t, x)] \right)_u + m(t, x) f_{uu}[t, x, u(t, x)] > 0 \quad (\min) \quad (25)$$

Согласно (24), приведем второе соотношение к виду

$$f_u[t, x, u(t, x)] \left(\frac{p[t, x, u(t, x)] p_u[t, x, u(t, x)]}{f_u[t, x, u(t, x)]} \right)_u > 0 \quad (\min). \quad (26)$$

Отметим, что условие (25) ограничивает класс функций $\{f[t, x, u(t, x)]\}$ для заданной функции $p[t, x, u(t, x)]$, т.е. существенно влияет на разрешимость оптимизационной задачи. С другой стороны, это условие позволяет, согласно теореме о неявной функции (см. [7, 12]), найти оптимальное управление $u^0(t, x)$ из (24), т.е. существует такая однозначная функция $\psi(\cdot)$, что

$$u^0(t, x) = \psi[t, x, m(t, x), \beta]. \quad (27)$$

По этой формуле осуществляется синтез оптимального управления, так как $m(t, x)$ зависят от состояния управляющего процесса $V(t, x)$.

Отметим, что исследование задачи Коши — достаточно сложная задача. Сложность исследования состоит не только в выводе интегро-дифференциального уравнения с частными производными и интегральным оператором Фредгольма, но и в построении его решения, поскольку градиент функционала Беллмана $m(t, x)$ определяется только после определения вида решения. Наличие интегрального оператора Фредгольма усугубляет эту проблему. Однако согласно структуре уравнения (22) его решение следует искать в виде

$$S[t, V(t, x)] = S_0[t, V(t, x)] + \lambda S_1[t, V(t, x)]. \quad (28)$$

В этом случае задача Коши распадается на следующие две задачи:

$$-\frac{\partial S_0[t, V(t, x)]}{\partial t} (=) \min_{\substack{u(\tau, x) \in U, \\ x \in Q}} \left\{ \beta \int_Q p^2[t, x, u(t, x)] dx + \int_Q m(t, x) f[t, x, u(t, x)] dx - \right. \\ \left. - \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) V_{x_j}(t, x) m_{x_i}(t, x) + c(x) V(t, x) m_2(t, x) \right) + \int_{\gamma} a(x) V(t, x) m(t, x) dx \right\}, \quad (29)$$

$$S_0[T, V(T, x)] = \int_Q [V(T, x) - \xi(T, x)]^2 dx \quad (30)$$

и

$$-\frac{\partial S_1[t, V(t, x)]}{\partial t} (=) \int_Q m(t, x) \int_0^T K(t, \tau) V(\tau, x) d\tau dx, \quad (31)$$

$$S_1[T, V(T, x)] = 0. \quad (32)$$

Символ $(=)$ означает, что равенство выполняется почти всюду в области Q_T , т.е. почти во всех точках $(t, x) \in Q_T$. Задачу (30)–(29) можно исследовать разными способами; решение задачи (31)–(32) можно выразить формулой

$$S_1[t, V(t, x)] = \int_t^T \int_Q m(\tau, x) \int_0^T K(\tau, \eta) V(\eta, x) d\eta dx,$$

и исследовать, если $m(t, x)$ известно. Обратим внимание, что при изучении задачи (30)–(29), используя свойство собственных функций $z_n(x)$, это уравнение можно привести к более простой форме. Пусть имеет место следующее разложение в ряд Фурье:

$$m(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(t) z_n(x).$$

Согласно (7), справедливо соотношение

$$\int_Q \left[\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) V_{x_k}(t, x) m_{x_i}(t, x) + c(x) V(t, x) m(t, x) \right] dx + \int_{\gamma} a(x) V(t, x) m(t, x) dx = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(t) \left[\int_Q \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) V_{x_k}(t, x) z_{n_{x_i}}(x) + c(x) V(t, x) z_n(x) \right) dx + \int_{\gamma} a(x) V(t, x) z_n(x) dx \right] = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(t) \int_Q \lambda_n V(t, x) z_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(t) \lambda_n V_n(t). \quad (33)$$

Введем функцию

$$D(\lambda, x, y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} z_i(x) \lambda_j z_j(y); \quad (34)$$

тогда имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n(t) \lambda_n V_n(t) = \int_Q \int_Q m(t, x) D(\lambda, x, y) V(t, y) dy dx. \quad (35)$$

Согласно (33)–(35), перепишем задачу (30) в виде

$$-\frac{\partial S_0[t, W]}{\partial t} = \min_{u \in U} \left\{ \beta \int_Q p^2[t, x, u(t, x)] dx + \int_Q m(t, x) dx f[t, x, u(t, x)] - \right. \\ \left. - \int_Q \int_Q m(t, x) D(\lambda, x, y) V(t, y) dy dx \right\},$$

$$S_0[T, V(T, x)] = \int_Q |V(T, x) - \xi(T, x)|^2 dx.$$

Формула (28) определяет структуру решения задач Коши и является естественной формой решения, обусловленной линейной независимостью системы функций $(1; \lambda)$.

5. Выводы. Как уже отмечалось, исследование проблемы синтеза управляемых систем с распределенными параметрами начало быстро развиваться после появления работы [4]. Однако, как было отмечено в [4], уравнение Беллмана может обеспечить только необходимые условия оптимальности, и описанный метод нельзя считать оправданным, поскольку дифференцируемость функционала Беллмана и принадлежность его градиента классу функций, имеющих обобщенные производные первого порядка, не исследуются. Поэтому процедуру получения оптимального управления следует рассматривать как эвристический прием, позволяющий выбрать управление, «подозрительное» на оптимальность. Оптимальное управление устанавливается тестированием.

В нашем исследовании проблема усугубляется наличием интегрального оператора. Тем не менее имеющиеся исследования, где решение задачи синтеза систем с распределенными параметрами задачи могло быть сведено к численным расчетам (см. [9, 14]), показывают, что исследование задачи синтеза управляемых процессов более сложной природы не безграничен. Фактически наше исследование показывает, что появляются новые проблемы, требующие дополнительных исследований. Например, применительно к функционалу Беллмана мы получили интегро-дифференциальное уравнение с частными производными определенного типа с дополнительным «начальным» условием и установили структуру решения этого уравнения, которая позволяет преобразовать уравнение в систему двух уравнений, одно из которых является независимым. Возникновение новых проблем и исследование их разрешимости — новые обстоятельства в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.
2. Владимирова В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1961. — 61. — С. 3–158.
3. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1984.
4. Егоров А. И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1965. — 29, № 6. — С. 1205–1260.

5. Егоров А. И. Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами// Мат. сб. — 1966. — 69 (111), № 3. — С. 371–421.
6. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978.
7. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.
8. Плотников В. И. Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1968. — 32, № 4. — С. 743–755.
9. Рахимов М. О. О синтезе оптимального управления упругими колебаниями/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Ашхабад, 1979.
10. Рахимов М. О. Применение методов динамического программирования и спектрального разложения к задачам оптимального управления системами с распределенными параметрами/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — М., 1989.
11. Суразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1977.
12. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — М.: Наука, 1947.
13. Abdylidaeva E., Kerimbekov A. The optimal vector control for the elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations// Proc. Int. Conf. on Noncommutative Analysis and Partial Differential Equations (London, April 11–15, 2016). — New York: Springer, 2019. — P. 14–30.
14. Bachoy G. The Bellman Method in Control Problems with Distributed Parameters. — Chişinău: Ştiinţa, 1974.
15. Bellman R. The theory of dynamic programming// Bull. Am. Math. Soc. — 1954. — 60, № 6. — P. 503–515.
16. Butkovsky A. G., Egorov A. I., and K. A. Lurie Optimal control of distributed systems// SIAM J. Control — 1968. — 6. — P. 437–476.
17. Kerimbekov A. Nonlinear Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters. — Bishkek: Ilim, 2003 (in Russian).
18. Kerimbekov A. On the solvability of a nonlinear optimal control problem for the thermal processes described by Fredholm integro-differential equations// Proc. 9th Int. ISAAC Congr. (Kraków, Poland, August 5–9, 2013). — Birkhäuser, 2015. — P. 803–822.
19. Kerimbekov A. On a class of solutions of the nonlinear integral Fredholm equation// Proc. 11th Int. ISAAC Congr. (Växjö, Sweden, August 14–18, 2017). — Birkhäuser, 2019. — P. 191–197.
20. Kerimbekov A. K., Abdylidaeva E. F. Optimal distributed control for the processes of oscillation described by Fredholm integro-differential equations// Eurasian Math. J. — 2015. — 6, № 2. — P. 18–40.
21. Kerimbekov A., Abdylidaeva E. On the solvability of a nonlinear tracking problem under boundary control for the elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations// IFIP Conf. Syst. Model. Optim. — 2016. — 494. — P. 312–321.
22. Kerimbekov A., Abdylidaeva E. F., Duyshenalieva U. E. Generalized solution of a boundary-value problem under point exposure of external forces// Int. J. Pure Appl. Math. — 2017. — 113, № 4. — P. 87–101.
23. Kerimbekov A., Abdylidaeva E., Duishenalieva U., Seidakmat Kyzy E. On solvability of optimization problem for elastic oscillations with multipoint sources of control// AIP Conf. Proc. — 2017. — 1880, № 1. — 060009.
24. Kerimbekov A., Tairova O. K. On the solvability of synthesis problem for optimal point control of oscillatory processes// IFAC PapersOnLine. — 2018. — 51, № 32. — P. 754–758.
25. Khurshudyan A. Z. On optimal boundary and distributed control of partial integro-differential equations// Arch. Control Sci. — 2014. — 24, № 1. — P. 5–25.
26. Komkov V. Optimal Control Theory For the Dmaping Of Vibrations Of Simple Elatic Systems. — Berlin: Springer-Verlag, 1972.
27. Richtmyer R. D. Principles of Advanced Mathematical Physics. — New York: Springer, 1965.
28. Sachs E. W. Efficient solution of a partial integro-differntial equation in finance// Appl. Numer. Math. — 2008. — 58. — P. 1687–1703.
29. Seidakmat Kyzy E., Kerimbekov A. On solvability of tracking problem under nonlinear boundary control// Proc. 11th Int. ISAAC Congr. (Växjö, Sweden, August 14–18, 2017). — Birkhäuser, 2019. — P. 207–218.
30. Thorwe J. Solving partial integro-differntial equations using Laplace transform method// Appl. Math. — 2012. — 2, № 3. — P. 101–104.

Керимбеков Акылбек

Киргизско-российский славянский университет им. Б. Н. Ельцина, Бишкек, Киргизия

E-mail: akl17@rambler.ru