Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ю. Леонтьев, Минимальные ветви решений нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 183, 113–119

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-183-113-119>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:48:01

МИНИМАЛЬНЫЕ ВЕТВИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2020 г. Р. Ю. ЛЕОНТЬЕВ

Аннотация. Рассматривается нелинейное уравнение $B(\lambda)x = R(x, \lambda) + b(\lambda)$, где $R(0, 0) = 0$, $b(0) = 0$, линейный оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, S — некоторое открытое множество, $0 \in \partial S$. Исследуется вопрос существования малого непрерывного решения максимального порядка малости $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. Приведен конструктивный способ построения этого решения.

Ключевые слова: нелинейный оператор, банахово пространство, операторное уравнение, минимальная ветвь.

MINIMAL BRANCHES OF SOLUTIONS OF NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS IN BANACH SPACES

© 2020 R. YU. LEONTYEV

ABSTRACT. We consider the nonlinear equation $B(\lambda)x = R(x, \lambda) + b(\lambda)$, where $R(0, 0) = 0$, $b(0) = 0$, the linear operator $B(\lambda)$ has a bounded inverse operator for $S \ni \lambda \rightarrow 0$, and S is an open set, $0 \in \partial S$. We examine the problem on the existence of a small continuous solution of the maximal order of smallness $x(\lambda) \rightarrow 0$ as $S \ni \lambda \rightarrow 0$. A constructive method way of constructing this solution is presented.

Keywords and phrases: nonlinear operator, Banach space, operator equation, minimal branch.

AMS Subject Classification: 47J99

Пусть X, Y — банаховы пространства, Λ — линейное нормированное пространство. Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$B(\lambda)x = R(x, \lambda) + b(\lambda), \quad (1)$$

где $B(\lambda)$ — замкнутый линейный оператор с плотной в банаховом пространстве X областью определения, не зависящей от параметра λ . Нелинейный оператор $R(x, \lambda)$ непрерывен по x и λ в окрестности точки $(0, 0)$, $R(0, 0) = 0$. Функция $b(\lambda)$ со значениями в Y непрерывна в нуле, $b(0) = 0$.

Предположим, что

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \quad \text{при } S \ni \lambda \rightarrow 0, \quad (2)$$

где $a(\lambda)$ — положительный функционал, непрерывный в окрестности нуля, $a(0) = 0$; $S \subset \Lambda$ — открытое множество, границе которого принадлежит точка $\lambda = 0$. Далее множество S будем называть *секториальной окрестностью нуля*.

Требуется построить малое решение $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ уравнения (1) максимального порядка малости, или «минимальную ветвь».

Впервые теорема о существовании и построении в нерегулярных случаях ветвей решений нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях были доказаны в 2004 г. в [5]. Ряд результатов о решениях максимального порядка малости изложен в [1–3].

Следует отметить, что оценки вида (2) встречаются в прикладных задачах. Приведем несколько примеров.

Лемма 1. Пусть $X = Y = H$, B_0 — самосопряженный неотрицательный оператор, B_1 — самосопряженный положительный оператор, т.е.

$$(B_0x, x) \geq 0, \quad (B_1x, x) \geq \gamma(x, x); \quad \forall x \in H.$$

Тогда

$$\|(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}\| = O\left(\frac{1}{\gamma a(\lambda)}\right).$$

Справедливость леммы 1 для компактных операторов следует из теоремы Гильберта—Шмидта о разложении по собственным векторам, а в общем случае — из теории линейных операторов.

Лемма 2. Если элементы $\{\varphi_i^{(k)}\}$, $k = \overline{1, p_i}$, $i = \overline{1, n}$, образуют полный B_1 -жорданов набор фредгольмова оператора B_0 и $p = \max_{i=1, n} p_i$, то в некоторой области $0 < a(\lambda) < \varepsilon$ существует

ограниченный обратный оператор $(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}$ и выполнена оценка

$$\|(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}\| = O\left(\frac{1}{(a(\lambda))^p}\right).$$

Лемма 3. Пусть нильпотентный оператор B удовлетворяет условию $B^n = 0$, а оператор C имеет ограниченный обратный оператор, перестановочный с оператором B , $0 < |a(\lambda)| < \varepsilon$. Тогда оператор $a(\lambda)C - B$ имеет ограниченный обратный оператор, для которого выполнена оценка

$$\|(a(\lambda)C - B)^{-1}\| = O\left(\left(\frac{1}{|a(\lambda)|}\right)^n\right).$$

Доказательство. Действительно, убедиться в этом можно, рассмотрев уравнение вида

$$(a(\lambda)C - B)x = f$$

или эквивалентное ему уравнение при $\lambda \in S$

$$x = a^{-1}(\lambda)C^{-1}Bx + a^{-1}(\lambda)C^{-1}f.$$

Далее, формально применяя метод последовательных приближений по формуле

$$x_n = a^{-1}(\lambda)C^{-1}Bx_{n-1} + a^{-1}(\lambda)C^{-1}f, \quad x_0 = 0,$$

на n -м шаге получим

$$x_n = a^{-n}(\lambda)C^{-n}B^{n-1}f + a^{-n+1}(\lambda)C^{-n+1}B^{n-2}f + \dots + a^{-2}(\lambda)C^{-2}Bf + a^{-1}(\lambda)C^{-1}f,$$

которое и будет искомым решением, убедиться в чем можно подстановкой данного выражения в изначальное уравнение. $\square$

Далее приведены теоремы, которые дают достаточные условия существования решения уравнения (1), а также описан способ построения этого решения.

Теорема 1. Пусть в секториальной окрестности нуля S для уравнения (1) выполнено условие (2), а также следующие условия:

- (1) существует такая непрерывная функция $\nu(\lambda) : S \rightarrow R^+$, $\nu(0) = 0$, что в шаре $\|x\| \leq r$ при $\lambda \in S$ выполнено неравенство

$$\|R(\nu(\lambda)x_1, \lambda) - R(\nu(\lambda)x_2, \lambda)\| \leq C \cdot \nu^l(\lambda) \cdot r \|x_1 - x_2\|,$$

где $l > 1$, $C > 0$ — постоянная;

- (2) имеет место оценка $\|b(\lambda)\| = o(a^{l/(l-1)}(\lambda))$.

Тогда в некоторой окрестности нуля $\|x\| \leq r_0 \leq r$ для любого $\lambda \in S_0 \subset S$ существует малое решение $x = x^*(\lambda)$ уравнения (1), которое является минимальной ветвью из всех малых решений уравнения (1). Это решение можно найти по формуле

$$x = a^{1/(l-1)}(\lambda)y,$$

где y является пределом последовательности

$$y_n = \left(\frac{1}{a(\lambda)} \right)^{1/(l-1)} \cdot B^{-1}(\lambda) \left[R(a^{1/(l-1)}(\lambda)y_{n-1}, \lambda) + b(\lambda) \right], \quad y_0 = 0.$$

Все остальные малые решения уравнения (1) имеют при $S \in \lambda \rightarrow 0$ порядок малости не выше, чем $a^{1/(l-1)}(\lambda)$.

Доказательство. Поскольку в области S оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный, то, используя замену $x = \nu(\lambda)y$, приведем уравнение (1) к эквивалентному виду

$$y = \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) [R(\nu(\lambda)y, \lambda) + b(\lambda)].$$

Обозначим оператор в правой части последнего выражения через $\Phi(y, \lambda)$. Тогда уравнение примет вид

$$y = \Phi(y, \lambda). \quad (3)$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы оператор $\Phi(y, \lambda)$ является сжатием.

Учитывая выполнение условия (1) теоремы, имеем

$$\|\Phi(y_1, \lambda) - \Phi(y_2, \lambda)\| \leq \|C \cdot B^{-1}(\lambda) \cdot \nu^{l-1}(\lambda)\| \cdot r \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Если выбрать функцию $\nu(\lambda)$ так, чтобы $\nu(\lambda) = O(a^{1/(l-1)}(\lambda))$, то будет иметь место неравенство

$$\|C \cdot B^{-1}(\lambda) \cdot \nu^{l-1}(\lambda)\| \leq C_1,$$

где $C_1 > 0$ — постоянная. Зафиксируем $0 < q < 1$ и выберем радиус $r_0 \leq r$ так, чтобы

$$r_0 = \min \left\{ \frac{q}{C_1}, r \right\}.$$

Получаем, что оператор $\Phi(y, \lambda)$ является сжатием в шаре $\|y\| \leq r_0$ при всех $\lambda \in S$ с коэффициентом сжатия q .

Далее убедимся, что значения оператора $\Phi(y, \lambda)$ не выходят из шаров радиуса r_0 для всех элементов y , удовлетворяющих условию $\|y\| \leq r_0$. Учитывая, что оператор $\Phi(y, \lambda)$ является сжатием, получаем

$$\|\Phi(y, \lambda)\| \leq \|\Phi(y, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| + \|\Phi(0, \lambda)\| \leq qr_0 + \left\| \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) b(\lambda) \right\|.$$

Так как

$$\nu(\lambda) = O(a^{1/(l-1)}(\lambda)), \quad \|B^{-1}(\lambda)\| = Ob(1/a(\lambda)),$$

то второе слагаемое в последнем выражении будет сколь угодно малой величиной при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, если $\|b(\lambda)\| = o(a^{l/(l-1)}(\lambda))$. Таким образом, если $\|b(\lambda)\| = o(a^{l/(l-1)}(\lambda))$, то существует такая секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$, что при всех $\lambda \in S_0$ и всех y , удовлетворяющих условию $\|y\| \leq r_0$ будет выполнено неравенство

$$\|\Phi(y, \lambda)\| \leq qr_0 + (1 - q)r_0 = r_0$$

Теорема доказана. □

Необходимо отметить, что в данной теореме не требуется условие существования производной Фреше оператора $R(x, \lambda)$, однако если такая производная существует и является непрерывной по x и λ в окрестности нуля, то получаем следующий результат:

Теорема 2. Пусть для уравнения (1) в секториальной окрестности нуля S имеет место оценка (2) и выполнены следующие условия:

- (1) существует непрерывная в нуле производная Фреше по первому аргументу нелинейного оператора $R(x, \lambda)$ и имеет место оценка

$$\|R_x(x, \lambda)\| = O(\|x\|^l) \quad \text{при } \|x\| \rightarrow 0, l > 0;$$

- (2) имеет место оценка

$$\|b(\lambda)\| = o(a^{\frac{1}{l-1}}(\lambda)).$$

Тогда в некоторой окрестности нуля $\|x\| \leq r_0 \leq r$ для всех $\lambda \in S_0 \subset S$ существует малое решение $x = x^*(\lambda)$ уравнения (1), которое является минимальной ветвью из всех малых решений. Это решение можно найти по формуле

$$x = a^{\frac{1}{l}}(\lambda)y,$$

где y является пределом последовательности

$$y_n = \left(\frac{1}{a(\lambda)}\right)^{1/l} \cdot B^{-1}(\lambda) \left[R(a^{\frac{1}{l}}(\lambda)y_{n-1}, \lambda) + b(\lambda) \right], \quad y_0 = 0.$$

Все остальные малые решения уравнения (1) имеют порядок не выше, чем $a^{1/l}(\lambda)$.

Доказательство. Аналогично тому, как это было сделано в теореме 1, приведем уравнение (1) к виду (3). Для этого воспользуемся обратимостью оператора $B^{-1}(\lambda)$ в области S и заменой $x = \nu(\lambda)y$, где параметр $\nu(\lambda)$ — непрерывный функционал λ , условия на который будут получены исходя из условий принципа сжимающих отображений. Применяя оценку нормы произведения, интегральную теорему Лагранжа и используя первое условие теоремы 2, получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \|\Phi(y_1, \lambda) - \Phi(y_2, \lambda)\| &= \left\| \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) \left[R(\nu(\lambda)y_1, \lambda) - R(\nu(\lambda)y_2, \lambda) \right] \right\| \leq \\ &\leq \left\| \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) \right\| \cdot \left\| \int_0^1 R_x(\nu(\lambda)(y_2 + \Theta(y_1 - y_2)), \lambda) d\Theta \cdot \nu(\lambda)(y_1 - y_2) \right\| \leq \\ &\leq \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \int_0^1 C |\nu(\lambda)|^l \|y_2 + \Theta(y_1 - y_2)\|^l d\Theta \cdot \|y_1 - y_2\| \leq \\ &\leq C \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot |\nu(\lambda)|^l \int_0^1 \left[\|y_1\| + \Theta(\|y_1\| + \|y_2\|) \right]^l d\Theta \|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

Здесь C — некоторая константа, которая неизбежно возникает в процессе оценки, но она не влияет на дальнейшие рассуждения. Выберем в качестве $\nu(\lambda)$ любое выражение, удовлетворяющее условию $\nu(\lambda) = O(a^{1/l}(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$. Кроме того, используем условие, что все оценки производятся в шаре $\|y\| \leq r$. Получим

$$\|\Phi(y_1, \lambda) - \Phi(y_2, \lambda)\| \leq C_1 \cdot r^l \int_0^1 [1 + 2\Theta]^l d\Theta \|y_1 - y_2\|.$$

Константа C_1 появилась после сокращения выражений $\|B^{-1}(\lambda)\|$ и $|\nu(\lambda)|^l$, которые после введения условия на $\nu(\lambda)$ в виде оценки, зависящей от $a(\lambda)$, стали иметь порядки $O(1/a(\lambda))$ и $O(a(\lambda))$ соответственно. После вычисления интеграла получаем

$$\|\Phi(y_1, \lambda) - \Phi(y_2, \lambda)\| \leq C_1 \cdot r^l \frac{1}{2(l+1)} \|y_1 - y_2\|.$$

Зафиксируем $0 < q < 1$ и выберем $r_0 = \min \{r, 2q(l+1)/(C_1 r^{l-1})\}$. Тогда оператор $\Phi(y, \lambda)$ является сжимающим в шаре $\|y\| \leq r_0$ при всех $\lambda \in S$.

Теперь необходимо проверить, что значения оператора $\Phi(y, \lambda)$ не выходят из шаров $\|y\| \leq r_0$. Но поскольку условие сжимаемости оператора $\Phi(y, \lambda)$ выполнено, а условие (2) теоремы 2 такое же, как и в теореме 1, то доказательство того, что $\|\Phi(y, \lambda)\| \leq r_0$ в некоторой секториальной окрестности нуля $S_0 \subseteq S$ будет таким же, как для теоремы 1. Поэтому опустим эту часть доказательства.

После того, как мы показали, что к уравнению (3) можно применять принцип сжимающих отображений, будем искать решение в виде предела последовательности $\{y_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, где $y_n = \Phi(y_{n-1}, \lambda)$, а в качестве начального приближения выберем $y_0 = 0$ или любой другой элемент из шара $\|y\| \leq r_0$. Тот факт, что предел последовательности существует, гарантируется принципом сжимающих отображений. Поэтому решение уравнения (3) обозначим через $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Но

тогда решение уравнения (1) будет иметь вид $x = a^{1/l}(\lambda)y$. Кроме указанного решения уравнения (1) в общем случае могут существовать и другие малые решения уравнения (1), поскольку уравнение (1) в силу оценки (2) не относится к регулярному случаю. Но из всех малых решений найденное нами решение будет решением максимального порядка малости. $\square$

Замечание 1. Приведенные выше примеры показывают, что теоремы 1, 2 позволяют строить решения минимального порядка малости нелинейных уравнений второго и первого рода.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \int_a^b K(x, s)u(t, s) ds = f(u(t, x), t, x, \lambda), \\ u(t, x)|_{t=0} = u(t, x)|_{t=1} = 0. \end{cases}$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{R}$; $t, x \in \mathbb{R}$; $u(t, x)$ — непрерывная, дважды непрерывно дифференцируемая по t функция, обращающаяся в нуль при $t = 0$ и $t = 1$; f — нелинейная непрерывная функция.

Введем обозначения:

$$Bu = \int_a^b K(x, s)u(t, s) ds, \quad Cu = \begin{cases} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2}, \\ u(t, x)|_{t=0} = u(t, x)|_{t=1} = 0. \end{cases}$$

Пусть ядро $K(x, s)$ оператора B удовлетворяет условию

$$\int_a^b K(x, z)K(z, t) dz = 0; \quad (4)$$

тогда оператор B является нильпотентным и удовлетворяет условию $B^2 = 0$. Примером оператора, удовлетворяющего условию (4), может служить, например, функция вида $K(x, s) = \cos x \cdot \sin s$ при $a = 0$, $b = \pi$.

Краевая задача

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = m(t, x), \\ u(t, x)|_{t=0} = u(t, x)|_{t=1} = 0 \end{cases}$$

имеет единственное непрерывное решение вида

$$u(t, x) = \int_0^1 G(t, s)m(s, x) ds,$$

где функция Грина имеет вид

$$G(t, x) = \begin{cases} t(s-1), & 0 \leq t \leq s, \\ (t-1)s, & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Следовательно, оператор C имеет ограниченный обратный оператор вида

$$C^{-1}u = \int_0^1 G(t, s)u(s, x) ds,$$

перестановочный с оператором B .

Согласно введенным выше обозначениям, исходное уравнение имеет вид

$$(\lambda C + B)u = f. \quad (5)$$

Из леммы 3 следует, что оператор $\lambda C + B$, стоящий в левой части данного уравнения, имеет ограниченный обратный, для которого выполнена оценка

$$\|(\lambda C + B)^{-1}\| = O(|\lambda|^{-2}).$$

Пусть функция f удовлетворяет всем условиям теоремы 2, а именно, пусть функция $f(u(t, x), t, x, \lambda)$ имеет непрерывную производную по первому аргументу, для которой выполняется условие

$$\|f_u(u(t, x), t, x, \lambda)\| = O(\|u(t, x)\|^l) \quad \text{при } \|u(t, x)\| \rightarrow 0, l > 0,$$

а также имеет место оценка

$$\|f(0, t, x, \lambda)\| = o(\lambda^{(l+1)/l}).$$

Тогда будут выполнены все условия теоремы 2, и в некотором шаре $\|u\| \leq r_0$ для любого λ из проколотой окрестности нуля S_0 существует малое решение данного уравнения, которое является минимальной ветвью из всех малых решений. Укажем формулу для поиска этого решения методом последовательных приближений. Для этого найдем в явном виде выражение для оператора $(\lambda C + B)^{-1}$, для чего воспользуемся формулой, полученной в лемме 3. Поскольку в нашем случае $n = 2$, то данная формула будет иметь вид

$$u = \lambda^{-1}C^{-1}f - \lambda^{-2}C^{-2}Bf. \quad (6)$$

Согласно конкретному виду операторов C^{-1} и B , имеем

$$\begin{aligned} C^{-2}u &= \int_0^1 G(t, s) \int_0^1 G(s, z)u(z, x) dz ds = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 G(t, s)G(s, z) ds \right) u(z, x) dz = \int_0^1 G_1(t, z)u(z, x) dz, \\ C^{-2}Bfu &= \int_0^1 G_1(t, z) \int_a^b K(x, s)f(u(z, s), z, s, \lambda) ds dz, \\ C^{-1}fu &= \int_0^1 G(t, s)f(u(s, x), s, x, \lambda) ds dz. \end{aligned}$$

Тогда, согласно формуле (6), исходное уравнение примет вид

$$u = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 G(t, s)f(u(s, x), s, x, \lambda) ds - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^1 G_1(t, z) \int_a^b K(x, s)f(u(z, s), z, s, \lambda) ds dz,$$

и по теореме 2 минимальную ветвь можно найти по формуле

$$u(t, x) = \lambda^{\frac{1}{l}}v(t, x),$$

где $v(t, x)$ является пределом последовательности:

$$v_n(t, x) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1+1/l} \int_0^1 G(t, s) f(\lambda^{1/l} v_{n-1}(s, x), s, x, \lambda) ds - \\ - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2+1/l} \int_0^1 G_1(t, z) \int_a^b K(x, s) f(\lambda^{1/l} v_{n-1}(z, s), z, s, \lambda) ds dz, \quad v_0 = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев Р. Ю. О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений// в кн.: Наука в вузах: Математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования. — М.: РУДН, 2009. — С. 276–278.
2. Леонтьев Р. Ю. О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений// Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. информ. — 2009. — № 9. — С. 77–83.
3. Леонтьев Р. Ю., Сидоров Н. А. Униформизация и последовательные приближения решений нелинейных уравнений с векторным параметром// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Мат. — 2011. — 4, № 3. — С. 116–123.
4. Леонтьев Р. Ю. О малых решениях нелинейных операторных уравнений с векторным параметром// Мат. XII Междунар. науч.-техн. конф. «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем». — Пенза: Изд-во ПГУ, 2018. — С. 80–83.
5. Сидоров Н. А. Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы// Нелин. гранич. задачи. — 2004. — № 14. — С. 161–164.

Леонтьев Роман Юрьевич
Иркутский государственный университет
E-mail: romanisu@yandex.ru