Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Сидоров, А. И. Дрегля, Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с необратимым оператором в главной части и неклассическими начальными условиями, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 183, 120–129

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-183-120-129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:45:12

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 183 (2020). С. 120–129
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-183-120-129

УДК 518.517

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С НЕОБРАТИМЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ И НЕКЛАССИЧЕСКИМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2020 г. Н. А. СИДОРОВ, А. И. ДРЕГЛЯ

Аннотация. Исследованы дифференциальные уравнения с неклассическими начальными условиями в случае необратимости оператора в главной части уравнения. Приведены необходимые и достаточные условия существования неограниченных решений с полюсом p -го порядка в точках, в которых оператор, стоящий в главной части дифференциального уравнения, не имеет обратного. На основе альтернативного метода Ляпунова—Шмидта и ряда Лорана предложен двухступенчатый способ построения коэффициентов разложения решения в окрестности полюса. Решены иллюстративные примеры. Приведен аппарат скелетных цепочек линейных операторов в банаховых пространствах и рассмотрены его приложения к постановке начальных условий у дифференциальных уравнений. Результаты развивают теорию дифференциальных уравнений с вырождениями.

Ключевые слова: фредгольмов оператор, ряд Лорана, разрушающееся решение, скелетная цепочка, начальная задача.

DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BANACH SPACES WITH AN IRREVERSIBLE OPERATOR IN THE PRINCIPAL PART AND NONCLASSICAL INITIAL CONDITIONS

© 2020 N. A. SIDOROV, A. I. DREGLEA

ABSTRACT. In this paper, we examine differential equations with nonclassical initial conditions and irreversible operators in their principal parts. We find necessary and sufficient conditions for the existence of unbounded solutions with a p th-order pole at points where the operator in the principal part of the differential equation is irreversible. Based on the alternative Lyapunov–Schmidt method and Laurent expansions, we propose a two-stage method for constructing expansion coefficients of the solution in a neighborhood of a pole. Illustrative examples are given. We develop the techniques of skeleton chains of linear operators in Banach spaces and discuss its applications to the statement of initial conditions for differential equations. The results obtained develop the theory of degenerate differential equations.

Keywords and phrases: Fredholm operator, Laurent series, collapsing solution, skeleton chain, initial-value problem.

AMS Subject Classification: 35R25, 47A50, 47N20, 34A12, 46L45

Работа выполнена при поддержке совместной программы Российского фонда фундаментальных исследований и Государственного фонда естественных наук Китая (проект № 19-58-53011) и Государственного фонда естественных наук Китая (проект № 6181101294).

1. Введение. Дифференциальное уравнение

$$B(t)\frac{\partial u}{\partial t} = A(t, u) \quad (1)$$

с необратимым оператором $B(t)$ привлекало внимание многих математиков. Уравнение (1), относящееся к уравнениям соболевского типа (см. [2]), в последнее время нашло много новых приложений в современной математической физике, математическом моделировании в технике, энергетике и экономике. Интересные общие результаты получены в случае необратимого стационарного оператора $B : D \subset X \rightarrow Y$, где X, Y — банаховы пространства. В [1, 4–15, 17] в близких задачах использовался широкий спектр методов теории дифференциально-операторных уравнений, функционального анализа, асимптотических методов. Были доказаны теоремы существования, конвергентности и устойчивости решений, разработаны приближенные методы решения начально-краевых задач, в том числе в окрестности точек ветвления решений. В линейном случае для некоторых классов предложена аналитическая методика построения точных решений. Тем не менее в настоящее время нерешенной проблемой остается задача конструктивного описания структуры решения в окрестности точек t_0 , где нестационарный оператор $B(t)$ не имеет обратного. Результаты численных экспериментов в окрестностях таких точек t_0 часто оказываются неустойчивыми.

В связи с этим обратим внимание на ограниченное значение в приложениях уравнения $B\frac{\partial u}{\partial t} = A(t, u)$ с необратимым оператором B с условием Коши $u(t_0) = u_0$, так как условия Коши требуют выполнения включения априорной информации $A(t_0, u_0)$ в область значений оператора B . Особенно сложным является анализ аналитических структур разрушающихся решений. Поэтому разработка методов асимптотического анализа в окрестностях особых точек оператора $B(t)$ и постановка корректных начальных задач в их окрестностях важна в теоретическом и прикладном плане. Перспективным подходом здесь является сочетание модификации тонких подходов аналитической теории дифференциальных уравнений (использование разложений типа Фукса—Фробениуса, Пьюзе—Брюно) с методами спектральной теории линейных операторов, функциональными и групповыми методами.

Цель данной заметки — дать необходимые и достаточные аналитические условия существования разрушающихся и ограниченных решений в окрестности точек t_0 , в которых оператор $B(t_0)$ не имеет обратного и указать асимптотику решений с неклассическими начальными условиями.

Работа имеет следующую структуру. В п. 2 проблема построения неограниченного решения поставлена как специальная предельная начальная задача в определенном классе функций. В п. 3 приведены необходимые условия выполнения начального условия (3) поставленной задачи. В п. 4 доказана теорема существования единственного решения начальной задачи и приведены примеры. В п. 5 приведены сведения о скелетных цепочках линейных операторов, поставлен и решен на этой основе ряд неклассических начальных задач для линейных вырожденных дифференциальных уравнений.

2. Постановка начальной задачи. Рассмотрим линейное уравнение

$$B(t)\frac{\partial u}{\partial t} = A(t)u + f(t) \quad (2)$$

с начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow t_0} B(t)u(t) = y_0, \quad (3)$$

обобщающим начальное условие Коши $u(t_0) = y_0$. Предполагаем, что фредгольмов оператор $u(t_0)$ не имеет обратного, элемент y_0 принадлежит области значения оператора $B(t_0)$.

Условие (3) естественно назвать предельным начальным условием. Требуется получить условие существования неограниченного решения задачи (2)–(3). Не ограничивая общности, далее будем считать, что $t_0 = 0$.

Пусть выполнены следующие условия:

I. $B(t) = B_0 + B_1 t + \dots$, $A(t) = A_0 + A_1 t + \dots$, $f(t) = f_0 + f_1 t + \dots$ при $|t| < \rho$, $B_0 : D \subset X \rightarrow Y$ — фредгольмов оператор, $\bar{D} = X$, $B_1, B_2, \dots$, $A_0, A_1, \dots$ — линейные ограниченные операторы из X в Y , где X, Y — банаховы пространства, f_i — элементы из Y .

Искомое решение $u(t)$ будем искать в классе X_p функций, определенных при $0 < |t| < \rho$ со значениями в пространстве X , с полюсом p -го порядка:

$$u(t) = \frac{u_{-p}}{t^p} + \dots + \frac{u_{-1}}{t} + u_0 + u_1 t + \dots \quad (4)$$

Класс X_0 отвечает случаю, когда условие (3) вырождается в условие $B(0)u(0) = y_0$, использованное ранее в ряде работ.

3. Необходимое условие разрешимости задачи (2)–(3) в классе X_p при $p \geq 1$. Введем векторы $w = (u_{-p}, u_{-p+1}, \dots, u_{-1}, u_0)^T$, $\beta = (0, \dots, 0, y_0)^T$ и блочный оператор размерности $(p+1) \times (p+1)$:

$$\Phi_p = \begin{bmatrix} B_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_1 & B_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_p & B_{p-1} & \dots & B_1 & B_0 \end{bmatrix}.$$

Лемма 1. Для того чтобы задача (2)–(3) могла иметь решение в классе X_p , $p \in \mathbb{N}$, необходимо, чтобы система

$$\Phi_p w = \beta \quad (5)$$

была разрешима.

Доказательство очевидно, так как подстановка ряда (4) в начальное условие (3) и применение метода неопределенных коэффициентов приведет к системе (5).

Введем следующее условие:

II. $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ — базис в $N(B_0)$, $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ — базис в $N(B_0^*)$, $B_i \phi = 0$, $i = \overline{1, p}$, для всех $\phi \in N(B_0)$,

$$\langle \psi_i, \phi_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}, \quad \langle \psi_i, z_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}, \quad \langle \psi_i, y_0 \rangle = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Лемма 2. Если выполняется условие II, то совокупность элементов

$$\begin{cases} u_k = (c_k, \phi), & k = -p, -p+1, \dots, -1, \\ u_0 = (c_0, \phi) + \left(B_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1} y_0, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$(c_k, \phi) = \sum_{i=1}^n c_{k_i} \phi_i$$

— общее решение системы (5), c_{k_i} — произвольные постоянные. Более того, при этом соответствующее разложение (4) удовлетворяет начальному условию (3) при любых c_{k_i} и любых $u_1, u_2, \dots$.

4. Достаточные условия существования единственного решения задачи (2), (3) в классе X_p при $p \geq 1$. Предположим, что выполнены условия I, II, а коэффициенты $u_{-p}, \dots, u_{-1}, u_0$ заданы формулами (6). Кроме того, пусть выполнены следующие условия:

III. $A_i \phi = 0$, $i = \overline{0, p-1}$, для всех $\phi \in N(B_0)$.

Подставим разложение (4) в уравнение (2) и применим для вычисления коэффициентов $u_1, u_2, \dots$ метод неопределенных коэффициентов. В результате придем к рекуррентной последовательности уравнений:

$$B_0 u_1 = (pB_{p+1} + A_p)u_{-p} + f_0 \triangleq L_1(c_{-p}) \quad (7)$$

$$mB_0u_m = ((p+1-m)B_{p+1} + A_p)u_{m-p-1} - \sum_{i+l=m} iB_lu_i + \\ + \sum_{i+l=m-1} A_lu_i + f_{m-1} \triangleq L_m(c_{m-p-1}), \quad m = 2, 3, \dots \quad (8)$$

Введем проектор P и обратимый оператор $\hat{B}_0$:

$$P = \sum_{j=1}^n \langle \cdot, \gamma_j \rangle \phi_j, \quad \hat{B}_0 = B_0 + \sum_{j=1}^n \langle \cdot, \gamma_j \rangle z_j.$$

С помощью проектора P коэффициенты u_m разложения (4) можно представить в виде

$$u_m = Pu_m + (I - P)u_m, \quad m = -p, -p+1, \dots,$$

или в более информативных для нашей цели обозначениях $u_m = (c_m, \phi) + \hat{u}_m$, где $c_m \in \mathbb{R}^n$, $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)^T$.

Векторы c_m будем определять последовательно из условий разрешимости линейных уравнений (7), (8):

$$\langle \phi_i, L_m(c_{m-p-1}) \rangle = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Из леммы 2 и уравнений (7), (8) следует, что проекции $\hat{u}_m$ определяются по формулам

$$\hat{u}_m = \begin{cases} 0 & \text{при } m = -p, -p+1, \dots, -1, \\ \hat{B}_0^{-1}y_0 & \text{при } m = 0, \text{ если } \langle \psi_i, y_0 \rangle = 0, i = \overline{1, n}, \\ \frac{1}{j}\hat{B}_0^{-1}L_m(C_{m-p-1}) & \text{при } m = 1, 2, \end{cases}$$

где C_{m-p-1} удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (9).

Действительно, условия ортогональности (9) являются условиями разрешимости уравнений (7), (8) и позволяют построить системы уравнений для вычисления $c_{-p}, c_{-p+1}, \dots$. Элемент y_0 в начальном условии принадлежит области значений оператора B_0 .

Чтобы решить систему (9), введем пучок квадратных матриц M_m размерности $n \times n$ по формуле

$$M_m = D + (p+1-m)\bar{B}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$D \triangleq [\langle \psi_i, A_p \phi_j \rangle]_{i,j=\overline{1,n}}, \quad \bar{B} \triangleq [\langle \psi_i, B_{p+1} \phi_j \rangle]_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Тогда условие (9) можно записать в виде последовательности СЛАУ:

$$M_m C_{-p+m-1} + \beta_{-p+m-1} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где вектор $\beta_{m-p-1} \in \mathbb{R}^n$ зависит при каждом m от уже вычисленных величин в проекциях коэффициентов ряда (4).

С целью единственности определения коэффициентов проекций Pu_m (решений системы (10)) потребуем выполнения условия

IV $\det M_m \neq 0$ при $m \in \mathbb{N}$.

Замечание 1. Если $\det \bar{B} \neq 0$ и $\det M_m \neq 0$ при $m = 1, 2, \dots, N$, где $N = \max\{p+2, \|\bar{B}^{-1}D\|\}$, то условие IV выполнится при всех m в силу теоремы об обратном операторе.

Из изложенного вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть B_0 — фредгольмов оператор и выполнены условия I–IV. Тогда коэффициенты разложения Лорана (4) решения начальной задачи (2), (3) определяются однозначно. А именно, коэффициенты C_j проекцией Pu_j , $j = -p, -p+1$ определяются из регулярных СЛАУ (10). Проекции $(I - P)u_j$ вычисляются по формуле

$$(I - p)u_j = \begin{cases} 0 & \text{при } j = -p, -p+1, \dots, -1, \\ \hat{B}_0^{-1}y_0 & \text{при } j = 0, \\ \frac{1}{j}\hat{B}_0^{-1}L_j(C_{-p+j-1}^*) & \text{при } j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Используя метод мажорант, можно в аналитическом случае оценить радиус сходимости правильной части ряда Лорана (4).

При достаточной гладкости входных данных и обратимости оператора $B(t)$ в проколотой окрестности $0 < |t| < p$ можно доказать и в неаналитическом случае аналог теоремы 1.

Замечание 2. Порядок полюса решения начальной задачи (2)–(3) зависит от функции $f(t)$. Если $\langle \psi, f(0) \rangle = 0$ при всех $\psi \in N(B(0))$, то $u_{-p} = 0$. В частности, в условиях теоремы при $p = 1$ точка $t = 0$ станет устранимой особой точкой. Поэтому множество точек t_0 , в которых оператор $B(t)$ не имеет ограниченного обратного можно классифицировать как множество квазиподвижных особых точек начальной задачи (2)–(3).

Пример 1. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 \right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \int_0^\pi B(x, s, t) \frac{\partial u(s, t)}{\partial t} ds = \int_0^\pi A(x, s, t) u(s, t) ds + f(x, t) \quad (11)$$

с граничными условиями

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0 \quad (12)$$

и начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t) + \int_0^\pi B(x, s, t) u(s, t) ds \right) = y_0(x). \quad (13)$$

Пусть

$$\int_0^\pi y_0(x) \sin x dx = 0$$

и при $|t| < \rho$ справедливы разложения

$$B(x, s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i(x, s) t^i, \quad A(x, s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(x, s) t^i, \quad f(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) t^i$$

где $B_i(x, s)$, $A_i(x, s)$, $f_i(x)$ — непрерывные функции.

В этом примере $X = Y = C_{[0, \pi]}$, оператор $B_0 = \partial^2 / \partial x^2 + 1$ с условиями (2) является фредгольмовым, $\phi(x) = \psi(x) = \sin x$. Пусть при этом

$$\begin{aligned} \int_0^\pi B_i(x, s) \sin s ds &= 0, \quad i = \overline{1, p}, & \int_0^\pi A_i(x, s) \sin s ds &= 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \int_0^\pi \int_0^\pi B_{p+1}(x, s) \sin x \sin s dx ds &= \beta \neq 0, & \int_0^\pi \int_0^\pi A_p(x, s) \sin x \sin s dx ds &= d \neq 0. \end{aligned}$$

Следуя условию IV, введем алгебраическое уравнение $(p+1-m)\beta + d = 0$ относительно m . Если ему не удовлетворяет натуральное m , то все условия теоремы 1 выполняются, а задача (11)–(3) имеет решение вида (4) с полюсом в точке $t = 0$ не выше p -го порядка.

Если

$$\int_0^\pi f(x, 0) \sin x dx \neq 0,$$

то $t = 0$ будет полюсом p -го порядка искомого решения, т.е.

$$u(x, t) \sim \frac{\sin x}{t^p} c$$

в проколотовой окрестности $0 < |t| < p$ при

$$c = -(p\beta + d)^{-1} \int_0^\pi f(x, 0) \sin x \, dx$$

Следующий пример демонстрирует, что разные компоненты искомого вектора u могут иметь полюсы разных порядков.

Пример 2. Рассмотрим систему вида (2), состоящую из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, при

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1+t+2t^2 & 3t^2 \\ t+4t^2 & 5t^2 \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} 1+t & 0 \\ t+2t & t \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Здесь $X = Y = \mathbb{R}^2$, $\phi = \psi = [0, 1]^T$. Введем начальное условие

$$\lim_{t \rightarrow 0} B(t)u(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, вектор $[-2, 0]^T$ лежит в области значений матрицы B_0 . В этом примере

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1\phi = A_0\phi = 0, \quad (B_2\phi, \phi) = 5, \quad (A_1\phi, \phi) = 1.$$

В представлении (4) искомого решения надо положить $p = 1$. Так как $1 + (2-m)5 \neq 0$ при $m \in \mathbb{N}$, то все условия теоремы 1 выполнены, и решение можно строить в виде (4) при $p = 1$. Проводя вычисления согласно алгоритму, указанному в теореме, получим искомое решение:

$$u_1(t) \sim 2 + t + t^2 + \frac{t^3}{12} + \frac{15}{24}t^4 + \dots, \quad u_2(t) \sim -\frac{2}{3t} - 4 - \frac{3}{4}t - \frac{25}{36}t^2 + \dots,$$

в котором компонента $u_2(t)$ имеет полюс 1-го порядка.

Изложенным способом можно строить разрушающиеся решения нелинейных уравнений

$$B(t) \frac{du}{dt} = A(t)u + F(u, t),$$

где $\|F(u, t)\| = O(1)$ при всех $u \in X_p$ и $t \in (-p, p)$, с начальным условием (3). Начальное условие (3) является обобщением условий Шоултера–Сидорова (см. [1, 21]) и позволяет строить разрушающиеся решения в моделях типа Соболева, используя двухступенчатые итерационные процедуры, развитые в [1, 4, 4, 6–9, 11–17, 20] и данной статье.

5. Скелетные цепочки линейных операторов и их применение при решении неклассических начальных задач. Пусть $B \in \mathcal{L}(E \rightarrow E)$, причем $B = A_1 A_2$, где $A_2 \in \mathcal{L}(E \rightarrow E_1)$, $A_1 \in \mathcal{L}(E_1 \rightarrow E)$, E_1, E — линейные нормированные пространства. Представление $B = A_1 A_2$ назовем *скелетным разложением* оператора B . Введем линейный оператор $B_1 = A_2 A_1$. Очевидно, $B_1 \in \mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_1)$. Если оператор B_1 имеет ограниченный обратный или он оказывается нулевым оператором из E_1 в E_1 , то скажем, что B порождает *скелетную цепочку* $\{B_1\}$ длины 1. При этом оператор B_1 назовем *скелетно-присоединенным оператором* к оператору B . Эту цепочку назовем вырожденной, если $B_1 = 0$, и невырожденной, если B_1 — обратимый оператор. Если B_1 окажется необратимым ненулевым оператором, то будем аналогично допускать для него выполнение скелетного разложения $B_1 = A_3 A_4$, где $A_4 \in \mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_2)$, $A_3 \in \mathcal{L}(E_2 \rightarrow E_1)$, E_2 — новое линейное нормированное пространство. Очевидно, что при этом $A_2 A_1 = A_3 A_4$ и можно ввести еще оператор $B_2 = A_4 A_3 \in \mathcal{L}(E_2 \rightarrow E_2)$. Если окажется, что B_2 имеет ограниченный обратный или $B_2 = 0$, то скажем, что оператор B имеет скелетную цепочку $\{B_1, B_2\}$ длины 2. Цепочка $\{B_1, B_2\}$ вырожденная, если $B_2 = 0$, и невырожденная если B_2 — обратимый оператор. Возможен и третий вариант, когда B_2 — необратимый ненулевой оператор. В этом случае длина цепочки будет больше 2, и процесс ее построения должен быть продолжен.

Действительно, этот процесс можно продолжить для ряда классов линейных операторов, вводя линейные нормированные пространства E_i , $i = 1, \dots, p$, и строя ограниченные операторы $A_{2i} \in \mathcal{L}(E_{i-1} \rightarrow E_i)$, $A_{2i-1} \in \mathcal{L}(E_i \rightarrow E_{i-1})$, удовлетворяющие равенствам

$$A_{2i}A_{2i-1} = A_{2i+1}A_{2i+2}, \quad i = 1, 2, \dots, p-1. \quad (14)$$

В соответствии с (14) задается последовательность линейных операторов $\{B_1, \dots, B_p\}$ формулами

$$B_i = A_{2i}A_{2i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (15)$$

Очевидно, $B_i \in \mathcal{L}(E_i \rightarrow E_i)$. Здесь предполагается, что последний оператор B_p или имеет ограниченный обратный, или B_p — нулевой оператор из E_p в E_p . Тогда соответственно этому процессу построения операторов B_i удобно ввести такое определение.

Определение 1. Пусть $B = A_1A_2$ и операторы $\{A_i\}_{i=1}^{2p}$ удовлетворяют равенствам (14). Пусть при этом операторы $\{B_1, \dots, B_p\}$ определяются формулами (15), причем ненулевые операторы $\{B_1, \dots, B_{p-1}\}$ необратимы, а оператор B_p имеет ограниченный обратный или является нулевым оператором из E_p в E_p . Тогда будем говорить, что оператор B порождает скелетную цепочку $\{B_1, \dots, B_p\}$ линейных операторов длины p , невырожденную, если $B_p \neq 0$ обратим, и вырожденную, если $B_p = 0$. Операторы $\{B_1, \dots, B_p\}$ назовем скелетно присоединенными к оператору B .

Приведем примеры наиболее важных для приложений линейных операторов, порождающих скелетные цепочки конечной длины.

Пример 3. Пусть $E = \mathbb{R}^m$. Очевидно, вырожденная квадратная матрица $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ имеет скелетную цепочку, состоящую из конечного числа вырожденных квадратных матриц понижающихся размерностей. При этом последняя матрица цепочки всегда окажется невырожденной или нулевой.

Пример 4. Пусть E — бесконечномерное нормированное пространство. Конечномерный оператор

$$B = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i,$$

где $\{z_i\} \in E$, $\gamma_i \in E^*$, подобно примеру 3, имеет скелетную цепочку конечной длины, состоящую из матриц $\{B_1, \dots, B_p\}$ понижающихся размерностей. При этом $B_1 = \|\langle z_i, \gamma_j \rangle\|_{i,j=1}^n$ — первый скелетно присоединенный элемент цепочки.

В примере 4, согласно определению 1, длина цепочки $p = 1$, если $\det [\langle z_i, \gamma_j \rangle]_{i,j=1}^n \neq 0$, или $\langle z_i, \gamma_j \rangle = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. В общем случае, как и в примере 3, цепочка состоит из конечного числа матриц понижающихся размерностей.

На основании формул (14), (15) и определения 1 сформулируем следующий результат.

Лемма 3. Если оператор B имеет скелетную цепочку длины p , то для его степеней B^n , $n = 2, 3, \dots, p+1$, справедливы представления

$$B^n = A_1A_3 \dots A_{2n-1}B_{n-1}A_{2n-2}A_{2n-4} \dots A_2, \quad (16)$$

где $B_1, B_2, \dots, B_p$ — элементы скелетной цепочки оператора B .

Следствие 1. Если оператор B имеет вырожденную скелетную цепочку длины p , то B — нильпотентный оператор индекса $p+1$.

Для доказательства следствия достаточно в формуле (16) положить $n = p+1$ и убедиться, что степень B^{p+1} — нулевой оператор, так как в представлении этой степени стоит нулевой оператор B_p в силу определения вырожденности скелетной цепочки.

Используя введенный аппарат скелетных цепочек оператора B , можно проводить редукцию нерегулярных систем к последовательности регулярных задач.

В [18, 19] это продемонстрировано на примере классических уравнений вида

$$\mathbf{B}L(t)u = L_1(t)u + f(t),$$

где $\mathbf{B}$ — непрерывный оператор, $L(t)$ и $L_1(t)$ — дифференциальные операторы с частными производными.

Для большей прозрачности изложения ниже ограничимся рассмотрением применения скелетных цепочек в анализе простейшего нерегулярного дифференциального уравнения

$$\mathbf{B} \frac{du(t)}{dt} = u(t) + f(t), \quad (17)$$

где $f(t) : [0, \infty) \rightarrow E$, $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(E \rightarrow E)$ — фредгольмов оператор. Пусть $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_p\}$ — скелетная цепочка оператора $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_i = \mathbf{A}_{2i}\mathbf{A}_{2i-1}$, $i = 1, \dots, p$.

Теорема 2. Пусть $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_p\}$ — регулярная скелетная цепочка оператора $\mathbf{B}$, функция $f(t)$ дифференцируема $p - 1$ раз. Тогда уравнение (17) с начальным условием

$$\prod_{j=1}^p \mathbf{A}_{2j} u(t)|_{t=0} = c_0, \quad c_0 \in E_p \quad (18)$$

имеет единственное классическое решение

$$u(t, c_0) = -f(t) + \mathbf{A}_1 \frac{du_1}{dt}, \quad (19)$$

где функция $u_1(t, c_0)$ определяется единственным образом.

Опишем схему построения функция $u_1(t, c_0)$ в решении (19), вытекающую из определения скелетной цепочки оператора $\mathbf{B}$:

(1) если $p = 1$, то $u_1(t, c_0)$ удовлетворяет регулярной задаче Коши

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 \frac{du_1}{dt} = u_1 + \mathbf{A}_2 f(t), \\ u_1(0) = c_0; \end{cases}$$

(2) если $p \geq 2$, то $u_1(t, c_0)$ можно построить рекурсией

$$\begin{cases} \mathbf{B}_p \frac{du_p}{dt} = u_p + \prod_{j=1}^p \mathbf{A}_{2j} f(t), \\ u_p(0) = c_0, \end{cases}$$

$$u_i(t, c_0) = \mathbf{A}_{2i+1} \frac{du_{i+1}(t, c_0)}{dt} - \prod_{j=1}^i \mathbf{A}_{2j} f(t), \quad i = p-1, p-2, \dots, 1.$$

Теорема 3. Пусть $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{p-1}, 0\}$ — сингулярная цепочка длины $p \geq 1$, 0 — нулевой оператор, действующий из E_p в E_p . Тогда $\mathbf{B}$ — нильпотентный оператор, и однородное уравнение

$$\mathbf{B} \frac{du}{dt} = u$$

имеет только тривиальное решение. Если при этом функция $f(t)$ дифференцируема p раз, то неоднородное уравнение (17) имеет единственное классическое решение. Более того, решение строится итерациями

$$u_n(t) = -f(t) + \mathbf{B} \frac{d}{dt} u_{n-1}(t)$$

при $u_0(t) = -f(t)$, $n = 1, 2, \dots, p$.

Таким образом, в условиях теоремы 3 итерация $u_p(t)$ — единственное классическое решение неоднородного уравнения (17).

Для иллюстрации теорем 2, 3 рассмотрим два простых примера, предполагая, что $E = \mathbb{R}^3$.

Пример 5. Пусть в уравнении (17)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} f(t) &= (f_1(t), f_2(t), f_3(t))^T, \\ u(t) &= (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T. \end{aligned}$$

Очевидно, $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$, где $\mathbf{A}_1 = [2, 1, 0]^T$, $\mathbf{A}_2 = (a, \cdot)$ (скалярное произведение), $a = [0, 1, 1]^T$. Поэтому $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = 1$, и матрица $\mathbf{B}$ порождает регулярную скелетную цепочку длины $p = 1$. Используя теорему 2, введем следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = v + f_2(t) + f_3(t), \\ v(0) = 0, \\ u(t) = -f(t) + \mathbf{A}_1 \frac{dv}{dt}, \end{cases}$$

где $v = \mathbf{A}_2 u = u_2(t) + u_3(t)$.

Начальное условие $u_2(0) + u_3(0) = 0$ следует из условия $v(0) = 0$. Пусть $f_i(t)$ — непрерывные функции. Тогда

$$v(t) = \int_0^t e^{t-s} (f_2(s) + f_3(s)) ds$$

и система (17) с матрицей $\mathbf{B}$ и начальным условием $u_2(0) + u_3(0) = 0$ имеет единственное классическое решение

$$u(t) = -f(t) + (2v(t) + 2f_2(t) + 2f_3(t), v(t) + f_2(t) + f_3(t), 0)^T.$$

Пример 6. Пусть в уравнении (17), как и в примере 5, $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$, но теперь

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_2 = (a, \cdot)$ и $\mathbf{B}$ — нильпотентная матрица. Тогда $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = 0$. Таким образом, в примере 6 $\{\mathbf{B}_1\}$ — сингулярная скелетная цепочка длины $p = 1$, соответствующая нильпотентной матрице $\mathbf{B}$. Поэтому согласно теореме 3 единственное решение системы (17) с такой матрицей $\mathbf{B}$ строим с помощью итераций

$$u_n(t) = -f(t) + \mathbf{B} \frac{d}{dt} u_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots, p, \quad u_0(t) = -f(t).$$

Так как $p = 1$, то единственное решение неоднородной системы (17) в этом примере имеет вид

$$u(t) = -f(t) + \left(2(f_2(t) - f_3(t))', (f_2(t) - f_3(t))', (f_2(t) - f_3(t))' \right)^T.$$

Если $f(t)$ — дифференцируемая вектор-функция, то получаем классическое решение. Если $f_i(t)$, $i = 2, 3$, — кусочно абсолютно непрерывные функции с точками разрывов первого рода и кусочно непрерывными производными, то получим решение в пространстве распределений K' . Таким образом, предложенный метод позволяет строить и обобщенные решения сингулярных ОДУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келлер А. В., Загребина С. А. Некоторые обобщения задачи Шоуолтера—Сидорова для моделей соболевского типа // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. програм. — 2015. — 8, № 2. — С. 5–23.
2. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — М.: Физматлит, 2007.
3. Свиридюк Г. А., Манакова Н. А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера—Сидорова и аддитивными «шумами» // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. програм. — 2014. — 7, № 1. — С. 90–103.

4. Сидоров Н. А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1982.
5. Сидоров Н. А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией// Мат. заметки. — 1984. — 35, № 4. — С. 569–578.
6. Сидоров Н. А., Благодатская Е. Б. Дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшем дифференциальном выражении. — Иркутск: СО АН СССР, Иркутский вычислительный центр, 1986.
7. Сидоров Н. А., Благодатская Е. Б. Дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором в главной части дифференциального выражения// Докл. АН СССР. — 1991. — 319, № 5. — С. 1087–1090.
8. Сидоров Н. А., Леонтьев Р. Ю., Дрегля А. И. О малых решениях нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях// Мат. заметки. — 2012. — 91, № 1. — С. 120–135.
9. Сидоров Н. А., Сидоров Д. Н. О решении интегрального уравнения Гаммерштейна в нерегулярном случае методом последовательных приближений// Сиб. мат. ж. — 2010. — 51, № 2. — С. 404–409.
10. Сидоров Н. А., Сидоров Д. Н. О разрешимости одного класса операторных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно непрерывными ядрами// Мат. заметки. — 2014. — 96, № 5. — С. 773–789.
11. Сидоров Н. А., Сидоров Д. Н., Красник А. В. О решении операторно-интегральных уравнений Вольтерра в нерегулярном случае методом последовательных приближений// Диффер. уравн. — 2010. — 46, № 6. — С. 874–882.
12. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — 18, № 1. — С. 3–50.
13. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных интегродифференциальных операторов в банаховых пространствах// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2017. — 132. — С. 127–130.
14. Юлдашев Т. К. О разрешимости одной краевой задачи для обыкновенного интегродифференциального уравнения фредгольма с вырожденным ядром. — Ж. вычисл. мат. мат. физ., 2019.
15. Dreglea A. I., Sidorov N. A. Integral equations in identification of external force and heat source density dynamics// Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2018. — № 3. — P. 68–77.
16. Sidorov N. A. Classic solutions of boundary-value problems for partial differential equations with operator of finite index in the main part of equation// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. мат. — 2019. — 27. — С. 55–70.
17. Sidorov D. N., Sidorov N. A. Convex majorants method in the theory of nonlinear Volterra equations. — Banach J. Math. Anal., 2012.
18. Sidorov D. N., Sidorov N. A. Solution of irregular systems of partial differential equations using skeleton decomposition of linear operators// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. програм. — 2017. — 10, № 2. — С. 63–73.
19. Sidorov N., Sidorov D., Li Y. Skeleton decomposition of linear operators in the theory of degenerate differential equations, 2015/ [arXiv: 1511.08976 \[math.CA\]](https://arxiv.org/abs/1511.08976).
20. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. — Springer, 2002.
21. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev-Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — De Gruyter, 2003.

Сидоров Николай Александрович
Иркутский государственный университет
E-mail: sidorovisu@gmail.com

Дрегля Алена Ивановна
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
E-mail: adreglea@gmail.com