Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Срочко, В. Г. Антоник, Е. В. Аксеньюшкина, Задачи оптимального управления для билинейной системы специальной структуры, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 183, 130–138

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-183-130-138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 12:36:16

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 183 (2020). С. 130–138
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-183-130-138

УДК 517.977

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

© 2020 г. В. А. СРОЧКО, В. Г. АНТОНИК, Е. В. АКСЕНЮШКИНА

Аннотация. Рассмотрены три задачи оптимального управления (линейные, билинейные и квадратичные функционалы) для специальной билинейной системы с матрицей ранга 1. Для первой задачи получены два варианта условий относительно начальных данных системы и функционала, при которых принцип максимума становится достаточным условием оптимальности. В этом случае задача становится очень простой: оптимальное управление определяется в процессе интегрирования фазовой или сопряженной системы (одна задача Коши). Затем рассматривается задача оптимизации билинейного функционала. Получены достаточные условия оптимальности граничных управлений без точек переключения. Эти условия представлены в виде неравенств для функций одной переменной (времени). Задача оптимального управления с квадратичным функционалом сводится к билинейному случаю на основе специальной формулы приращения.

Ключевые слова: задача оптимального управления, билинейная система, принцип максимума, достаточные условия оптимальности.

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR THE BILINEAR SYSTEM OF SPECIAL STRUCTURE

© 2020 V. A. SROCHKO, V. G. ANTONIK, E. V. AKSENYUSHKINA

ABSTRACT. We consider three optimal control problems (linear, bilinear, and quadratic functionals) with respect to the special bilinear system with a matrix of rank 1. For the first problem, we obtain two variants of conditions with respect to initial data of the system and functional such that the maximum principle becomes a sufficient optimality condition. In this case, the problem becomes very simple: the optimal control is determined in the integration process of the phase or conjugate system (one Cauchy problem). Then the optimization problem for a bilinear functional is considered. Sufficient optimality conditions for the boundary controls without switching points are obtained. These conditions are represented as inequalities for functions of one variable (time). The optimal control problem with the quadratic functional reduces to bilinear case on the basis of special increment formula.

Keywords and phrases: optimal control problem, bilinear system, maximum principle, sufficient conditions of optimality.

AMS Subject Classification: 49K15

1. Задача оптимизации линейного функционала. Будем предполагать, что $t \in [0, t_1]$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Множество допустимых управлений имеет вид

$$V = \left\{ u(\cdot) \in PC[0, t_1] : u(t) \in [0, 1], t \in [0, t_1] \right\},$$

где $PC[0, t_1]$ — множество кусочно непрерывных функций, определенных на $[0, t_1]$. Рассмотрим билинейную систему

$$\dot{x} = (A + u bc^T)x, \quad x(0) = x^0, \quad x^0 \neq 0, \quad (1)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b, c \in \mathbb{R}^n$, bc^T — матрица ранга 1 с элементами $b_i c_j$, $i, j = \overline{1, n}$.

Рассмотрим систему (1) в эквивалентной форме

$$\dot{x} = Ax + ub\langle c, x \rangle, \quad x(0) = x^0, \quad (2)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

Рассмотрим задачу максимизации линейного терминального функционала

$$\Phi(u) = \langle d, x(t_1) \rangle \rightarrow \max \quad (P)$$

с вектором стоимости $d \in \mathbb{R}^n$.

Билинейные системы вида (1) имеют большое практическое значение. Они описывают математические модели в биологии, экономике, медицине, энергетике, автоматическом управлении и др. (см. [2–5]). В частности, такие системы моделируют процесс лечения злокачественных опухолей посредством задержки развития раковых клеток на определенной стадии (см. [7, 8]). Некоторые результаты для системы (1) (условия положительности решений, свойства достижимого множества, оценка количества точек переключения для экстремальных управлений, численные результаты и т. д.) получены в [2].

В статье исследуются некоторые проблемы, связанные с достаточными условиями оптимальности системы (1). Для задачи (P) получены два варианта условий для входных данных (A, b, c, d, x^0) , при которых принцип максимума становится достаточным условием оптимальности. Более того, решение задачи упрощается: оптимальное управление находится интегрированием сопряженной или фазовой системы (одна задача Коши).

Кроме того, рассматривается задача оптимизации билинейного функционала. Получены достаточные условия оптимальности для простейших управлений $u = 0$, $u = 1$. Эти условия представлены в виде неравенств $\varphi_0(t) \leq 0$, $\varphi_1(t) \geq 0$ для функций одной переменной t на отрезке $[0, t_1]$. Каждое вычисление величин $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ означает решение задачи (P) для $t_1 = t$. Следовательно, результат носит конструктивный (реализованный) характер.

В заключение рассматривается задача оптимизации квадратичного функционала. Эта задача сводится к билинейному случаю с помощью специальной формулы приращения. Это означает, что анализ квадратичных задач для билинейной системы (1) можно проводить в рамках билинейного функционала.

2. Принцип максимума и достаточные условия оптимальности. Определим функцию Понтрягина для системы (1)

$$H(\psi, x, u) = \langle \psi, (A + ubc^T)x \rangle.$$

Сопряженная система имеет вид

$$\dot{\psi} = -(A^T + ucb^T)\psi, \quad \psi(t_1) = d. \quad (3)$$

Согласно (2), имеем

$$\begin{aligned} H(\psi, x, u) &= \langle \psi, Ax \rangle + u\langle b, \psi \rangle \langle c, x \rangle, \\ \dot{\psi} &= -A^T \psi - uc\langle b, \psi \rangle, \quad \psi(t_1) = d. \end{aligned} \quad (4)$$

Управление, максимизирующее H , задается выражением

$$w_*(\psi, x) = \arg \max_{u \in [0, 1]} H(\psi, x, u) = \begin{cases} 0, & \langle b, \psi \rangle \langle c, x \rangle < 0, \\ 1, & \langle b, \psi \rangle \langle c, x \rangle > 0. \end{cases}$$

Как результат, сформулируем принцип максимума для задачи (P). Пусть $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, — вспомогательное управление, $x(t, u)$ и $\psi(t, u)$ — соответствующие фазовая и сопряженная траектории. Для оптимальности управления $u(t)$ в задаче (P) необходимо выполнение условия

$$u(t) = w_*(\psi(t, u), x(t, u)), \quad t \in [0, t_1].$$

Поскольку задача (P) невыпукла, принцип максимума не является достаточным условием билинейной системы.

Сформулируем два достаточных условия в терминологии принципа максимума (см. [6]).

Условие 1. Если

$$u(t) = w_*(\psi(t, u), x(t, v)), \quad t \in [0, t_1], \quad v \in V,$$

то $u(t)$ — оптимальное управление в задаче (P).

Условие 2. Если

$$u(t) = w_*(\psi(t, v), x(t, u)), \quad t \in [0, t_1], \quad v \in V,$$

то $u(t)$ — оптимальное управление в задаче (P).

Итак, в отличие от принципа максимума достаточные условия означают, что управление $u(t)$ является H -максимальным по любой фазовой или сопряженной траектории. Теперь найдем условия для параметров задачи (P), при которых принцип максимума является достаточным условием оптимальности, т.е.

принцип максимума $\Rightarrow$ условие 1 или принцип максимума $\Rightarrow$ условие 2.

3. Условия положительности фазовых и сопряженных траекторий. Введем матрицу коэффициентов для фазовой системы (1)

$$F(u) = A + ubc^T$$

с элементами $f_{ij}(u) = a_{ij} + ub_i c_j$, $i, j = \overline{1, n}$. Тогда фазовая система имеет вид

$$\dot{x} = F(u)x, \quad x(0) = x^0.$$

Лемма 1. *Предположим, что внедиагональные элементы матрицы $F(u)$ неотрицательны:*

$$f_{ij}(u) \geq 0, \quad i \neq j, \quad u \in [0, 1].$$

Тогда все решения фазовой системы сохраняют знак начального состояния:

$$x^0 > 0 \Rightarrow x(t, u) > 0, \quad t \in (0, t_1], \quad u \in V;$$

$$x^0 < 0 \Rightarrow x(t, u) < 0, \quad t \in (0, t_1], \quad u \in V.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $x^0 > 0$. Пусть $u \in V$ и $x(t, u)$ — соответствующая фазовая траектория. Поскольку $x(0, u) = x^0 > 0$, имеем $x(t, u) > 0$ для малых $t > 0$. Пусть $\tau > 0$ — первая точка, для которой некоторая координата вектор-функции $x(t, u)$ обращается в нуль, т.е.

$$x_i(t, u) > 0, \quad t \in [0, \tau), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\exists k \in \{1, \dots, n\} : x_k(\tau, u) = 0.$$

Если $\tau > t_1$, то утверждение леммы выполняется.

Предположим, что $\tau \leq t_1$. Рассмотрим k -е уравнение фазовой системы для $u \in V$, $t \in [0, \tau]$:

$$\dot{x}_k(t, u) = \sum_{j=1}^n f_{kj}(u(t))x_j(t, u) = f_{kk}(u(t))x_k(t, u) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_{kj}(u(t))x_j(t, u).$$

Введем обозначение

$$\alpha_k(t) = f_{kk}(u(t)), \quad \beta_k(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_{kj}(u(t), t)x_j(t, u).$$

В силу условия этой леммы и определения точки τ имеем $\beta_k(t) \geq 0$, $t \in [0, \tau]$. Получаем уравнение

$$\dot{x}_k(t, u) = \alpha_k(t)x_k(t, u) + \beta_k(t), \quad x_k(0, u) = x_k^0.$$

Согласно формуле Коши

$$x_k(\tau, u) = \exp \left(\int_0^\tau \alpha_k(t) dt \right) \left[x_k^0 + \int_0^\tau \exp \left(- \int_0^t \alpha_k(s) ds \right) \beta_k(t) dt \right].$$

Поскольку $x_k^0 > 0$, $\beta_k(t) \geq 0$, $t \in [0, \tau]$, заключаем, что $x_k(\tau, u) > 0$. Это противоречит определению τ : $x_k(\tau, u) = 0$. $\square$

Следствие 1. *Справедливо следующее утверждение:*

$$f_{ij}(u) \geq 0, \quad u \in [0, 1] \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} + \min\{0, b_i c_j\} \geq 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Доказательство. Представим условие леммы 1 в экстремальной форме:

$$\min_{u \in [0, 1]} f_{ij}(u) \geq 0, \quad f_{ij} = a_{ij} + u b_i c_j, \quad i \neq j.$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$u b_i c_j \rightarrow \min, \quad u \in [0, 1],$$

с решением

$$u_{ij} = \begin{cases} 0, & b_i c_j \geq 0, \\ 1, & b_i c_j < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\min_{u \in [0, 1]} u b_i c_j = \begin{cases} 0, & b_i c_j \geq 0, \\ b_i c_j, & b_i c_j < 0 \end{cases} = \min\{0, b_i c_j\}.$$

Далее рассмотрим сопряженную систему в следующем виде:

$$\dot{\psi} = -F^T(u)\psi, \quad \psi(t_1) = d. \quad (5)$$

Следствие 1 доказано. $\square$

Лемма 2. *Предположим, что внедиагональные элементы матрицы $F(u)$ неотрицательны:*

$$f_{ij}(u) \geq 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad u \in [0, 1].$$

Тогда все траектории сопряженной системы сохраняют знак начального состояния:

$$\begin{aligned} \psi(t_1) > 0 &\Rightarrow \psi(t, u) > 0, \quad t \in [0, t_1], \quad u \in V; \\ \psi(t_1) < 0 &\Rightarrow \psi(t, u) < 0, \quad t \in [0, t_1], \quad u \in V. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим первый случай, когда $\psi(t_1) > 0$. Пусть $u(t)$ — вспомогательное управление с траекторией $\psi(t, u)$. Тогда $\psi(t, u) > 0$, $t \in (t_1 - \epsilon, t_1)$ для малых $\epsilon > 0$. Пусть $\tau < t_1$ — первая точка, для которой некоторая координата вектор-функции $\psi(t, u)$ обращается в нуль, т.е.

$$\begin{aligned} \psi_i(t, u) &> 0, \quad t \in (\tau, t_1], \quad i = \overline{1, n}, \\ \exists k \in \{1, \dots, n\} : \psi_k(\tau, u) &= 0. \end{aligned}$$

Если $\tau < 0$, то утверждение леммы верно.

Предположим, что $\tau \geq 0$, и рассмотрим k -е уравнение сопряженной системы (5) для $u \in V$, $t \in [\tau, t_1]$:

$$\dot{\psi}_k(t, u) = - \sum_{j=1}^n f_{jk}(u(t)) \psi_j(t, u) = -f_{kk}(u(t)) \psi_k(t, u) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_{jk}(u(t)) \psi_j(t, u).$$

Введем обозначение

$$\alpha_k(t) = f_{kk}(u(t)), \quad \beta_k(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_{jk}(u(t)) \psi_j(t, u).$$

Согласно утверждению леммы и определению точки τ имеем $\beta_k(t) \geq 0$, $t \in [\tau, t_1]$.

Кроме того, получаем уравнение

$$\dot{\psi}_k(t, u) = -\alpha_k(t) \psi_k(t, u) - \beta_k(t), \quad \psi_k(t_1, u) = d_k.$$

Согласно формуле Коши

$$\psi_k(\tau, u) = \exp \left(\int_{\tau}^{t_1} \alpha_k(t) dt \right) \left[\psi_k(t_1, u) + \int_{\tau}^{t_1} \exp \left(- \int_t^{t_1} \alpha_k(s) ds \right) \beta_k(t) dt \right].$$

Поскольку $\psi_k(t_1, u) > 0$, $\beta_k(t) \geq 0$, $t \in [\tau, t_1]$, заключаем, что $\psi_k(\tau, u) > 0$. Это противоречит определению τ : $\psi_k(\tau, u) = 0$. $\square$

4. Достаточные условия принципа максимума.

Теорема 1. Пусть для параметров задачи (Р) выполнены следующие условия:

$$a_{ij} + \min\{0, b_i c_j\} \geq 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j, \quad x^0 > 0, \quad c \geq 0, \quad c \neq 0.$$

Тогда принцип максимума является достаточным условием оптимальности.

Доказательство. Согласно условиям теоремы 1, все фазовые траектории $x(t, u)$ положительны и

$$\langle c, x(t, u) \rangle > 0, \quad t \in [0, t_1], \quad u \in V. \quad (6)$$

Принцип максимума для управления $\bar{u} \in V$ имеет вид

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & \langle b, \psi(t, \bar{u}) \rangle \langle c, x(t, \bar{u}) \rangle < 0, \\ 1, & \langle b, \psi(t, \bar{u}) \rangle \langle c, x(t, \bar{u}) \rangle > 0, \end{cases} \quad t \in [0, t_1].$$

Согласно (6) имеем

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & \langle b, \psi(t, \bar{u}) \rangle \langle c, x(t, u) \rangle < 0, \\ 1, & \langle b, \psi(t, \bar{u}) \rangle \langle c, x(t, u) \rangle > 0, \end{cases}$$

для всех $u \in V$, $t \in [0, t_1]$. Это первое достаточное условие оптимальности управления $\bar{u}(t)$. $\square$

Замечание 1. Теорема 1 останется верной при условии

$$x^0 < 0, \quad c \leq 0, \quad c \neq 0.$$

Теорема 2. Пусть для параметров задачи $\text{eqref{P}}$ выполнены следующие условия:

$$a_{ij} + \min\{0, b_i c_j\} \geq 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j, \quad d > 0, \quad b \geq 0, \quad b \neq 0.$$

Тогда принцип максимума является достаточным условием оптимальности.

Доказательство. Согласно условиям теоремы 2, $\psi(t_1) > 0$, и все сопряженные траектории $\psi(t, u)$ положительны; кроме того,

$$\langle b, \psi(t, u) \rangle > 0, \quad t \in [0, t_1], \quad u \in V.$$

Тогда принцип максимума для управления $\bar{u} \in V$ имеет вид

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & \langle b, \psi(t, u) \rangle \langle c, x(t, \bar{u}) \rangle < 0, \\ 1, & \langle b, \psi(t, u) \rangle \langle c, x(t, \bar{u}) \rangle > 0. \end{cases}$$

Это второе достаточное условие оптимальности управления $\bar{u}(t)$. $\square$

Замечание 2. Теорема 2 остается справедливой при условиях

$$d < 0, \quad b \leq 0, \quad b \neq 0.$$

5. Решение билинейной системы. Рассмотрим задачу (P) при выполнении условий теоремы 1 (задача (P₁)). В этом случае необходимое и достаточное условие оптимальности управления $u_* \in V$ задается в виде

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & \langle b, \psi(t, u_*) \rangle < 0, \\ 1, & \langle b, \psi(t, u_*) \rangle > 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем следующую процедуру решения задачи (P₁).

Определим вспомогательное управление

$$u_1(\psi) = \begin{cases} 0, & \langle b, \psi \rangle \leq 0, \\ 1, & \langle b, \psi \rangle > 0. \end{cases}$$

Далее найдем решение $\psi^*(t)$, $t \in [0, t_1]$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^T \psi - u_1(\psi) \langle b, \psi \rangle c, \quad \psi(t_1) = d$$

и построим оптимальное управление $u_*(t) = u_1(\psi^*(t))$, $t \in [0, t_1]$.

Сопряженная система представляется в виде

$$\dot{\psi} = -A^T \psi - c \max\{0, \langle b, \psi \rangle\}, \quad \psi(t_1) = d.$$

Ее решение $\psi^*(t)$, $t \in [0, t_1]$, существует и единственно: правая часть системы удовлетворяет условию Липшица при $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 3. Поясним последнее утверждение для функции максимума

$$\varphi(x) = \max\{0, \langle b, x \rangle\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Если рассмотреть приращение $\varphi(x) - \varphi(y)$ для произвольных возможных ситуаций по отношению к $\langle b, x \rangle$ и $\langle b, y \rangle$, получим оценку

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\langle b, x - y \rangle|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда получаем условие Липшица с константой $\|b\|$.

Рассмотрим задачу (P) при выполнении условий теоремы 2 (задача (P₂)). В этом случае критерий оптимальности управления $u_* \in V$ представляется в следующем виде:

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & \langle c, x(t, u_*) \rangle < 0, \\ 1, & \langle c, x(t, u_*) \rangle > 0. \end{cases}$$

В результате получаем следующую процедуру решения задачи (P₂).

Определим вспомогательное управление

$$u_2(x) = \begin{cases} 0, & \langle c, x \rangle \leq 0, \\ 1, & \langle c, x \rangle > 0. \end{cases}$$

Далее найдем решение $x^*(t)$, $t \in [0, t_1]$ фазовой системы

$$\dot{x} = Ax + u_2(x) \langle c, x \rangle b, \quad x(0) = x^0$$

и построим оптимальное управление $u_*(t) = u_2(x^*(t))$, $t \in [0, t_1]$.

Фазовую систему можно представить в виде

$$\dot{x} = Ax + b \max\{0, \langle c, x \rangle\}, \quad x(0) = x^0.$$

Ее решение $x^*(t)$, $t \in [0, t_1]$, существует и единственно.

6. Задача оптимизации билинейного функционала. Определим обобщенный функционал для билинейной системы (1)

$$\Phi_0(u) = \langle d^0, x(t_1) \rangle + \int_0^{t_1} \langle a(t), x(t) \rangle u(t) dt$$

с непрерывной вектор-функцией $a(t)$, $t \in [0, t_1]$.

Рассмотрим билинейную задачу

$$\Phi_0(u) \rightarrow \max, \quad u \in V, \quad (P_0)$$

с точки зрения достаточных условий оптимальности управления $u = 0 \vee 1$.

В этом случае сопряженная система для вектор-функции $\psi^0(t)$ имеет вид

$$\dot{\psi}^0 = -(A^T + ucb^T)\psi^0 - ua(t), \quad \psi^0(t_1) = d^0.$$

Функция переключения выражается формулой

$$H_u(\psi^0, x, t) = \langle a(t) + \langle b, \psi^0 \rangle c, x \rangle. \quad (7)$$

Будем использовать следующее представление приращения функционала Φ_0 по паре управлений $u, v \in V$ (см. [1, 6]):

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u) = \int_0^{t_1} H_u(\psi^0(t, u), x(t, v), t)(v(t) - u(t)) dt.$$

Рассмотрим управление $u = 0$. Достаточное условие оптимальности этого управления выражается неравенством

$$H_u(\psi^0(t, 0), x(t, v), t) \leq 0, \quad t \in [0, t_1], \quad v \in V.$$

Принимая во внимание выражение (7), введем функцию

$$\varphi_0(t) = \max_{v \in V} \langle a(t) + \langle b, \psi^0(t, 0) \rangle c, x(t, v) \rangle.$$

Получаем следующий результат: если $\varphi_0(t) \leq 0$, $t \in [0, t_1]$, то управление $u = 0$ является оптимальным для задачи (P_0) .

Далее предположим, что для задачи (P_0) выполнены условия теоремы 1. Тогда для каждого фиксированного $t \in (0, t_1]$ вычисление значения $\varphi_0(t)$ связано с решением проблемы (P_1) при $t_1 = t$, $d = a(t) + \langle b, \psi^0(t, 0) \rangle c$, т.е. является несложной задачей (две задачи Коши).

Аналогично, для управления $u = 1$ условие оптимальности выражается неравенством

$$H_u(\psi^0(t, 1), x(t, v), t) \geq 0, \quad t \in [0, t_1], \quad v \in V.$$

Введем функцию

$$\varphi_1(t) = \min_{v \in V} \langle a(t) + \langle b, \psi^0(t, 1) \rangle c, x(t, v) \rangle$$

и сформулируем следующий результат: если $\varphi_1(t) \geq 0$, $t \in [0, t_1]$, то управление $u = 1$ является оптимальным для задачи (P_0) .

Вычисление значения $\varphi_1(t)$, $t \in (0, t_1]$, для проблемы (P_1) является простой задачей.

Отметим, что неравенства $\varphi_0(0) \leq 0$ и $\varphi_1(0) \geq 0$ выражают принцип максимума для управлений $u = 0$ и $u = 1$, соответственно, в точке $t = 0$.

7. Задача оптимизации квадратичного функционала. Для билинейной системы (1) относительно множества допустимых управлений V определим квадратичный функционал

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{2} \langle x(t_1), Dx(t_1) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \langle x(t), Q(t)x(t) \rangle dt,$$

где матрицы D и $Q(t)$ симметричны.

Сформулируем соответствующую билинейно-квадратичную задачу:

$$\Phi_1(u) \rightarrow \max, \quad u \in V. \quad (8)$$

Далее будем использовать следующие объекты: первая сопряженная система для вектор-функции $\psi^1(t)$

$$\dot{\psi}^1 = -(A^T + ucb^T)\psi^1 - Q(t)x, \quad \psi^1(t_1) = Dx(t_1),$$

вторая сопряженная система для симметричной матрицы-функции $\Psi(t)$

$$\dot{\Psi} = -(A^T + ucb^T)\Psi - \Psi(A + ubc^T) - Q(t), \quad \Psi(t_1) = D,$$

функция переключения

$$H_u(\psi^1, x) = \langle b, \psi^1 \rangle \langle c, x \rangle. \quad (9)$$

Теперь введем соответствующие решения для управления $u \in V$: $x(t, u)$, $\psi^1(t, u)$ и $\Psi(t, u)$. Поясним связь между ними при $u = 0$.

Лемма 3. *Имеет место равенство*

$$\psi^1(t, 0) = \Psi(t, 0)x(t, 0), \quad t \in [0, t_1]. \quad (10)$$

Доказательство. Для $t = t_1$ уравнение (10) выполняется в силу определения ψ^1 . Дифференцируя (10) в силу уравнений для $\Psi(t, 0)$ и $x(t, 0)$, получим

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^1(t, 0) &= -A^T \Psi(t, 0)x(t, 0) - \Psi(t, 0)Ax(t, 0) - Q(t)x(t, 0) + \Psi(t, 0)Ax(t, 0) = \\ &= -A^T \psi^1(t, 0) - Q(t)x(t, 0). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили сопряженную систему для $\psi^1(t, 0)$. □

Далее сформулируем утверждение относительно функционала задачи (8).

Лемма 4. *Имеет место следующее выражение для функционала:*

$$\Phi_1(u) = \Phi_1(0) + \int_0^{t_1} \langle \Psi(t, 0)b, x(t, u) \rangle \langle c, x(t, 0) \rangle u(t) dt. \quad (11)$$

Доказательство. Рассмотрим формулу приращения в квадратичной задаче для пары $u, v \in V$ в силу выражения (9) (см. [1, 6]):

$$\Phi_1(v) - \Phi_1(u) = \int_0^{t_1} \langle b, \psi^1(t, u) + \Psi(t, u)(x(t, v) - x(t, u)) \rangle \langle c, x(t, u) \rangle (v(t) - u(t)) dt.$$

Здесь мы положили $v = u$ и $u = 0$:

$$\Phi_1(u) - \Phi_1(0) = \int_0^{t_1} \langle b, \psi^1(t, 0) + \Psi(t, 0)(x(t, u) - x(t, 0)) \rangle \langle c, x(t, 0) \rangle u(t) dt.$$

Используя выражение (10), получим формулу (11). □

Используя формулу (11), преобразуем билинейно-квадратичную задачу (8) к билинейной задаче (P_0) с условием

$$d^0 = 0, \quad a(t) = \langle c, x(t, 0) \rangle \Psi(t, 0)b, \quad t \in [0, t_1].$$

Таким образом, эта задача сводится к билинейному случаю. Это означает, что анализ квадратичных задач для билинейной системы (1) можно проводить в рамках билинейного функционала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антоник В. Г., Срочко В. А. Условия оптимальности типа принципа максимума в билинейных задачах управления// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2016. — 56, № 12. — С. 2054–2064.
2. Хайлов Е. Н. Об экстремальных управлениях однородной билинейной системы, управляемой в положительном органте// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1998. — 220. — С. 217–235.
3. Alessandro P. D. Bilinearity and sensitivity in macroeconomy// Lect. Notes Econ. Math. Syst. — 1975. — 111. — P. 170–199.
4. Oster G. Bilinear models in ecology// Lect. Notes Econ. Math. Syst. — 1978. — 162. — P. 260–271.
5. Perelson A. S. Applications of optimal control theory to immunology// Lect. Notes Econ. Math. Syst. — 1978. — 162. — P. 272–287.
6. V. Srochko, V. Antonik, and E. Aksenyushkina Sufficient optimality conditions for extremal controls based on functional increment formulas// Num. Alg. Control Optim. — 2017. — 7, № 2. — P. 191–199.
7. Swierniak A. Some control problems for simplest differential models of proliferation cycle// Appl. Math. Comput. Sci. — 1994. — 4, № 2. — P. 223–232.
8. Swierniak A. Cell cycle as an object of control// J. Biol. Syst. — 1995. — 3, № 1. — P. 41–54.

Срочко Владимир Андреевич
Иркутский государственный университет
E-mail: srochko@math.isu.ru

Антоник Владимир Георгиевич
Иркутский государственный университет
E-mail: vga@math.isu.ru

Аксенюшкина Елена Владимировна
Байкальский государственный университет, Иркутск
E-mail: aks.ev@mail.ru