Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Фалалеев,
Обобщенные решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в
банаховых пространствах, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил.*
Темат. обз., 2020, том 183, 139–151

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-183-139-151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 11:49:25

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 183 (2020). С. 139–151
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-183-139-151

УДК 517.983.5, 517.968.7

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2020 г. М. В. ФАЛАЛЕЕВ

Аннотация. В работе изложена методика построения обобщенных решений задачи Коши абстрактных интегро-дифференциальных уравнений с вырождением в банаховых пространствах. Обобщенные решения строятся в виде свертки фундаментальной оператор-функции (фундаментального решения, функции влияния) интегро-дифференциального оператора уравнения с обобщенной функцией специального вида, включающей в себя все входные данные исходной задачи. На основе анализа полученного представления для обобщенного решения получены достаточные условия разрешимости исходной задачи Коши в классе функций конечной гладкости. При выполнении этих достаточных условий построенное обобщенное решение оказывается классическим нужной гладкости. Полученные абстрактные результаты применены для исследования начально-краевых задач прикладного характера из теории колебаний в вязкоупругих средах.

Ключевые слова: банахово пространство, фредгольмов оператор, обобщенная функция, фундаментальное решение, свертка, резольвента, задача Коши—Дирихле.

GENERALIZED SOLUTIONS OF DEGENERATE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BANACH SPACES

© 2020 M. V. FALALEEV

ABSTRACT. In this paper, we present a technique for constructing generalized solutions of the Cauchy problem for abstract integro-differential equations with degeneration in Banach spaces. A generalized solution is constructed as the convolution of the fundamental operator-function (fundamental solution, influence function) of the integro-differential operator of the equation with a generalized function of a special form, which involves all input data of the original problem. Based on the analysis of the representation for the generalized solution, we obtain sufficient solvability conditions for the original Cauchy problem in the class of functions of finite smoothness. Under these sufficient conditions, the generalized solution constructed turns out to be a classical solution with the required smoothness. The abstract results obtained in the paper are applied to the study of applied initial-boundary-value problems from the theory of oscillations in viscoelastic media.

Keywords and phrases: Banach space, Fredholm operator, generalized function, fundamental solution, convolution, resolvent, Cauchy–Dirichlet problem.

AMS Subject Classification: 34G10, 45K05, 45N05

1. **Постановка задачи.** В данной работе исследуется задача Коши вида

$$Bu^{(N)}(t) - Au(t) - \int_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t), \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00407).

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \dots, \quad u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}, \quad (2)$$

где $N \geq 2$, B , A , $k(t)$ — замкнутые линейные операторы с плотными областями определения, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 , оператор B — фредгольмов (см. [1]), $f(t)$ — достаточно гладкая функция со значениями в E_2 .

Про задачу Коши (1)–(2) с необратимым оператором B известно, что она разрешима в классе $C^N(t \geq 0, E_1)$ лишь при выполнении жестких ограничений на начальные условия (2) и правую часть уравнения (1). Для разрешимости этой задачи в классе распределений (обобщенных функций) таких ограничений не требуется, поэтому естественным представляется строить обобщенные решения в классе $K'_+(E_1)$ обобщенных функций с ограниченным слева носителем. Класс $K'_+(E_1)$ является естественным для проведения таких построений по целому ряду причин. Во-первых, решение задачи Коши (1)–(2) строится при «положительных» временах ($t \geq 0$) и носители распределений из класса $K'_+(E_1)$ также находятся на луче $t \geq 0$. Во-вторых, при построении обобщенных решений приходится многократно использовать операцию свертки, которая в классе $K'_+(E_1)$ существует всегда, тогда как в общем случае это не так. В-третьих, в классе $K'_+(E_1)$ операция свертки ассоциативна, что в общем случае не так (см. [2]). Само же обобщенное решение из класса $K'_+(E_1)$ строится в виде свертки фундаментальной оператор-функции $\mathcal{E}_N(t)$ интегро-дифференциального оператора $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t))$, соответствующего уравнению (1), и обобщенной функции вида

$$F(t) = f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \dots + Bu_1\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t), \quad (3)$$

включающей в себя все «входные данные» задачи, т.е. начальные условия (2) и правую часть уравнения (1); здесь и далее $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, $\theta(t)$ — функция Хевисайда (см. [2]).

Ранее в [12] для случая $N = 1$ в предположении существования у оператора B полного жорданова набора относительно оператор-функции

$$A + \int_0^t k(s)ds$$

была построена фундаментальная оператор-функция для интегро-дифференциального оператора $(B\delta'(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t))$. Аналогичные задачи были решены в [12] для «полного» интегро-дифференциального оператора второго порядка вида $(B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t) - k(t)\theta(t))$, а в [4] для «полного» (т.е. все операторные коэффициенты не нулевые) интегро-дифференциального оператора N -го порядка вида

$$B\delta^N(t) - A_{N-1}\delta^{(N-1)}(t) - A_{N-2}\delta^{(N-2)}(t) - \dots - A_0\delta(t) - k(t)\theta(t);$$

при этом от оператора B требовалось существование полного обобщенного жорданова набора относительно оператор-функции

$$A_{N-1} + A_{N-2}t + \dots + A_0 \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \int_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} k(s)ds.$$

Такой подход предполагает, что все операторные коэффициенты ненулевые, и это условие в дальнейшем существенно использовалось; это, в свою очередь, не позволяет использовать теоремы из [4, 12] для исследования уравнения (1) с начальным условием (2). Однако именно к задачам вида (1)–(2) редуцируются некоторые начально-краевые задачи теории колебаний в вязкоупругих средах или из теории электрических цепей, что делает актуальными представляемые исследования не только с теоретической точки зрения, но и с практической.

В ряде работ, посвященных задаче Коши (1)–(2), исследования проводились в условиях «прямого подчинения» свойств операторного ядра $k(t)$ жордановой структуре операторного пучка $(B - \lambda A)$ (см. [11]). В частности, в соответствии с видом A -жорданова набора оператора B (см. [1]), от ядра $k(t)$ требовалось: либо наличие нуля определенного порядка в точке $t = 0$, либо включение A -присоединенных элементов (или функционалов) в его ядро $N(k(0))$ (или $N(k^*(0))$) (см. [5, 10]),

либо принадлежность области значений $R(k(0))$ (или $R(k^*(0))$) соответствующим подпространствам (см. [6]), либо представление ядра $k(t)$ в виде линейной комбинации $\alpha(t)A + \beta(t)B$ (см. [7]). Аналогичные эффекты наблюдались при исследовании методами теории полугрупп операторов с ядрами нагруженных линейных эволюционных уравнений с вырождением (см. [8, теорема 2]). В данной работе такие ограничения сняты.

2. Основные обозначения и вспомогательные утверждения. Далее в работе относительно операторных коэффициентов уравнения (1) будем предполагать выполненным следующее условие:

(А) $D(B) \subset D(A)$, $D(k(t)) = D(k) \subset D(B)$, $D(k)$ не зависит от времени t , $\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = \overline{D(k)} = E_1$, $R(B) = R(B)$, $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n \geq 1$.

Пусть $\{\varphi_i\} \in E_1$ — базис ядра оператора B , $\{\psi_i\} \in E_2^*$ — базис ядра сопряженного оператора B^* , $i = 1, \dots, n$, $\{\gamma_i\} \in E_1^*$ и $\{z_i\} \in E_2$ — соответствующие этим базисам биортогональные системы элементов, т.е. $\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle = \langle z_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$, δ_{ij} — символы Кронекера. В этом случае существует ограниченный оператор (см. [1]) вида

$$\Gamma = (\tilde{B})^{-1} = \left(B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1),$$

называемый оператором Треногина—Шмидта.

Введем ряд обозначений:

$$\mathcal{U}_N(A\Gamma t) = \sum_{i=1}^{\infty} (A\Gamma)^{i-1} \frac{t^{iN-1}}{(iN-1)!}$$

— ограниченная оператор-функция на пространстве E_2 ; $\mathcal{R}(t)$ — резольвента сверточного операторного ядра $k(t)\Gamma\theta(t) * \mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t)$;

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i$$

— проектор в пространстве E_2 ;

$$\mathcal{M}(t) = \mathcal{R}(t)\theta(t) + A\Gamma\mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t) * (I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t))$$

— оператор-функция на пространстве E_2 . В этих обозначениях справедливо следующее сверточное равенство для обобщенных оператор-функций:

$$\begin{aligned} G(t) &= (\mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t))^{(N)} * (I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)) = \\ &= (I\delta(t) + A\Gamma\mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t)) * (I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)) = I\delta(t) + \mathcal{M}(t)\theta(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Лемма 1. Обобщенная оператор-функция вида

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) = \mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t) * (I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t))$$

является фундаментальной для интегро-дифференциального оператора

$$\tilde{\mathcal{L}}_N(\delta(t)) = I\delta^{(N)}(t) - A\Gamma\delta(t) - k(t)\Gamma\theta(t).$$

Доказательство. В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции (см. [12]) необходимо убедиться в справедливости следующего двойного равенства:

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \tilde{\mathcal{L}}_N(\delta(t)) = \tilde{\mathcal{L}}_N(\delta(t)) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) = I_2\delta(t);$$

здесь I_2 — единичный (тождественный) оператор пространства E_2 . Действительно, с одной стороны,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_N(\delta(t)) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) &= \\ &= \left(I\delta(t) + A\Gamma\mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t) - A\Gamma\mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t) - k(t)\Gamma\theta(t) * \mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t) \right) * \left(I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) \right) = \end{aligned}$$

$$= \left(I\delta(t) - k(t)\Gamma\theta(t) * \mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t) \right) * \left(I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) \right) = I_2\delta(t).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \tilde{\mathcal{L}}_N(\delta(t)) &= \left(\mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t) \right)^{(N)} * \left(I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) \right) - \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left(A\Gamma\delta(t) + k(t)\Gamma\theta(t) \right) = \\ &= I_2\delta(t) + A\Gamma\mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t) + \mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t) * \left(\mathcal{R}(t)\theta(t) \right)^{(N)} - \\ &\quad - \mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t) * \left(A\Gamma\delta(t) + k(t)\Gamma\theta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) * \left(A\Gamma\delta(t) + k(t)\Gamma\theta(t) \right) \right) = \\ &= I_2\delta(t) + \mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t) * \left(\left(\mathcal{R}(t)\theta(t) \right)^{(N)} - k(t)\Gamma\theta(t) - \mathcal{R}(t)\theta(t) * \left(A\Gamma\delta(t) + k(t)\Gamma\theta(t) \right) \right) = I_2\delta(t), \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{R}(t)\theta(t) \right)^{(N)} &= \left(I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) \right) * k(t)\Gamma\theta(t) * \left(\mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t) \right)^{(N)} = \\ &= \left(I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) \right) * k(t)\Gamma\theta(t) * \left(I\delta(t) + A\Gamma\mathcal{U}_N(A\Gamma t)\theta(t) \right) = \\ &= k(t)\Gamma\theta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) * k(t)\Gamma\theta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) * A\Gamma\delta(t) = \\ &= k(t)\Gamma\theta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) * \left(A\Gamma\delta(t) + k(t)\Gamma\theta(t) \right). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана. $\square$

Замечание 1. Легко заметить, что $\tilde{\mathcal{E}}_N^{(N)}(t) = G(t)$.

Для каждого элемента $\{z_i\} \in E_2$, $i = 1, \dots, n$, введем обозначение $l_k(\varphi_i) = \mathcal{M}^{(k)}(0)z_i$, причем

$$\langle l_k(\varphi_i), \psi_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, p_i - 1,$$

однако не все числа $\langle l_{p_i}(\varphi_i), \psi_j \rangle$, $j = 1, \dots, n$, равны нулю. Поскольку $\mathcal{M}^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, N - 2$, имеем $p_i \geq 1$.

Замечание 2. В силу альтернативы Фредгольма (см. [1]) приведенные здесь условия означают разрешимость уравнений

$$B\varphi_i^{(k+1)} = \mathcal{M}^{(k)}(0)z_i, \quad k = 0, 1, \dots, p_i - 1,$$

частные решения которых вида $\varphi_i^{(k+1)} = \Gamma\mathcal{M}^{(k)}(0)z_i$ будем называть *формально $(k+1)$ -присоединенными элементами* к φ_i ; множество элементов $\{\varphi_i^{(k)}\}$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p_i$, где $\varphi_i^{(k+1)} = \varphi_i$, если $\mathcal{M}^{(k)}(0)z_i = 0$, назовем *набором формально присоединенных элементов*, совокупность $\{\varphi_i^{(k)}\}$, $k = 1, \dots, p_i$, — *цепочкой формально присоединенных элементов*, а параметр p_i — *длиной цепочки формально присоединенных элементов*.

Далее для определенности будем считать, что базисные элементы ядра $\{\varphi_i\} \in N(B)$ занумерованы в порядке возрастания длин цепочек формально присоединенных элементов, т.е. $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$. Набор формально присоединенных элементов $\{\varphi_i^{(k)}\}$ назовем *полным*, если выполнено условие $\det \|\langle l_{p_i}(\varphi_i), \psi_j \rangle\| \neq 0$; в этом случае базис ядра сопряженного оператора $\{\psi_i\} \in N(B^*)$ можно перестроить таким образом (см. [1]), что будут выполняться равенства $\langle l_{p_i}(\varphi_i), \psi_j \rangle = \delta_{ij}$. Поэтому далее считаем, что такие перестроения базиса $\{\psi_i\}$ уже осуществлены.

Таким образом, будем предполагать выполненным следующее условие:

(B)

$$\langle l_k(\varphi_i), \psi_j \rangle = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, p_i - 1, \\ \delta_{ij}, & k = p_i, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n,$$

причем

$$\langle l_{p_i+k}(\varphi_i), \psi_j \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, p_n - p_i.$$

Замечание 3. Условие (В) является обобщением понятия полного жорданова набора фредгольмова оператора B относительно оператор-функции вида

$$A + \int_0^t k(s)ds$$

(см. [3]), а в случае $N = 1$ в точности с ним совпадает (см. [12]).

Замечание 4. В силу условия $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ элементы базиса $\{\varphi_i\} \in N(B)$ можно сгруппировать по следующему принципу: в первую группу объединим первые l_1 элементов базиса, у которых длины цепочек формально присоединенных элементов минимальны и равны p_1 ; во вторую группу объединим следующие l_2 элементов базиса, у которых длины цепочек формально присоединенных элементов равны $p_{l_1+1} > p_1$ и т. д.; в последнюю группу объединим элементы базиса, у которых длины цепочек формально присоединенных элементов максимальны и равны p_n . Будем считать, что сформировалось m таких групп; тогда, очевидно, $l_1 + l_2 + \dots + l_m = n$, а для проектора Q в этом случае справедливо естественное прямое разложение

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j, \quad \text{где} \quad \tilde{Q}_j = \sum_{i=l_1+l_2+\dots+l_{j-1}+1}^{i=l_1+l_2+\dots+l_j} Q_i,$$

а в силу условия (В) для введенных проекторов будут выполняться равенства

$$\tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(k)}(0) \tilde{Q}_i = \begin{cases} \delta_{ij} \tilde{Q}_i, & k = p_i, \\ 0, & k \neq p_i. \end{cases} \quad (5)$$

Замечание 5. Далее длины цепочек формально присоединенных элементов для базисных векторов (элементов) ядра $\{\varphi_i\} \in N(B)$, попавших в одну группу с номером j , будем считать равной p_j , коль скоро это не вызывает путаницы.

Введем в рассмотрение ещё одну оператор-функцию $\mathcal{M}_1(t)$, являющуюся резольвентой операторного ядра вида

$$-\sum_{i=1}^n Q_i \mathcal{M}^{(p_i+1)}(t) \theta(t) = -\sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(p_j+1)}(t) \theta(t);$$

тогда в силу замечания 1 и правила дифференцирования свертки обобщенных функций (см. [2]) получаем следующее свойство псевдокоммутирования.

Лемма 2. Если выполнены условия (А) и (В), то

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * G(t) = \\ = G(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t). \end{aligned}$$

Замечание 6. Очевидно, в силу построения резольвенты $\mathcal{M}_1(t)$ выполнено равенство

$$Q\delta(t) * \mathcal{M}_1(t) = \mathcal{M}_1(t).$$

Докажем еще некоторые вспомогательные операторно-сверточные равенства, необходимые в дальнейшем.

Лемма 3. Если выполнены условия (А) и (В), то

$$\left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \mathcal{M}(t)\theta(t) * Q\delta(t) = Q\delta(t); \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
Q\delta(t) + \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \left\{ Q\delta(t) + G(t) * (I - Q)\delta(t) \right\} = \\
= \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * G(t); \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_k(t) = Q\delta(t) * \left[\mathcal{M}^{(p_k+1)}(t)\theta(t) + \left(\mathcal{M}(t)\theta(t) \right)^{(p_k+1)} * Q\delta(t) * \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right] * \tilde{Q}_k \delta(t) \equiv 0, \quad (8)$$

где $k = 1, \dots, m$.

Доказательство. В силу условия **(B)** и в соответствии с равенством (5)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \mathcal{M}(t)\theta(t) * Q\delta(t) &= \sum_{j=1}^m \left(\tilde{Q}_j \delta(t) + \tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(p_j+1)}(t)\theta(t) * Q\delta(t) \right) = \\
&= Q\delta(t) + \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(p_j+1)}(t)\theta(t) * Q\delta(t).
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает справедливость равенства (6). Действительно,

$$\begin{aligned}
\left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \mathcal{M}(t)\theta(t) * Q\delta(t) &= \\
= \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \left(Q\delta(t) + \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(p_j+1)}(t)\theta(t) * Q\delta(t) \right) &= \\
= Q\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) * Q\delta(t) - \mathcal{M}_1(t)\theta(t) * Q\delta(t) &= Q\delta(t).
\end{aligned}$$

Из соотношений (4) и (6) получаем следующую цепочку тождеств:

$$\begin{aligned}
Q\delta(t) + \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \left\{ I\delta(t) - G(t) \right\} * Q\delta(t) &= \\
= Q\delta(t) - \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \mathcal{M}(t)\theta(t) * Q\delta(t) &= Q\delta(t) - Q\delta(t) \equiv 0,
\end{aligned}$$

которая доказывает справедливость равенства (7).

Докажем равенство (8). По правилу дифференцирования обобщенных функций находим

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_k(t) &= Q\delta(t) * \left[\mathcal{M}^{(p_k+1)}(t)\theta(t) + \left(\mathcal{M}(t)\theta(t) \right)^{(p_k+1)} * Q\delta(t) * \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right] * \tilde{Q}_k \delta(t) = \\
&= \left[Q\mathcal{M}^{(p_k+1)}(t)\theta(t) - \sum_{j=1}^m Q\delta(t) * \left(\mathcal{M}^{(p_k+1)}(t)\theta(t) + \mathcal{M}^{(p_k)}(0)\delta(t) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathcal{M}^{(p_k-1)}(0)\delta'(t) + \dots + \mathcal{M}(0)\delta^{(p_k)}(t) \right) * \tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(p_j+1)}(t)\theta(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) \right] * \tilde{Q}_k \delta(t).
\end{aligned}$$

Отсюда в силу соотношений (5) имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_k(t) &= \left[Q\mathcal{M}^{(p_k+1)}(t)\theta(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^k \left(\tilde{Q}_i \mathcal{M}^{(p_i+1)}(t)\theta(t) \right)^{(p_k-p_i)} * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) \right] * \tilde{Q}_k \delta(t).
\end{aligned}$$

После вычисления всех обобщенных производных $\left(\tilde{Q}_i \mathcal{M}^{(p_i+1)}(t)\theta(t) \right)^{(p_k-p_i)}$ и приведения подобных слагаемых получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(t) = & \left[\sum_{j=k+1}^m \tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(p_k+1)}(t) \theta(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t) \theta(t) \right) - \right. \\ & - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{Q}_i \delta(t) * \left(\mathcal{M}^{(p_k)}(0) \delta(t) + \mathcal{M}^{(p_k-1)}(0) \delta'(t) + \dots + \mathcal{M}^{(p_i+1)}(0) \delta^{(p_k-p_i-1)}(t) \right) * \\ & \left. * \left(I\delta(t) - \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(p_j+1)}(t) \theta(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t) \theta(t) \right) \right) \right] * \tilde{Q}_k \delta(t), \end{aligned}$$

откуда вновь в силу соотношений (5) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(t) &= \sum_{j=k+1}^m \tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(p_k+1)}(t) \theta(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t) \theta(t) \right) * \tilde{Q}_k \delta(t) = \\ &= \sum_{j=k+1}^m \tilde{Q}_j \frac{t^{p_j-p_k}}{(p_j-p_k)!} \theta(t) * \frac{d^{p_j-p_k}}{dt^{p_j-p_k}} \left(\tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(p_k+1)}(t) \theta(t) \right) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t) \theta(t) \right) * \tilde{Q}_k \delta(t) = \\ &= \sum_{j=k+1}^m \tilde{Q}_j \frac{t^{p_j-p_k}}{(p_j-p_k)!} \theta(t) * \tilde{Q}_j \delta(t) * \\ &\quad * \left(\mathcal{M}^{(p_j+1)}(t) \theta(t) + \mathcal{M}^{(p_j)}(0) \delta(t) + \mathcal{M}^{(p_j-1)}(0) \delta'(t) + \dots + \mathcal{M}^{(p_k+1)}(0) \delta^{(p_j-p_k-1)}(t) \right) * \\ &\quad * \left(I\delta(t) - \sum_{i=1}^m \tilde{Q}_i \mathcal{M}^{(p_i+1)}(t) \theta(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t) \theta(t) \right) \right) * \tilde{Q}_k \delta(t). \end{aligned}$$

Из этого представления согласно соотношениям (5) окончательно получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(t) &= \sum_{j=k+1}^m \tilde{Q}_j \frac{t^{p_j-p_k}}{(p_j-p_k)!} \theta(t) * \left[\tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(p_j+1)}(t) \theta(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t) \theta(t) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(p_j+1)}(t) \theta(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t) \theta(t) \right) \right] * \tilde{Q}_k \delta(t) \equiv 0. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана. $\square$

3. Теорема о виде фундаментальной оператор-функции.

Теорема 1. Если выполнены условия (A) и B), то интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{L}_N(\delta(t)) = B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)$ имеет на классе распределений с ограниченным слева носителем $K'_+(E_1)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma\delta(t) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left[I\delta(t) - \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t) \theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * G(t) \right] \quad (9)$$

или

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma\delta(t) * \left[I\delta(t) - G(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t) \theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) \right] * \tilde{\mathcal{E}}_N(t). \quad (10)$$

Замечание 7. Эквивалентность этих двух представлений для фундаментальной оператор-функции $\mathcal{E}_N(t)$ следует из леммы 2.

Как следствие из соотношения (7) леммы 3 получаем альтернативную форму записи для $\mathcal{E}_N(t)$.

Теорема 2. Если выполнены условия (A) и (B), то интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{L}_N(\delta(t)) = B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)$ имеет на классе распределений с ограниченным слева носителем $K'_+(E_1)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(t) = \Gamma\delta(t) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * & \left[(I - Q)\delta(t) - \right. \\ & \left. - \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \left\{ Q\delta(t) + G(t) * (I - Q)\delta(t) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1. В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции (см. [12]) покажем, что выполняются два операторно-сверточных равенства:

$$\mathcal{E}_N(t) * \left(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t) \right) * u(t) = u(t) \quad \forall u(t) \in K'_+(E_1), \quad (11)$$

$$\left(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t) \right) * \mathcal{E}_N(t) * v(t) = v(t) \quad \forall v(t) \in K'_+(E_2). \quad (12)$$

Для доказательства тождества (11) воспользуемся представлением (10) для $\mathcal{E}_N(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) &= \mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) * \Gamma\delta(t) * \tilde{B}\delta(t) = \mathcal{E}_N(t) * \left(\tilde{\mathcal{L}}_N(\delta(t)) - Q\delta^{(N)}(t) \right) * \tilde{B}\delta(t) = \\ &= \Gamma\delta(t) * \left[I\delta(t) - G(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) \right] * \left[I\delta(t) - G(t) * Q\delta(t) \right] * \tilde{B}\delta(t). \end{aligned}$$

Доказав равенство

$$\mathcal{F}(t) = \left[I\delta(t) - G(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) \right] * \left[I\delta(t) - G(t) * Q\delta(t) \right] = I\delta(t),$$

получим требуемое утверждение. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) &= I\delta(t) - G(t) * Q\delta(t) - \\ &\quad - G(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \left[I\delta(t) - G(t) \right] * Q\delta(t); \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались свойствами проекторов следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \left[I\delta(t) - G(t) * Q\delta(t) \right] &= \\ &= \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * Q\delta(t) * \left[I\delta(t) - G(t) * Q\delta(t) \right] = \\ &= \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \left[Q^2\delta(t) - Q\delta(t) * G(t) * Q\delta(t) \right] = \\ &= \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * Q\delta(t) * \left[I\delta(t) - G(t) \right] * Q\delta(t) = \\ &= \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \left[I\delta(t) - G(t) \right] * Q\delta(t). \end{aligned}$$

В силу соотношения (4) имеем

$$\mathcal{F}(t) = I\delta(t) - G(t) * Q\delta(t) + G(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \mathcal{M}(t)\theta(t) * Q\delta(t).$$

Осталось проверить, что

$$\mathcal{G}(t) = \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \mathcal{M}(t)\theta(t) * Q\delta(t) = Q\delta(t).$$

По правилам дифференцирования обобщенных функций и в силу соотношений (5) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) &= \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \left(\tilde{Q}_j \mathcal{M}(t) Q\theta(t) \right)^{(p_j+1)} = \\ &= \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \left(\tilde{Q}_j \delta(t) + \tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(p_j+1)}(t)\theta(t) * Q\delta(t) \right) = \\ &= \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \left(Q\delta(t) + \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(p_j+1)}(t)\theta(t) * Q\delta(t) \right) = \\ &= \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \left(I\delta(t) + \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(p_j+1)}(t)\theta(t) \right) * Q\delta(t) = Q\delta(t). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (11) полностью доказано.

Для доказательства тождества (12) воспользуемся представлением (9) для $\mathcal{E}_N(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) &= \left(\tilde{\mathcal{L}}_N(\delta(t)) - Q\delta^{(N)}(t) \right) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \\ &\quad * \left[I\delta(t) - \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * G(t) \right] = \\ &= \left(I\delta(t) - Q\delta(t) * G(t) \right) * \left[I\delta(t) - \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * G(t) \right] = \\ &= I\delta(t) - \left[Q\delta(t) + \left(I\delta(t) - Q\delta(t) * G(t) \right) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) \right] * G(t). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства равенства (12) осталось убедиться, что

$$\mathcal{N}(t) = Q\delta(t) + \left(I\delta(t) - Q\delta(t) * G(t) \right) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) \equiv 0.$$

В силу свойств проекторов, замечания 6 и соотношения (4) имеем

$$\begin{aligned} &\left(I\delta(t) - Q\delta(t) * G(t) \right) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) = \\ &= \left(I\delta(t) - Q\delta(t) * G(t) \right) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * Q\delta(t) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) = \\ &= \left(I\delta(t) - Q\delta(t) * G(t) \right) * \left(Q^2\delta(t) + Q\delta(t) * \mathcal{M}_1(t)\theta(t) * Q\delta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(I\delta(t) - Q\delta(t) * G(t) \right) * Q\delta(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * Q\delta(t) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) = \\
&= \left(Q^2\delta(t) - Q\delta(t) * G(t) * Q\delta(t) \right) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) = \\
&= Q\delta(t) * \left(I\delta(t) - G(t) \right) * Q\delta(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) = \\
&= -Q\delta(t) * \mathcal{M}(t)\theta(t) * Q\delta(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) = \\
&= - \sum_{j=1}^m \left(Q\mathcal{M}(t)\tilde{Q}_j\theta(t) \right)^{(p_j+1)} - \sum_{j=1}^m Q\mathcal{M}(t)Q\theta(t) * \mathcal{M}_1(t)\theta(t) * \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t).
\end{aligned}$$

Однако в силу соотношений (5) и правил дифференцирования обобщенных функций

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m \left(Q\mathcal{M}(t)\tilde{Q}_j\theta(t) \right)^{(p_j+1)} &= \sum_{j=1}^m \left(\tilde{Q}_j\delta(t) + Q\mathcal{M}^{(p_j+1)}(t)\tilde{Q}_j\theta(t) \right) = \\
&= Q\delta(t) + \sum_{j=1}^m Q\mathcal{M}^{(p_j+1)}(t)\theta(t) * \tilde{Q}_j\delta(t).
\end{aligned}$$

Таким образом в обозначениях леммы 3 (см. соотношение (8))

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(t) &= Q\delta(t) - Q\delta(t) - \\
&- Q\delta(t) * \sum_{j=1}^m \left(\mathcal{M}^{(p_j+1)}(t)\theta(t) + \left(\mathcal{M}(t)\theta(t) \right)^{(p_j+1)} * Q\delta(t) * \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * \tilde{Q}_j\delta = - \sum_{j=1}^m \mathcal{F}_j(t) \equiv 0.
\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана. $\square$

Замечание 8. Представленный здесь метод доказательства теоремы 1 может быть адаптирован к доказательству теорем о виде фундаментальной оператор-функции для полных дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов из [4, 12], причем данный метод доказательства компактнее предложенных в [4, 12].

Как было отмечено выше, с помощью фундаментальной оператор-функции можно проводить полное исследование задачи Коши (1)–(2). В обобщенных функциях задачу (1)–(2) можно переписать в виде

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \tilde{u}(t) = F(t), \quad \text{где } F(t) \text{ см. в (3).}$$

Тогда обобщенная функция

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * F(t) &= \mathcal{E}_N(t) * \left(f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \dots + \right. \\
&\quad \left. + Bu_1\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t) \right) \in K'_+(E_1)
\end{aligned}$$

является решением этого уравнения (см. (12)), причем в силу (11) единственным в классе $K'_+(E_1)$.

Наиболее компактным представлением для $\mathcal{E}_N(t)$ будет, если в условии **(B)** все $p_i = N - 1$, а это означает, что фредгольмов оператор B не имеет A -присоединенных элементов (см. [1]). В этом случае фундаментальную оператор-функцию можно переписать в виде

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma\delta(t) * \left[\tilde{\mathcal{E}}_N(t) - G(t) * \left(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \right) * Q\delta(t) * G(t) \right]$$

и с учетом замечания 1 (т.е. с учетом представления $G(t) = I\delta(t) + \mathcal{M}(t)\theta(t)$) после покомпонентного анализа структуры обобщенного решения $\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * F(t) \in K'_+(E_1)$ приходим к выводу, что это регулярная обобщенная функция. В этом случае функция $\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * F(t)$ обладает

необходимой гладкостью и удовлетворяет уравнению (1), а потребовав от нее удовлетворения начальным условиям (2), получаем, как следствие, следующую теорему.

Теорема 3. Если выполнены условия (A) и (B), причем все $p_i = N - 1$, то задача Коши (1)–(2) имеет единственное решение класса $C^N(t \geq 0, E_1)$ в том и только том случае, когда выполнены условия

$$\left\langle Au_i + f^{(i)}(0) + k(0)u_{i-1} + k'(0)u_{i-2} + \dots + k^{(i-2)}(0)u_1 + k^{(i-1)}(0)u_0, \psi_j \right\rangle = 0, \\ i = 0, 1, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

4. Приложения. Аппарат интегро-дифференциальных уравнений в частных производных является одним из средств математического моделирования эволюции физических процессов, на текущее состояние которых усредненно влияет вся предыстория наблюдений. В этом классе проблем выделяются начально-краевые задачи с необратимым оператором при старшей по времени производной.

Рассмотрим несколько аналогов начально-краевых задач из теории вязкоупругости (см. [9]):

$$(\lambda - \Delta) u_{tt} - (\mu - \Delta) u - \int_0^t g(t - \tau) \Delta^2 u(\tau, \bar{x}) d\tau = f(t, \bar{x}), \quad (13)$$

$$(\lambda - \Delta) u_{tt} - (\mu - \Delta^2) u - \int_0^t g(t - \tau) (\lambda^2 - \Delta^2) u(\tau, \bar{x}) d\tau = f(t, \bar{x}), \quad (14)$$

$$(\lambda - \Delta) u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t - \tau) \Delta^2 u(\tau, \bar{x}) d\tau = f(t, \bar{x}), \quad (15)$$

$$(\lambda - \Delta) u_{tt} - (\mu - \Delta) u - \int_0^t g(t - \tau) (\gamma - \Delta) u(\tau, \bar{x}) d\tau = f(t, \bar{x}), \quad (16)$$

$$u|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \quad u_t|_{t=0} = u_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega; \quad u|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (17)$$

где $g(t)$, $f(t, \bar{x})$ — заданные функции, $u = u(t, \bar{x})$ — искомая функция, $\bar{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, Δ — оператор Лапласа, функция $u = u(t, \bar{x})$ определена на цилиндре $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$.

Для задач Коши—Дирихле (13)–(17), (14)–(17) и (15)–(17), где $\mu \neq \lambda$ ($\mu \neq \lambda^2$), банаховы пространства и оператор B зададим следующим образом:

$$E_1 \equiv \left\{ v(\bar{x}) \in W_2^4(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad E_2 \equiv W_2(\Omega), \quad B = \lambda - \Delta, \quad \lambda \in \sigma(\Delta),$$

где $W_2^4(\Omega)$ и $W_2(\Omega)$ — пространства Соболева; оператор A зададим как $(\mu - \lambda)$ в задаче (13)–(17), как $(\mu - \Delta^2)$ в задаче (14)–(17) и как $(-\Delta^2)$ в задаче (15)–(17). Пусть $\varphi_i(\bar{x})$, $i = 1, \dots, n$, — ортонормированный базис пространства решений однородной задачи

$$\lambda \varphi_i = \Delta \varphi_i, \quad \varphi_i|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0.$$

В начально-краевых задачах (13)–(17), (14)–(17) и (15)–(17) $N = 2$, причем

- (i) в задаче (13)–(17) $\langle A\varphi_i, \varphi_j \rangle = (\mu - \lambda)\delta_{ij}$,
- (ii) в задаче (14)–(17) $\langle A\varphi_i, \varphi_j \rangle = (\mu - \lambda^2)\delta_{ij}$,
- (iii) в задаче (15)–(17) $\langle A\varphi_i, \varphi_j \rangle = -\lambda^2\delta_{ij}$;

в терминах теоремы 3 это означает, что все $p_i = 1$ и, следовательно, справедливы следующие три утверждения.

Теорема 4. Задача Коши—Дирихле (13)–(17) однозначно разрешима в классе функций $C^2(t \geq 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда начальные условия (17) и функция $f(t, \bar{x})$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \langle (\mu - \lambda)u_1(\bar{x}) + f'_t(0, \bar{x}) + g(0)\lambda^2 u_0(\bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \rangle &= 0, \\ \langle (\mu - \lambda)u_0(\bar{x}) + f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \rangle &= 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Теорема 5. Задача Коши—Дирихле (14)–(17) однозначно разрешима в классе функций $C^2(t \geq 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда начальные условия (17) и функция $f(t, \bar{x})$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \langle (\mu - \lambda^2)u_1(\bar{x}) + f'_t(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \rangle &= 0, \\ \langle (\mu - \lambda^2)u_0(\bar{x}) + f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \rangle &= 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Теорема 6. Задача Коши—Дирихле (15)–(17) однозначно разрешима в классе функций $C^2(t \geq 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда начальные условия (17) и функция $f(t, \bar{x})$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \langle -\lambda^2 u_1(\bar{x}) + f'_t(0, \bar{x}) + g(0)\lambda^2 u_0(\bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \rangle &= 0, \\ \langle -\lambda^2 u_0(\bar{x}) + f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \rangle &= 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Для начально-краевой задачи (16)–(17), где $\mu \neq \lambda$, положим

$$E_1 \equiv \left\{ v(\bar{x}) \in W_2^2(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad E_2 \equiv W_2(\Omega), \quad B = \lambda - \Delta, \quad A = \mu - \Delta, \quad \lambda \in \sigma(\Delta);$$

тогда ядро интегрального члена является линейной комбинацией операторов A и B , т.е. представимо в виде

$$g(t)(\gamma - \Delta) = \alpha(t)A + \beta(t)B, \quad \text{где} \quad \alpha(t) = \frac{\gamma - \lambda}{\mu - \lambda}g(t), \quad \beta(t) = \frac{\mu - \gamma}{\mu - \lambda}g(t).$$

Тогда в силу теоремы 3 справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. Задача Коши—Дирихле (16)–(17) однозначно разрешима в классе $C^2(t \geq 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда начально-краевые условия (16) и функция $f(t, \bar{x})$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \langle (\mu - \lambda)u_1(\bar{x}) + f'_t(0, \bar{x}) + (\gamma - \lambda)g(0)u_0(\bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \rangle &= 0, \\ \langle (\mu - \lambda)u_0(\bar{x}) + f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \rangle &= 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Замечание 9. Условия разрешимости задачи Коши—Дирихле (16)–(17) можно переписать в следующем эквивалентном виде (см. [7]):

$$\begin{aligned} \langle (\mu - \lambda)^2 u_1(\bar{x}) + (\mu - \lambda)f'_t(0, \bar{x}) - (\gamma - \lambda)g(0)f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \rangle &= 0, \\ \langle (\mu - \lambda)u_0(\bar{x}) + f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \rangle &= 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Исследуя по аналогичной схеме задачу Коши—Дирихле вида

$$(\lambda - \Delta)u_t^{(N)} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t - \tau)\Delta^2 u(\tau, \bar{x})d\tau = f(t, \bar{x}), \quad (18)$$

$$u|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \quad u_t|_{t=0} = u_1(\bar{x}), \quad \dots, \quad u_t^{(N-1)}|_{t=0} = u_{N-1}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega; \quad u|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (19)$$

получаем (в обозначениях теоремы 6) следующее утверждение.

Теорема 8. *Задача Коши—Дирихле (18)–(19) однозначно разрешима в классе $C^N(t \geq 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда начально-краевые условия (19) и функция $f(t, \bar{x})$ удовлетворяют соотношениям*

$$\left\langle -u_i(\bar{x}) + \frac{1}{\lambda^2} f_t^{(i)}(0, \bar{x}) + g(0)u_{i-1}(\bar{x}) + g'(0)u_{i-2}(\bar{x}) + \dots + g^{(i-1)}(0)u_0(\bar{x}), \varphi_j(\bar{x}) \right\rangle = 0,$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, n.$$

5. Заключение. Предложенный в статье метод исследования позволяет строить единственные обобщенные решения по соответствующим формулам. На основе анализа представления для обобщенного решения можно получать единственные решения задач Коши необходимой гладкости и условия их существования. Представленные абстрактные результаты применимы к исследованию иных математических моделей теории колебаний в вязкоупругих средах или в теории электрических цепей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
2. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
3. Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления// в кн.: Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных и их приложения. — Ташкент: ФАН, 1978. — С. 133–148.
4. Фалалеев М. В., Орлов С. С. Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложения в математической теории упругости// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. мат. — 2011. — 4, № 1. — С. 118–134.
5. Фалалеев М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения типа свертки в банаховых пространствах// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. мат. — 2016. — 17. — С. 77–85.
6. Фалалеев М. В. Теория фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах и их приложения// Мат. VI Междунар. конф. «Математика, ее приложения и математическое образование» (Улан-Удэ, 26 июня — 1 июля 2017 г.). — Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2017. — С. 348–353.
7. Фалалеев М. В. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. мат. — 2013. — 6, № 4. — С. 128–137.
8. Федоров В. Е., Борель Л. В. Разрешимость нагруженных линейных эволюционных уравнений с вырожденным оператором при производной// Алгебра и анализ. — 2014. — 26, № 3. — С. 190–205.
9. Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Ferreira J. Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping// Math. Meth. Appl. Sci. — 2001. — 24. — P. 1043–1053.
10. Falaleev M. V. Fundamental operator-valued functions of singular integro-differential operators in Banach spaces// Jour. Math. Sci. — 2018. — 230, № 5. — P. 782–785.
11. Falaleev M. V. Generalized solutions of integro-differential equations of the viscoelasticity theory// Proc. 1st Int. Conf. on Applied Sciences and Engineering 2019 (FICASE 2019) (Ulaanbaatar, Mongolia, April 5-6, 2019). — Ulaanbaatar: MUST, 2019. — P. 42–45.
12. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2002.

Фалалеев Михаил Валентинович

Иркутский государственный университет

E-mail: mvfalaleev@gmail.com