Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Абрамов, Об орбитальной устойчивости малого периодического решения автономной системы дифференциальных уравнений, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 185, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-185-3-12>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:36:47

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 185 (2020). С. 3–12
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-185-3-12

УДК 517.925.52

ОБ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАЛОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2020 г. В. В. АБРАМОВ

Аннотация. Рассматривается нормальная автономная система дифференциальных уравнений с малым параметром, имеющая критическое линейное приближение при нулевом значении параметра. Введено понятие орбитальной устойчивости по параметру, по которому близость правых полутраекторий достигается не только за счет близости начальных значений решений, но и за счет малости параметра. Решается задача о ветвлении устойчивого периодического решения с периодом, близким к периоду решений соответствующей линейной однородной системы. Установлены достаточные условия решения задачи. Для проведения рассуждений использованы свойства первого однородного нелинейного приближения оператора монодромии.

Ключевые слова: автономная система дифференциальных уравнений, малый параметр, качественная теория, малое периодическое решение, орбитальная устойчивость, устойчивость по параметру, оператор монодромии.

ORBITAL STABILITY OF A SMALL PERIODIC SOLUTION OF AN AUTONOMOUS SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2020 V. V. ABRAMOV

ABSTRACT. We consider a normal autonomous system of differential equations with a small parameter, which has a critical linear approximation at zero value of the parameter. We introduce the concept of orbital stability with respect to the parameter; according to this concept, the closeness of the right semitrajectories is achieved not only due to the proximity of initial values of solutions, but also due to the smallness of the parameter. We examine the problem of branching of a stable periodic solution with a period close to the period of solutions of the corresponding linear homogeneous system. Sufficient conditions for the solvability of the problem are established. Our reasonings are based on the properties of the first homogeneous nonlinear approximation of the monodromy operator.

Keywords and phrases: autonomous system of differential equations, small parameter, qualitative theory, small periodic solution, orbital stability, parameter stability, monodromy operator.

AMS Subject Classification: 34C23, 34C25, 34D20

1. Введение. Свойство орбитальной устойчивости периодического решения, в частности при бифуркации типа Хопфа, традиционно устанавливается на основе оценок мультипликаторов для соответствующей системы в вариациях по теореме Андронова–Витта [6, 7, 9, 11, 12, 14]. Так как вопрос об устойчивости при таком подходе решается по линейному приближению системы возмущенных движений, то, по сути, рассматривается некритический случай, в котором исследуется наличие орбитальной асимптотической устойчивости.

Приведем пример, который показывает целесообразность ослабления требований определения орбитальной устойчивости для систем с параметром. Рассмотрим уравнение для траекторий на

полярной плоскости

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho(\mu - \rho)(3\mu - \rho),$$

в котором $\mu \geq 0$ — малый параметр. При $\mu > 0$ это уравнение имеет два орбитально асимптотически устойчивых цикла $\rho = \mu$, $\rho = 3\mu$, которые ограничивают область отталкивания неустойчивого цикла $\rho = 2\mu$. Эту ситуацию можно расценивать иначе — цикл $\rho = 2\mu$ имеет «кольцевую» область устойчивости, т.е. возмущенные траектории остаются в сколь угодно малой окрестности цикла $\rho = 2\mu$ не только за счет малости возмущений начальных значений, но также и за счет малости параметра μ . При этом с практической точки зрения цикл $\rho = 2\mu$ может рассматриваться в качестве устойчивой орбиты. Для формального описания свойства устойчивости малого цикла в случаях такого рода используем идею «устойчивости по параметру» [13], позволяющую ослабить требования определения устойчивости по Ляпунову.

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\dot{y} = Ay + f(y, \mu), \quad (1)$$

в которой $y \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ — малый параметр, функция $f(y, \mu)$ является достаточно гладкой в окрестности точки $(0_{n+1}, 0_m)$, $f(0_{n+1}, \mu) \equiv 0_{n+1}$, $f'_y(0_{n+1}, 0_m) \equiv 0_{(n+1)(n+1)}$. Будем предполагать, что линейное приближение $\dot{y} = Ay$, соответствующее системе (1), при нулевом значении параметра имеет по крайней мере одно ω_0 -периодическое решение.

Определение 1. Будем говорить, что ω -периодическое решение $y(t, \alpha, \mu)$, $y(0, \alpha, \mu) = \alpha$ системы (1) является малым, если для величин α , μ , ω существует совместная параметризация вида

$$\begin{aligned} a &= a(\alpha) = \alpha(a_0 + \bar{a}(\alpha)), \quad a_0 \neq 0_{n+1}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{a}(\alpha) = 0_{n+1}; \\ \mu &= \mu(\alpha) = \alpha(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha)), \quad \mu_0 \neq 0_m, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{\mu}(\alpha) = 0_m; \\ \omega &= \omega(\alpha), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \omega(\alpha) = \omega_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее решение, удовлетворяющее определению 1, будем называть решением вида (2).

Рассмотрим траекторию $T = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : y = y(t, a, \omega), t \in [0, \omega]\}$ малого периодического решения вида (2) и ее ε -окрестность $U(T, \varepsilon)$.

Для исследования устойчивости решения вида (2) системы (1) естественно ввести α в качестве малого параметра в правую часть системы (1). Поэтому целесообразно ввести следующее определение.

Определение 2. Малое ω -периодическое решение вида (2) системы (1) орбитально α -устойчиво, если для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta > 0$, что при всех величинах a_1 , α , удовлетворяющих условиям $a_1 \in U(T, \delta)$, $\alpha < \delta$, и при всех $t > 0$ имеет место включение $y(t, a_1, \mu(\alpha)) \in U(T, \delta)$.

Заметим, что если малое решение орбитально устойчиво, то оно обладает свойством устойчивости по определению 2. Однако свойство орбитальной α -устойчивости может иметь место и для орбитально неустойчивого решения.

Задача. Для системы (1) найти условия существования малого устойчивого ω -периодического решения вида (2).

2. Существование малого периодического решения. Для определения зависимости периода решения от начального значения и от параметра выполним в системе (1) замену независимой переменной $t = (1 + \lambda)\tau$, где λ — малый параметр [10]. Получим систему вида

$$\frac{dv}{d\tau} = Av + \lambda Av + (1 + \lambda)f(v, \mu). \quad (3)$$

Обозначим $g(y, \mu) = Ay + f(y, \mu)$ правую часть системы (1). Допустим, что $y(t, a, \mu)$ — ω -периодическое решение системы (1), т.е. $\dot{y}(t, a, \mu) \equiv g(y(t, a, \mu), \mu)$ при $t \in [0, \omega]$. Умножив тождество

на $d\tau/dt$, имеем

$$\frac{dy((1+\lambda)\tau, a, \mu)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} \equiv \frac{dy((1+\lambda)\tau, a, \mu)}{dt} \cdot \frac{1}{1+\lambda} \equiv g(y((1+\lambda)\tau, a, \mu), \mu),$$

при $\tau \in \left[0, \frac{\omega}{1+\lambda}\right]$. Следовательно, $\frac{\omega}{1+\lambda}$ -периодическая функция $v(\tau, a, \lambda, \mu) = y((1+\lambda)\tau, a, \mu)$ — решение системы (3). Очевидно, что проведенные вычисления можно обратить. Итак, в силу автономности систем (1) и (3) справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Система (1) имеет решение $y(t, a, \mu)$ с периодом $\omega = (1+\lambda)\omega_0$ тогда и только тогда, когда система (3) имеет ω_0 -периодическое решение $v(\tau, a, \lambda, \mu)$, $v(0, a, \lambda, \mu) = a$.

Для поиска условий существования периодического решения системы (3) применим результаты работ [1,4]. Пусть $X(\tau) = \exp(\tau A)$. Решение системы (3) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(\tau, a, \lambda, \mu) = X(\tau)a + \lambda X(\tau) \int_0^\tau X(-s)Av(s, a, \lambda, \mu)ds + (1+\lambda)X(\tau) \int_0^\tau X(-s)f(v(s, a, \lambda, \mu), \mu)ds.$$

Так как матрицы $X(\tau)$, $X(-\tau)$, A коммутируют, то

$$X(\tau) \int_0^\tau X(-s)AX(s)ds = \tau X(\tau)A.$$

В силу локальной гладкости функции $f(y, \mu)$ оператор монодромии системы (3) можно представить в виде

$$v(\omega_0, a, \lambda, \mu) = Xa + q(a, \lambda, \mu) + \psi(a, \lambda, \mu), \quad (4)$$

в котором $X = X(\omega_0)$ — матрица монодромии, $q(a, \lambda, \mu) = \omega_0 \lambda X A a + p(a, \mu)$ — первое нелинейное однородное приближение оператора монодромии. Векторная форма $p(a, \mu)$ порядка $k > 1$ и функция $\psi(a, \lambda, \mu)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} p(a, \mu) + \tilde{p}(a, \mu) &= X \int_0^{\omega_0} X(-s)f(X(-s), a, \mu)ds, \\ p(\alpha a, \alpha \mu) &= \alpha^k p(a, \mu), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|\tilde{p}(\alpha a, \alpha \mu)\| \equiv 0, \\ \psi(a, \lambda, \mu) &= \lambda X \int_0^{\omega_0} X(-s)Av(s, a, \lambda, \mu)ds + (1+\lambda)X \int_0^{\omega_0} X(-s)f(v(s, a, \lambda, \mu), \mu)ds - q(a, \lambda, \mu), \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|\psi(\alpha a, \alpha^{k-1}\lambda, \alpha \mu)\| &\equiv 0, \end{aligned}$$

Из условия (4) следует, что $v(\tau, a, \lambda, \mu)$ — ω_0 -периодическое решение системы (3) тогда и только тогда, когда величины a , λ , μ удовлетворяют уравнению

$$[X - E_{n+1}]a + q(a, \lambda, \mu) + \psi(a, \lambda, \mu) = 0_{n+1}. \quad (5)$$

Здесь и далее E_{n+1} — $(s \times s)$ -матрица.

По условию, система $\dot{y} = Ay$ имеет ω_0 -периодическое решение, т.е. справедливо равенство

$$\det(X - E_{n+1}) = 0. \quad (6)$$

Допустим, $r \dim\{\ker[X - E_{n+1}]\}$ при условии (6). Для линейной системы $[X - E_{n+1}]a = 0_{n+1}$ вычислим фундаментальную $(n+1) \times r$ -матрицу решений K . Выполним подстановку $a = Kh$, в которой $h \in \mathbb{R}^r$ — произвольный вектор. Тогда уравнение (5) примет вид

$$q(Kh, \lambda, \mu) + \psi(Kh, \lambda, \mu) = 0_{n+1}. \quad (7)$$

Допустим, что существуют значения $a_0 = Kh_0 \neq 0_{n+1}$, $\lambda_0, \mu_0 \neq 0_m$, удовлетворяющие условиям

$$q(a_0, \lambda_0, \mu_0) = 0_{n+1}, \quad (8)$$

$$\text{rang } Q = n + 1, \quad (9)$$

в которых $(n + 1) \times (r + m + 1)$ -матрица $Q = \frac{\partial q(Kh_0, \lambda_0, \mu_0)}{\partial(h, \lambda, \mu)}$, $r + m \geq n$, имеет вид

$$Q = \left[\omega_0 \lambda_0 X A + p'_a(a_0, \mu_0) \right] K \omega_0 X A a_0 p'_\mu(a_0, \mu_0) \Big].$$

Заметим, что условия (6) и (8) необходимы для ветвления малого периодического решения системы (3) (см. [4]).

Теорема 1. Если выполняются условия (6), (8), (9), то система (1) имеет малое решение вида (2) с периодом $\omega = (1 + \lambda)\omega_0$, $\lambda = \alpha^{k-1}(\lambda_0 + \bar{\lambda}(\alpha))$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{\lambda}(\alpha) = 0$.

Доказательство. Подставим в уравнение (7) величины

$$h = \alpha(h_0 + \bar{h}), \quad \lambda = \alpha^{k-1}(\lambda_0 + \bar{\lambda}), \quad \mu = \alpha(\mu_0 + \bar{\mu}), \quad \alpha > 0.$$

Введем обозначение $u = \text{col}(\bar{h}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$. По условию (8) уравнение (7) преобразуется к виду $\alpha^k Qu + \varphi(\alpha, u) = 0_{n+1}$, в котором с учетом равенства (9) выберем разложение

$$Qu = Q_1 u_1 + Q_2 u_2,$$

Q_1 — $(n + 1) \times (n + 1)$ -матрица, составленная из линейно независимых столбцов матрицы Q , матрица Q_2 составлена из остальных столбцов матрицы Q , векторы u_1, u_2 составлены из компонент вектора u с номерами, соответствующими номерам указанных столбцов,

$$\varphi(\alpha, u) = \psi(Kh, \lambda, \mu) - \alpha^k q(K(h_0 + \bar{h}), \lambda_0 + \bar{\lambda}, \mu_0 + \bar{\mu}).$$

Выберем $u_2 = 0_{n+1-r-m}$. Разделим преобразованное уравнение на α^k . Так как

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|\psi(\alpha a, \alpha^{k-1} \lambda, \alpha \mu)\| \equiv 0,$$

то в силу условия (8) функцию $\bar{\varphi}(\alpha, u_1) = \alpha^{-k} \varphi(\alpha, u)$ можно определить до непрерывной при $\alpha \rightarrow 0$ следующим образом: $\bar{\varphi}(0, 0_{n+1}) = 0_{n+1}$, $\bar{\varphi}'_{u_1}(0, 0_{n+1}) = 0_{(n+1)(n+1)}$. Итак, для определения зависимости вектора u_1 от параметра α получим уравнение

$$F(\alpha, u_1) = Q_1 u_1 + \bar{\varphi}(\alpha, u_1) = 0_{n+1}. \quad (10)$$

Так как выполняются условия $F(0, 0_{n+1}) = 0_{n+1}$, $\bar{F}'_{u_1}(0, 0_{n+1}) = \det Q_1 = 0$, то уравнение (10) определяет неявную функцию $u_1(\alpha)$ при $\alpha \in [0, \Delta)$, где Δ — некоторое достаточно малое число, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_1(\alpha) = 0_{n+1}$. Выполнив обратные подстановки, перейдем к исходным переменным и получим величины

$$h = h(\alpha) = \alpha^{k+1}(\lambda_0 + \bar{h}(\alpha)), \quad \lambda = \lambda(\alpha) = \alpha(h_0 + \bar{\lambda}(\alpha)), \quad \mu = \mu(\alpha) = \alpha(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha)),$$

которые удовлетворяют уравнению (7) при $\alpha \in [0, \Delta)$. При этом величины $a = a(\alpha) = Kh(\alpha)$, $\lambda = \lambda(\alpha)$, $\mu = \mu(\alpha)$ удовлетворяют уравнению (5) при $\alpha \in [0, \Delta)$, т.е. определяют малое ω_0 -периодическое решение $\bar{v} = \bar{v}(\tau, \alpha) = v(\tau, a(\alpha), \lambda(\alpha), \mu(\alpha))$ системы (3). Тогда в силу леммы 1 система (1) имеет решение вида (2) с периодом $\omega = (1 + \lambda(\alpha))\omega_0$. Теорема 1 доказана. $\square$

3. Устойчивость малого периодического решения. В силу леммы 1 траектория периодического решения вида (2) и траектория соответствующего решения $\bar{v} = \bar{v}(\tau, \alpha)$ системы (3) совпадают, отличаясь лишь способом параметризации. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Решение вида (2) системы (1) орбитально α -устойчиво тогда и только тогда, когда соответствующее малое ω_0 -периодическое решение $\bar{v} = \bar{v}(\tau, \alpha)$ системы (3) орбитально α -устойчиво.

Для исследования малого периодического решения в условиях теоремы 1 на устойчивость по определению 2 выполним в окрестности траектории этого решения преобразование переменных [8].

Зададим подвижную ортогональную плоскость π_τ к траектории периодического решения $\bar{v}$ системы (3) как множество векторов v , удовлетворяющих условию

$$\pi_\tau : (v - \bar{v})^T \bar{v}_1 = 0, \quad (11)$$

в котором $\bar{v}_1 = d\bar{v}_1/d\tau$ — направляющий вектор к траектории решения $\bar{v}$ в данный момент.

В систему (3) введем параметр α , который по теореме 1 согласует начальное значение малого периодического решения с параметрами системы, выбрав $\lambda = \lambda(\alpha)$, $\mu = \mu(\alpha)$, и получим систему

$$\frac{dv}{d\tau} = \tilde{f}(v, \alpha) = Av + \lambda(\alpha)Av + (1 + \lambda(\alpha))f(v, \mu(\alpha)). \quad (12)$$

Рассмотрим в начальный момент плоскость π_0 . В малой окрестности начального значения периодического решения $\bar{v} = \bar{v}(\tau, \alpha)$ системы (3) произвольно выберем начальное значение $a = v(0, a, \lambda(\alpha), \varepsilon(\alpha))$ возмущенного решения $v(\tau, a, \lambda(\alpha), \varepsilon(\alpha))$. Допустим, что $\theta = \theta(\tau, a)$ — момент первого пересечения траектории возмущенного решения с плоскостью π_τ , т.е.

$$z = z(\tau, a, \alpha) = v(\theta, a, \alpha) - \bar{v}(\theta, a, \alpha) \in \pi_\tau.$$

При этом $z^T \bar{v}_1 = 0$ по условию (11).

Составим систему дифференциальных уравнений для переменной z . С этой целью вычислим

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\tau} - \bar{v}_1. \quad (13)$$

В силу равенства (11) справедливо соотношение

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^T \bar{v}_1 = z^T \bar{v}_2, \quad (14)$$

в котором $\bar{v}_2 = \bar{v}_1/d\tau$. Учтем, что функция $v(\theta, a, \alpha) = z(\tau, a, \alpha) + \bar{v}(\tau, \alpha)$ удовлетворяет системе (12), т.е.

$$\frac{dv(\theta, a, \alpha)}{d\theta} \equiv \tilde{f}(z(\tau, a, \alpha) + \bar{v}(\tau, \alpha), \alpha).$$

Поэтому, скалярно умножив равенство (13) на $\bar{v}_1$, в силу равенства (14) получим соотношение

$$(\tilde{f}(z + \bar{v}, \alpha))^T \bar{v}_1 \frac{d\theta}{d\tau} - \bar{v}_1^2 + z^T \bar{v}_2 = 0, \quad (15)$$

где $\bar{v}_1^2 = (\bar{v}_1)^T \bar{v}_1$. Итак, с помощью равенств (13) и (15) получим систему уравнений

$$\frac{dz}{d\tau} = \tilde{f}(z, \alpha) = w(z, \alpha)\tilde{f}(z + \bar{v}, \alpha) - \bar{v}_1, \quad (16)$$

в которой

$$w(z, \alpha) = \frac{\bar{v}_1^2 - z^T \bar{v}_2}{(\tilde{f}(z + \bar{v}, \alpha))^T \bar{v}_1}.$$

Так как ω_0 -периодическое решение $\bar{v} = \bar{v}(\tau, \alpha)$ системы (3) при малых $\alpha > 0$ имеет вид

$$\bar{v} = \alpha(X(\tau)a_0 + \eta(\tau, \alpha)),$$

$$\eta(\tau, \alpha) = \alpha^{-1}X(\tau) \int_0^\tau X(-s)(\lambda(\alpha)A\bar{v} + (1 + \lambda(\alpha))f(\bar{v}, \mu(\alpha)))ds, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\eta(\tau, \alpha)\| \equiv 0,$$

то справедливо равенство

$$w(z, \alpha) = \frac{\frac{\bar{v}_1^2}{\alpha} - z^T \left(A^2 X(\tau)a_0 + \frac{d^2 \eta(\tau, \alpha)}{d\tau^2} \right)}{(Az + f(z, \alpha))^T \left(AX(\tau)a_0 + \frac{d\eta(\tau, \alpha)}{d\tau} \right)}.$$

Определим локальную структуру правой части системы (16) в окрестности нулевого решения. С этой целью введем систему координат на плоскости π_τ . Конкретизируем условие (6). Допустим, что в системе (1) при нулевом значении параметра матрица линейного приближения имеет блочно-диагональную форму

$$A = \text{diag}(A_1, A_2), \quad (17)$$

где A_2 — $l \times l$ -матрица в жордановой нормальной форме, имеющая только нулевые или чисто мнимые $\pm i\beta$ собственные значения, для которых выполняется условие

$$\frac{\beta}{2\pi/\omega_0} \in \mathbb{N}, \quad l \leq r.$$

При этом $A_2^T = -A_2$, $\exp(\omega_0 A_2) = E_l$, A_2^2 — диагональная матрица. С учетом равенства (17) по условиям теоремы 1 направление ветвления периодического решения в фазовом пространстве определяется вектором вида $a_0 = (0, \dots, 0, c^{n+1})$, $c^{n+1} \in \mathbb{R}^l$. Без ограничения общности рассуждений будем предполагать, что $\|c^{n+1}\|_2 = 1$ (здесь и далее $\|\cdot\|_2$ — евклидова норма).

Для траектории решения $\bar{v} = \bar{v}(\tau, \alpha)$ выберем нормированный направляющий вектор касательной

$$b_{n+1}(\tau, \alpha) = \frac{d\bar{v}}{d\tau} / \left\| \frac{d\bar{v}}{d\tau} \right\|_2 = \bar{b}_{n+1}(\tau) + \lambda_{n+1}(\tau, \alpha),$$

в котором

$$\begin{aligned} \bar{b}_{n+1}(\tau) &= (0_{n+1-l}, P(\tau)c^{n+1}), \quad P(\tau) = \omega_0^{-1} A_2 X_2(\tau), \\ X_2(\tau) &= \exp(\tau A_2), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\lambda_{n+1}(\tau, \alpha)\| \equiv 0. \end{aligned}$$

При этом вектор $b_{n+1}(\tau, \alpha)$ — нормаль к плоскости π_τ . Выберем векторы $c^{n+j} \in \mathbb{R}^l$, $j = \overline{2, l}$, образующие вместе с вектором c^{n+1} ортонормированную систему. В силу условия (17) справедливости равенства $P^T(\tau)P(\tau) \equiv E$, $\|P(\tau)\|_2 \equiv 1$. Поэтому векторы $\bar{b}_{n+j}(\tau) = (0_{n+1}, P(\tau)c^{n+j})$, $j = \overline{1, l}$, тождественно образуют ортонормированную систему. Из столбцов c^{n+j} , $j = \overline{1, l}$, составим ортогональную $l \times l$ -матрицу C . Таким образом, построена ортогональная матрица $B = B(\tau, \alpha) = \bar{B}(\tau) + \Lambda(\tau, \alpha)$, в которой $\bar{B}(\tau) = \text{diag}(E_{n+1-l}, P(\tau)C)$, матрица $\Lambda(\tau, \alpha)$ содержит последний столбец $\lambda_{n+1}(\tau, \alpha)$ и удовлетворяет условию $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\Lambda(\tau, \alpha)\| \equiv 0$.

Выполним замену переменной $z = B\bar{x}$ в системе (16). Учитывая ортогональность матрицы B , получим $B^{-1} = B^T(\tau)$. Продифференцируем равенство $\bar{x} = B^T z$ и преобразуем систему (16) к виду

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = B^T \tilde{f}(B\bar{x}, \alpha) + \left[\frac{dB}{d\tau} \right]^T B\bar{x} = \bar{g}(\tau, \bar{x}, \alpha). \quad (18)$$

При $\alpha = 0$ справедливо равенство

$$\left[\frac{d\bar{B}(\tau)}{d\tau} \right]^T \bar{B}(\tau) = \text{diag} \left[0_{n+1-l}, \left(\frac{dP(\tau)}{d\tau} C \right)^T \right] \text{diag}(E_{n+1-l}, P(\tau)C).$$

Так как $A_2 X_2(\tau) = X_2(\tau) A_2$, то $P^T \frac{dP(\tau)}{d\tau} = -A_2$. Следовательно,

$$\left[\frac{dB}{d\tau} \right]^T B = \text{diag}(0_{n+1-l}, -C^T A_2 C) + \tilde{\Lambda}(\tau, \alpha), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\tilde{\Lambda}(\tau, \alpha)\| \equiv 0.$$

Так как $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\bar{v}\| \equiv 0$, то $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\bar{v}_1^2/\alpha\| \equiv 0$. По условию (17) справедливо равенство

$$(\bar{B}\bar{x})^T [A^T + A] A X(\tau) a_0 = 0_{n+1}.$$

Поэтому, определив функцию $w(z, \alpha)$ из системы (16) до непрерывной при $\alpha \rightarrow 0$, при $\alpha = 0$ получим равенство

$$\begin{aligned} w(B(\tau, 0)\bar{x}, 0) &= \frac{-(\bar{B}\bar{x})^T A^2 X(\tau) a_0}{(A\bar{B}\bar{x} + f(\bar{B}\bar{x}, 0))^T A X(\tau) a_0} = \\ &= \frac{(\bar{x}^T \bar{B}^T A^T + (f(\bar{B}\bar{x}, 0))^T) A X(\tau) a_0}{(A\bar{B}\bar{x} + f(\bar{B}\bar{x}, 0))^T A X(\tau) a_0} - \frac{((\bar{B}\bar{x})^T [A^T + A] + (f(\bar{B}\bar{x}, 0))^T) A X(\tau) a_0}{(A\bar{B}\bar{x} + f(\bar{B}\bar{x}, 0))^T A X(\tau) a_0} = \\ &= 1 - \frac{(f(\bar{B}\bar{x}, 0))^T A X(\tau) a_0}{(A\bar{B}\bar{x} + f(\bar{B}\bar{x}, 0))^T A X(\tau) a_0}. \end{aligned}$$

Следовательно, в окрестности точки $\bar{x} = 0_{n+1}$ имеет место разложение

$$w(B(\tau, 0)\bar{x}, 0) = 1 - \bar{w}(\tau, \bar{x}) + \tilde{w}(\tau, \bar{x}), \quad (19)$$

в котором

$$\bar{w}(\tau, \bar{x}) = \frac{(f(\bar{B}\bar{x}, 0))^T A X(\tau) a_0}{(A\bar{B}\bar{x})^T A X(\tau) a_0},$$

функция $\tilde{w}(\tau, \bar{x})$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\|\tilde{w}(\tau, \gamma \bar{x})\|}{\|\bar{w}(\tau, \gamma \bar{x})\|} \equiv 0.$$

С учетом равенства (19) правая часть системы (18) при $\alpha = 0$ имеет вид

$$\bar{g}(\tau, \bar{x}, 0) = \bar{B}^T w(\bar{B}\bar{x}, 0)(A\bar{B}\bar{x} + f(\bar{B}\bar{x}, 0_m)) + \left[\frac{d\bar{B}}{d\tau} \right]^T \bar{B}\bar{x} = D\bar{x} + \bar{\varphi}(\tau, \bar{x}) + \tilde{\varphi}(\tau, \bar{x}),$$

где

$$\bar{D} = \bar{B}^T A \bar{B} + \left[\frac{d\bar{B}}{d\tau} \right]^T \bar{B} = \text{diag}(A_1, 0_l), \quad \bar{\varphi}(\tau, \bar{x}) = \bar{B}^T (f(\bar{B}\bar{x}, 0_m) - \bar{w}(\tau, \bar{x}) A \bar{B}\bar{x}),$$

функция $\tilde{\varphi}(\tau, \bar{x})$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\|\tilde{\varphi}(\tau, \gamma \bar{x})\|}{\|\bar{\varphi}(\tau, \gamma \bar{x})\|} \equiv 0.$$

Итак, систему (18) запишем в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = \bar{g}(\tau, \bar{x}, \alpha) = \bar{D}\bar{x} + \bar{\varphi}(\tau, \bar{x}) + \tilde{\varphi}(\tau, \bar{x}) + \tilde{\tilde{\varphi}}(\tau, \bar{x}, \alpha), \quad (20)$$

$\bar{g}(\tau, 0_{n+1}, \alpha) \equiv 0_{n+1}$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\tilde{\tilde{\varphi}}(\tau, \bar{x}, \alpha)\| \equiv 0$. Для системы (20) в силу проведенных преобразований инвариантно множество $\Pi = \{\bar{x} = (x, 0)\}$ [8]. В системе (20) выберем $\bar{x} = (x, 0)$, исключим последнее уравнение и получим систему с ω_0 -периодической по τ правой частью вида

$$\frac{dx}{d\tau} = g(\tau, x, \alpha) = Dx + \varphi(\tau, x) + \varphi_1(\tau, x) + \varphi_2(\tau, x, \alpha), \quad (21)$$

в которой $g(\tau, x, \alpha) = \bar{E}_{n+1} \bar{g}(\tau, (x, 0), \alpha)$, $n \times (n+1)$ -матрица $\bar{E}_{n+1}$ получена из E_{n+1} вычеркиванием последней строки, $g(\tau, 0_n, \alpha) \equiv 0_n$, $D = \text{diag}(A_1, 0_{(l-1)(l-1)})$, $\varphi(\tau, x) = \bar{E}_{n+1} \bar{\varphi}(\tau, (x, 0)$, функции $\varphi_1(\tau, x)$, $\varphi_2(\tau, x, \alpha)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\|\varphi_1(\tau, \gamma x)\|}{\|\varphi(\tau, \gamma x)\|} \equiv 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\varphi_2(\tau, x, \alpha)\| \equiv 0.$$

Для решения $x = 0_n$ системы (21) используем определение устойчивости по параметру [2, 3].

Определение 3. Решение $x = 0_n$ системы вида (21) α -устойчиво, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого решения $x(\tau, b, \alpha)$ из условий $x(0, b, \alpha) = b \in U(0_n, \delta)$ и $\alpha < \delta$ при всех $\tau > 0$ следует справедливость неравенства $\|x(\tau, b, \alpha)\| \leq \varepsilon$.

Определение 3, по сути, повторяет определение устойчивости из монографии [13], в которой для исследования применена комбинация метода усреднения и метода функций Ляпунова. В данной работе для исследования устойчивости будет применена оценка оператора монодромии. В отличие от определения устойчивости по Ляпунову, по определению 3 возмущения сколь угодно малы, если достаточно малы начальное значение и параметр. Поэтому α -устойчивым может быть и неустойчивое по Ляпунову нулевое решение. Однако, если при нулевом значении параметра нулевое решение асимптотически устойчиво, то оно α -устойчиво [13]. Такого рода случай можно рассматривать как некритический в случае устойчивости по параметру.

В силу преобразований, проведенных при построении системы (21), получаем следующее утверждение, которое по смыслу и по способу доказательства аналогично теореме 25 в [8].

Лемма 3. *Малое периодическое решение $\bar{v}$ системы (3) орбитально α -устойчиво тогда и только тогда, когда решение $x = 0_n$ системы (21) α -устойчиво.*

Для применения леммы 3 исследуем локальную структуру оператора монодромии системы (21).

При $\alpha = 0$ линейное приближение $dx/d\tau = Dx$ системы (21) имеет фундаментальную матрицу $Y(\tau) = \text{diag}(\exp(\tau A_1), E_{l-1})$. Выделим первое однородное нелинейное приближение от фазовой переменной для оператора монодромии системы (21). В силу гладкости функции $\varphi(\tau, x)$ получим разложение

$$Y \int_0^{\omega_0} Y(-s) \varphi(s, Y(s)b) ds = u(b) + \bar{u}(b),$$

в котором $Y = Y(\omega_0)$, $u(\gamma b) = \gamma^k u(b)$, $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma^{-k} \|\bar{u}(\gamma b)\| \equiv 0$. При этом правый оператор монодромии системы (21) имеет вид

$$x(\omega_0, b, \alpha) = Yb + u(b) + \tilde{u}(b, \alpha) + \tilde{\tilde{u}}(b, \alpha), \quad (22)$$

где функции $\tilde{u}(b, \alpha)$, $\tilde{\tilde{u}}(b, \alpha)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \tilde{u}(b, \alpha) + \tilde{\tilde{u}}(b, \alpha) &= Y \int_0^{\omega_0} Y(-s) (\varphi(s, x(s, b, \alpha)) + \varphi_1(s, x(s, b, \alpha)) + \varphi_2(s, x(s, b, \alpha))) ds - u(b), \\ \lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma^{-k} \|\tilde{u}(\gamma b, \alpha)\| &\equiv 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\tilde{u}(b, \alpha)\| \equiv 0. \end{aligned}$$

По формуле Эйлера для однородной функции имеет место разложение

$$u(b) = U(b)b, \quad U(b) = \frac{1}{k} \frac{\partial u(b)}{\partial b}.$$

Применив к системе (21) результаты работ [2, 3, 5], в силу лемм 2 и 3 получим, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

- (i) справедливо равенство (17);
- (ii) выполняются условия теоремы 1, в которых $a_0 = (0, \dots, 0, c^{(n+1)})$;
- (iii) для любого λ , удовлетворяющего условию $\|\lambda\| = 1$, и достаточно малого $\gamma > 0$ справедлива оценка

$$\|Y + \gamma U(\lambda)\| \leq 1 - \sigma\gamma, \quad \sigma > 0.$$

Тогда система (1) имеет орбитально α -устойчивое малое решение вида (2) с периодом

$$\omega = (1 + \lambda)\omega_0, \quad \text{где} \quad \lambda = \alpha^{k-1}(\lambda_0 + \bar{\lambda}(\alpha)), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{\lambda}(\alpha) = 0.$$

Доказательство. По условиям (i), (ii) система (1) имеет малое решение вида (2). В силу леммы 3 сведем исследование устойчивости этого решения по определению 3 к оценке нормы оператора монодромии системы (21). С этой целью вначале установим вспомогательные утверждения.

1. Нулевое решение системы (21) α -устойчиво тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, при котором из неравенств $\|b\| < \delta$, $\alpha < \delta$ следует, что значение $x(s\omega_0, b, \alpha)$ определено при всех $s \in \mathbb{N}$ и справедлива оценка $\|x(s\omega_0, b, \alpha)\| < \varepsilon$.

2. Установим справедливость утверждения из п. 1. Необходимость данного утверждения очевидна, если в определении 3 взять $\tau = s\omega$. Установим достаточность. В силу локальной продолжимости решений системы (21) число δ можно считать таким, что любое решение $x(\tau, x(s\omega_0, b, \alpha), \alpha)$ для каждого $s \in \mathbb{N}$ определено при $\tau \in [0, \omega_0]$, если $\|x(s\omega_0, b, \alpha)\| < \varepsilon$, т.е. продолжаемо вправо от момента $s\omega_0$. Значит, в условиях утверждения из пункта 1 любое решение $x(\tau, b, \alpha)$ нелокально продолжаемо вправо. В силу непрерывной зависимости решений системы (21) от начальных значений и параметров можно считать, что $\delta < \varepsilon$ и $\|x(\tau, b, \alpha)\| < \varepsilon$ при любых $\tau \in [0, \omega_0)$, если $\|b\| < \delta$, $\alpha < \delta$. Следовательно, по групповому свойству решений для произвольного $\tau = s\omega_0 + \xi$, $s = [\tau/\omega_0]$, при $\|b\| < \delta$, $\alpha < \delta$ получим оценку

$$\|x(\tau, b, \alpha)\| = \|x(\xi, x(s\omega_0, b, \alpha), \alpha)\| < 0,$$

т.е. нулевое решение системы (21) устойчиво по определению 3.

3. Если для любого $\delta_1 > 0$ существует такое $\delta_2 > 0$, что при $\|b\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ справедлива оценка $\|x(\omega_0, b, \alpha)\| < \|b\|$, то нулевое решение α -устойчиво.

4. Установим справедливость утверждения из пункта 3. Произвольно выберем $\varepsilon > 0$. При $\delta_1 = \varepsilon$ подберем значение δ_2 . Получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, для которого из неравенств $\|b\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ следует, что $\|x(\omega_0, b, \alpha)\| < \varepsilon$. Тогда по индукции устанавливается, что значение $x(s\omega_0, b, \alpha)$ определено при всех $s \in \mathbb{N}$ и справедлива оценка $\|x(s\omega_0, b, \alpha)\| < \varepsilon$. То есть на основе утверждения из пункта 1 нулевое решение устойчиво по определению 3.

5. Далее в доказательстве используем достаточное условие устойчивости из п. 4. Равенство (22) запишем в виде

$$x(\omega_0, b, \alpha) = [Y + U(b) + G(\alpha, b) + V(\alpha, b)]b, \quad (23)$$

в котором матрицы $G(\alpha, b)$, $V(\alpha, b)$ удовлетворяют условиям

$$G(\alpha, b)b = \tilde{u}(b, \alpha), \quad V(\alpha, b) = \tilde{u}(b, \alpha), \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{1-k} \|G(\alpha, \beta b)\| \equiv 0, \quad V(0, b) \equiv 0_{nn}.$$

В равенство (23) подставим $b = \beta\lambda$, $\|\lambda\| = 1$. Выберем число $\delta_1 > 0$ так, чтобы при всех β : $\beta < \delta_1$ и α : $\alpha < \delta_1$ выполнялось неравенство

$$\|G(\alpha, \beta\lambda)\| \leq \frac{\beta^{k-1}b_2}{4}.$$

Существует δ_2 : $0 < \delta_2 \leq \delta_1$, для которого из условия $\alpha < \delta_2$ при всех β : $\delta_1/2 \leq \beta < \delta_1$ верна оценка

$$\|V(\alpha, \beta\lambda)\| \leq \frac{\beta^{k-1}b_2}{4}.$$

Без ограничения общности

$$\|Y + U(b) + G(\alpha, b) + V(\alpha, b)\| < 2,$$

если $\alpha < \delta_2$ и $\beta < \delta_1/2$, при этом

$$\|x(\omega_0, b, \alpha)\| \leq 2\|b\| < \delta_1.$$

Если же $\alpha < \delta_2$ и $\delta_1/2 < \beta < \delta_1$, то

$$\|x(\omega_0, b, \alpha)\| \leq \left(1 - \frac{\beta^{k-1}b_2}{2}\right) \|b\| < \delta_1.$$

Итак, произвольно выбрав $\varepsilon > 0$, получим, что $\|x(\omega_0, b, \alpha)\| < \varepsilon$ для всех b : $\|b\| < \delta = \min\{\varepsilon, \delta_1\}$ и $\alpha < \delta_2$. Тогда в силу утверждения из пункта 3 нулевое решение системы (23) устойчиво по определению 3. Итак, по леммам 2 и 3 малое периодическое решение вида (2) системы (1) устойчиво по определению 2. Теорема 2 доказана. $\square$

Заметим, что при условии (iii) теоремы 2 нулевое решение системы (21) асимптотически устойчиво [5]. То есть в данном случае рассмотрен не критический случай устойчивости по определению 3. При этом для орбитальной α -устойчивости малого периодического решения оказывается достаточно учесть только его направление ветвления a_0 в фазовом пространстве. В критических случаях для оператора монодромии системы (21) требуется учесть свойства нелинейного приближения по аргументу (b, α) , учитывая направление ветвления μ_0 решения в пространстве параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов В. В.* Ненулевое периодическое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений // Диффер. уравн. — 1997. — 33, № 11. — С. 1572.
2. *Абрамов В. В.* К вопросу об устойчивости решения по параметру // Изв. ТулГУ. Сер. Диффер. уравн. Прикл. задачи. — 2005. — 1. — С. 3–8.
3. *Абрамов В. В.* Устойчивость нулевого решения периодической системы дифференциальных уравнений с малым параметром // Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2010. — 12, № 4. — С. 49–54.
4. *Абрамов В. В.* Устойчивость малого периодического решения // Вестн. РАЕН. — 2013. — 13, № 4. — С. 3–5.
5. *Абрамов В. В.* Двусторонняя устойчивость малого периодического решения // Вестн. РАЕН. — 2014. — 14, № 5. — С. 6–9.
6. *Демидович Б. П.* Об одном аналоге теоремы Андронова—Витта // Докл. АН СССР. — 1967. — 176, № 5. — С. 994–996.
7. *Дунаева О. В., Шестаков А. А.* О понятиях орбитальной устойчивости и фазовой устойчивости движений динамической системы // Докл. СССР. — 1997. — 335, № 3. — С. 33–341.
8. *Зубов В. И.* Теория колебаний. — М.: Высшая школа, 1979.
9. *Красносельский М. А., Кузнецов Н. А., Юмагулов М. Г.* Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа // Автомат. телемех. — 1996. — 12. — С. 15–24.
10. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: ГИТТЛ, 1956.
11. *Мамонов С. С., Харламова А. О.* Вынужденная синхронизация систем фазовой синхронизации с запаздыванием // Вестн. РГРТУ. — 2017. — 62. — С. 26–35.
12. *Мамонов С. С., Харламова А. О., Ионова И. В.* Колебательно-вращательные циклы фазовой системы дифференциальных уравнений // Вестн. РАЕН. — 2018. — 18, № 4. — С. 51–57.
13. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости. — М.: Наука, 1986.
14. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. — М.: Мир, 1985.

Абрамов Владимир Викторович

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

E-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru