Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Абрамов, Е. Ю. Лискина, К вопросу о периодическом решении обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 185, 13–18

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-185-13-18>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 08:05:38

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 185 (2020). С. 13–18
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-185-13-18

УДК 517.925.42

К ВОПРОСУ О ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2020 г. В. В. АБРАМОВ, Е. Ю. ЛИСКИНА

Аннотация. Рассматривается дифференциальное уравнение, содержащее формы первого и второго порядка относительно фазовой переменной и ее производной с постоянными коэффициентами, а также периодическую неоднородность. Решается задача о существовании асимптотически устойчивого по Ляпунову периодического решения. Для проведения рассуждений применен метод построения положительно инвариантной прямоугольной области. Признаки существования периодического решения сформулированы в терминах свойств изоклин. Рассмотрены случаи, когда изоклина нуля является невырожденной кривой второго порядка.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение второго порядка, качественная теория, периодическое решение, устойчивость, нелинейный осциллятор.

ON PERIODIC SOLUTIONS OF A SECOND-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

© 2020 V. V. ABRAMOV, E. YU. LISKINA

ABSTRACT. We consider a differential equation containing first- and second-order forms with respect to the phase variable and its derivative with constant coefficients and a periodic inhomogeneity. Using the method of constructing a positively invariant rectangular domain, we examine the existence of an asymptotically stable (in the Lyapunov sense) periodic solution. Criteria for the existence of a periodic solution are formulated in terms of properties of isoclines. We consider cases where the zero isocline is a nondegenerate second-order curve.

Keywords and phrases: second-order differential equation, qualitative theory, periodic solution, stability, nonlinear oscillator.

AMS Subject Classification: 34C05, 34C25, 34D20

1. Введение. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + ax + b\dot{x} + c(t) + ax^2 + \beta x\dot{x} + \gamma(\dot{x})^2 = 0, \quad (1)$$

в котором коэффициенты $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ постоянны, $c(t)$ — ограниченная T -периодическая функция. Установим признаки существования устойчивого T -периодического решения уравнения (1).

Уравнение вида (1) часто используется в качестве модели нелинейного осциллятора и относится к классу обобщенных уравнений типа Рэля. Классические результаты исследований по проблеме существования периодических решений уравнений типа Льенара, Рэля и их обобщений изложены в [1]. В данной работе применим метод канонических областей, в основе которого лежит следующее утверждение (см. [2]).

Теорема 1. Пусть система $\dot{x} = f(t, x)$ имеет T -периодическую по t правую часть, обладает свойством существования и единственности решения задачи Коши во множестве $\mathbb{R} \times D$. Если существует выпуклый компакт $\Omega \subset D$, ограниченный гладкими кривыми $\Phi_i(x) = 0$, на которых имеют место оценки $(\text{grad } \Phi_i(x), f(t, x)) \leq 0$, $i = \overline{1, m}$, то система $\dot{x} = f(t, x)$ имеет T -периодическое решение с начальным значением в $\text{Int } \Omega$.

Любую область Ω , удовлетворяющую теореме 1, будем называть канонической.

2. Вспомогательные результаты. Сведем уравнение (1) к эквивалентной нормальной системе второго порядка. Пусть $\dot{x} = kx - y$, k — параметр. Тогда $\ddot{x} = k\dot{x} - \dot{y}$. Подставив $\dot{x}$, $\ddot{x}$ в уравнение (1), получим соотношение

$$k^2x - ky - \dot{y} + ax + b kx - by + c(t) + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma k^2x^2 + \gamma y^2 - 2\gamma kxy = 0,$$

в силу которого

$$\dot{y} = x^2(\alpha + \beta k + \gamma k^2) + y^2\gamma + x(a + bk + k^2) - xy(\beta + 2\gamma k) - y(k + b) + c(t).$$

Далее будем предполагать, что параметр k удовлетворяет условию $\beta + 2\gamma k = 0$. При этом уравнению (1) соответствует система

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) = kx - y, \\ \dot{y} = f_2(t, x, y) = x^2(\alpha - \gamma k^2) + \gamma y^2 + x(a + bk + k^2) - y(k + b) + c(t). \end{cases} \quad (2)$$

Итак, задача о периодическом решении уравнения (1) сводится к задаче о периодическом решении системы (2).

Установим необходимые условия существования периодического решения. Для этого рассмотрим расположение изоклины бесконечности $I^\infty: \dot{x} = 0$ и подвижной изоклины нуля $I_t^\infty: \dot{x} = 0$ системы (2).

При каждом t изоклина I_t^∞ (I_t^0) делит плоскость xOy на две части: внутреннюю, в которой $\dot{x} < 0$ ($\dot{y} < 0$), и внешнюю, в которой $\dot{x} > 0$ ($\dot{y} > 0$). Эти части обозначим соответственно X^{int} , X^{ext} , ($Y_t^{X^{\text{int}}}$, $Y_t^{X^{\text{ext}}}$). Построим для изоклины I_t^0 соответствующие неподвижные (стационарные) внутреннюю и внешнюю части фазовой плоскости:

$$Y^{\text{ext}} = \{(x, y) : f_2(t, x, y) > 0, t \in \mathbb{R}\}, \quad Y^{\text{int}} = \{(x, y) : f_2(t, x, y) < 0, t \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, при всех $t \in \mathbb{R}$ изоклины удовлетворяют условиям

$$I^\infty = X = \partial X = \partial X^{\text{int}} \cup \partial X^{\text{ext}}, \quad I_t^0 \subset Y, \quad \partial Y = \partial Y^{\text{int}} \cup \partial Y^{\text{ext}},$$

где Y — область, содержащая все изоклины нуля I_t^0 . Так как в каждой из областей X^{int} , X^{ext} , Y^{int} , Y^{ext} компоненты векторного решения системы (2) строго монотонны, то траектория периодического решения системы (2) не может целиком лежать ни в одной из этих областей. Поэтому справедливо следующее утверждение о локализации канонической области.

Лемма 1. Если область Ω является канонической для системы (2), то имеет место включение $\Omega \supset X \cap Y$.

Запишем систему (2) в векторной форме $\dot{z} = f(z) + \text{colon}(0, c(t))$,

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f(z) = \begin{pmatrix} kx - y \\ x^2(\alpha - \gamma k^2) + \gamma y^2 + x(a + bk + k^2) - y(k + b) \end{pmatrix}.$$

Выберем какие-либо решения $z_1 = z_1(t)$, $z_2 = z_2(t)$ системы (2). Для функции $V(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)^2$ вычислим производную в силу системы (2). По формуле Лагранжа получим

$$\dot{V}(z_1, z_2) = 2(z_1 - z_2)^T F(\tilde{z})(z_1 - z_2),$$

где

$$F(\tilde{z}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f(\tilde{z})}{\partial z} + \left(\frac{\partial f(\tilde{z})}{\partial z} \right)^T \right)$$

— эрмитова компонента матрицы Якоби, $\tilde{z}$ — некоторый вектор, выбор которого зависит от z_1 и z_2 .

Предположим, что область Λ является положительно инвариантной для системы (2). Произвольно выберем $z_1(0)$ и $z_2(0)$. Тогда $z_1(t), z_2(t) \in \Lambda$ для любого $t \geq 0$. Допустим, что z_1 и z_2 — различные T -периодические решения с траекториями, лежащими в положительно инвариантной канонической области Ω . Если $\dot{V}(z_1, z_2) < 0$ при $t \geq 0$, то $V(z_1, z_2)$ строго убывает при $t \geq 0$. При этом

$$z_1(0) \neq z_2(0), \quad V(z_1(0), z_2(0)) > V(z_1(T), z_2(T)),$$

т.е.

$$\|z_1(0) - z_2(0)\|_2 > \|z_1(T) - z_2(T)\|_2.$$

Значит, функция $z(t) = z_1(t) - z_2(t)$ не является T -периодической. Таким образом, если $\dot{V}(z_1, z_2) < 0$ при $t \geq 0$ в области Ω , то в этой области содержится единственная траектория периодического решения системы (2).

Более того, если $\dot{V}(z_1, z_2) < 0$ при $t \geq 0$, где $z_1(t) \in \Omega$ — T -периодическое решение системы (2), $z_1(t), z_2(t) \in \Omega$ — произвольно выбранное решение системы (2), то имеет место оценка

$$V(z_1(0), z_2(0)) > V(z_1(T), z_2(T)).$$

Значит, оператор сдвига по траекториям отображает окрестность начального значения $z_1(0)$ в себя. Отсюда по индукции следует устойчивость периодического решения z_1 (см. [2]).

Итак, если $F(z) < 0$ в положительно инвариантной области Ω , то $\dot{V}(z_1, z_2) < 0$ при $t \geq 0$ для любой пары решений с начальными значениями Ω . При этом в области Ω лежит единственная траектория устойчивого периодического решения системы (2).

Для системы (2) имеем

$$F(z) = \left[\frac{k}{\frac{2x(\alpha - \gamma k^2) + (a + bk + k^2) - 1}{2}} \quad \frac{2x(\alpha - \gamma k^2) + (a + bk + k^2) - 1}{2} \right] \cdot \frac{2\gamma y - (k + b)}{2\gamma y - (k + b)}.$$

Согласно критерию Сильвестра условие $F(z) < 0$ в Ω равносильно системе оценок для главных миноров:

$$F(z) = \begin{cases} \Delta_1 = k < 0, \\ \Delta_2(x, y) = (2\gamma y - (k + b)) - \frac{(2x(\alpha - \gamma k^2) + (a + bk + k^2) - 1)^2}{4} > 0. \end{cases}$$

Поэтому всюду далее, решая поставленную задачу, будем полагать, что выполняется условие

$$k < 0. \quad (3)$$

При этом из принятого ранее условия $\beta + 2\gamma k = 0$ следует, что знаки коэффициентов β, γ одинаковы.

В данной работе границу канонической области $\partial\Omega$ будем искать в виде прямоугольника $ABCD$:

$$\begin{aligned} AB : \Phi_1(x, y) = y_1 - y = 0; \quad \text{grad } \Phi_1 = (0; -1); \quad BC : \Phi_2(x, y) = x - x_2 = 0; \quad \text{grad } \Phi_2 = (1; 0); \\ AD : \Phi_3(x, y) = x_1 - x = 0; \quad \text{grad } \Phi_3 = (-1; 0); \quad BC : \Phi_4(x, y) = y - y_2 = 0; \quad \text{grad } \Phi_4 = (0; 1). \end{aligned}$$

При этом для применения теоремы 1 требуется проверка неравенств с нелинейными членами того же порядка, что и в правой части рассматриваемой системы. Кроме того, для проверки условия устойчивости достаточно рассмотреть вершины прямоугольника. В таком случае теорему 1 можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 2. Пусть правая часть системы (2) на границе $ABCD$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} f_2(t, x, y) \geq 0, & \text{если } \Phi_1 = 0, \\ f_1(t, x, y) \geq 0, & \text{если } \Phi_2 = 0, \\ f_1(t, x, y) \geq 0, & \text{если } \Phi_3 = 0, \\ f_2(t, x, y) \geq 0, & \text{если } \Phi_4 = 0. \end{cases}$$

Кроме того, в вершинах прямоугольника $ABCD$ справедлива оценка $\Delta_2(x, y) > 0$. Тогда система (2) имеет устойчивое T -периодическое решение с начальным значением внутри $ABCD$.

3. Основные результаты. Рассмотрим невырожденные частные случаи соответствия изоклины I_t^0 одной из стандартных форм для кривых второго порядка, когда система (2) не является линейной.

Будем использовать обозначения

$$c_1 = \inf_{0, T} c(t), \quad c_2 = \sup_{0, T} c(t).$$

Допустим, что $\gamma \neq 0$, $\alpha - \gamma k^2 \neq 0$. Выделим полные квадраты в уравнении для I_t^0 :

$$(\alpha - \gamma k^2)(x - x_0)^2 + \gamma(y - y_0)^2 = m - c(t), \quad (4)$$

где

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{-a - bk - k^2}{2(\alpha - \gamma k^2)}; \frac{k + b}{2\gamma} \right)$$

— центр кривой,

$$m = \frac{(a + bk + k^2)^2}{2(\alpha - \gamma k^2)} + \frac{(k + b)^2}{4\gamma}.$$

Предположим, что справедливы оценки

$$\gamma < 0, \quad \alpha - \gamma k^2 > 0, \quad c_1 > m. \quad (5)$$

Тогда кривая (4) — это гипербола с полуосями

$$\sqrt{\frac{c(t) - m}{\alpha - \gamma k^2}}, \quad \sqrt{\frac{m - c(t)}{\gamma}}.$$

Для применения теоремы 2 потребуем, чтобы пересекались линии $I^\infty: y = kx$ и

$$I_1^0: \frac{(y - y_0)^2}{s_1^2} - \frac{(x - x_0)^2}{q_1^2} = 1, \quad y > y_0,$$

где

$$q_1 = \sqrt{\frac{|m - c_2|}{\alpha - \gamma k^2}}, \quad s_1 = \sqrt{\frac{|m - c_2|}{|\gamma|}}.$$

Таким образом, дискриминант уравнения

$$\frac{(kx - y_0)^2}{s_1^2} - \frac{(x - x_0)^2}{q_1^2} = 1 \quad (6)$$

должен быть положительным. Это условие выполнено, если справедливо неравенство

$$(kx_0 - y_0)^2 + (k^2 q_1^2 - s_1^2) > 0. \quad (7)$$

Итак, при условии (7) линии I^∞ и I_1^0 , $y > y_0$, пересекаются в некоторых точках (h_1, kh_1) , (h_2, kh_2) , где h_1, h_2 — корни уравнения (6), $h_1 < h_2$.

Для гиперболы I_2^0 рассмотрим вершину $(x_0, y_0 + s_2)$, $s_2 = \sqrt{|m - c_1|/|\gamma|}$. При условии (7) линии I^∞ и I_2^0 пересекаются дважды. Рассмотрим их точку пересечения с большей абсциссой l . Выберем прямые

$$AB: y = y_l = \begin{cases} kl, & l \leq x_0, \\ y_0 + s_2, & l > x_0, \end{cases} \quad BC: x = x_2 = \frac{y_l}{k}. \quad (8)$$

При этом $AB \subset Y^{\text{ext}}$, $BC \subset X^{\text{int}}$.

Вычислим ординату y_2 точки пересечения прямой BC с линией I_1^0 . Если выполняется условие

$$kh_2 \leq y_2 \leq kh_1, \quad (9)$$

то выберем прямые

$$CD : y = y_2, \quad DA : x = x_1 = \frac{y_2}{k}. \quad (10)$$

В прямоугольнике Ω , ограниченном линиями (8), (10), выполняется условие устойчивости, если имеют место неравенства

$$\Delta_2(x_1, y_1) > 0, \quad \Delta_2(x_2, y_1) > 0. \quad (11)$$

Итак, согласно теореме 2 справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Если выполняются условия (3), (5), (7), (9), (11), то система (2) имеет устойчивое T -периодическое решение, траектория которого лежит внутри области, ограниченной прямыми (8), (10).*

Аналогично рассматриваются другие случаи, когда изоклина нуля является гиперболой, а также случаи, когда линия (4) — это эллипс или парабола.

Предположим, что справедливы оценки

$$\gamma > 0, \quad \alpha - \gamma k^2 > 0, \quad c_2 < m. \quad (12)$$

Тогда при любом $t \in \mathbb{R}$ изоклина I_t^0 , заданная уравнением (4), — это эллипс с полуосями

$$\sqrt{\frac{m - c(t)}{\alpha - \gamma k^2}}, \quad \sqrt{\frac{m - c(t)}{\gamma}}.$$

При этом величины

$$q_1 = \inf_{[0, T]} \left(\sqrt{\frac{m - c(t)}{\alpha - \gamma k^2}} \right) = \sqrt{\frac{m - c_2}{\alpha - \gamma k^2}}, \quad s_1 = \inf_{[0, T]} \left(\sqrt{\frac{m - c(t)}{\gamma}} \right) = \sqrt{\frac{m - c_2}{\gamma}}$$

— полуоси границы I_t^0 области Y^{int} , которая содержит центр (x_0, y_0) эллипса, а величины

$$q_2 = \sup_{[0, T]} \left(\sqrt{\frac{m - c(t)}{\alpha - \gamma k^2}} \right) = \sqrt{\frac{m - c_1}{\alpha - \gamma k^2}}, \quad s_2 = \sup_{[0, T]} \left(\sqrt{\frac{m - c(t)}{\gamma}} \right) = \sqrt{\frac{m - c_1}{\gamma}}$$

— полуоси границы I_2^0 области Y^{ext} . Для применения теоремы 2 и в этом случае потребуем, чтобы линии I^∞ и I_t^0 пересекались дважды в некоторых точках (h_1, kh_1) , (h_2, kh_2) , $h_1 < h_2$. Это возможно при условии

$$(k^2 q_1^2 + s_1^2) - (kx_0 - y_0)^2 > 0. \quad (13)$$

При условии (13) линии I^∞ и I_2^0 также пересекаются дважды. Допустим, что l — наибольшая из абсцисс их точек пересечения. Выберем прямые

$$AB : y = y_l = \begin{cases} kl, & l \leq x_0, \\ y_0 + s_2, & l > x_0, \end{cases} \quad BC : x = x_2 = \frac{y_l}{k}. \quad (14)$$

Пусть y_2 — ордината точки пересечения прямой BC с изоклиной I_1^0 . Если выполняется условие

$$kh_2 \leq y_2 \leq kh_1, \quad (15)$$

то выберем прямые

$$CD : y = y_2, \quad DA : x = x_1 = \frac{y_2}{k}. \quad (16)$$

В прямоугольнике Ω , ограниченном линиями (14), (18), выполняется условие устойчивости, если справедливы неравенства

$$\Delta_2(x_i, y_j) > 0; \quad i, j = 1, 2. \quad (17)$$

Итак, по теореме 2 справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Если выполняются условия (3), (12), (13), (15), (17), то система (2) имеет устойчивое T -периодическое решение, траектория которого лежит внутри области, ограниченной прямыми (14), (17).

Предположим, что в системе (3)

$$\gamma = 0, \quad \alpha > 0, \quad k + b > 0. \quad (18)$$

Тогда при любом значении t изоклина нуля — это парабола

$$y = \frac{\alpha}{k+b}x^2 + \frac{a+bk+k^2}{k+b}x + \frac{c(t)}{k+b}, \quad (19)$$

ветви которой направлены вверх, вершина имеет абсциссу $x_0 = (-a - bk - k^2)/(2\alpha)$. При условии (18) область Y^{ext} расположена ниже параболы (19), а область Y^{int} — выше. Неподвижные изоклины нуля I_1^0, I_2^0 имеют ординаты вершин соответственно

$$s_1 = \frac{c_2}{k+b}, \quad s_2 = \frac{c_1}{k+b}.$$

Допустим, что справедливо неравенство

$$a^2 - 4\alpha c_2 > 0. \quad (20)$$

Тогда линии I^∞ и I_1^0 имеют две точки пересечения $(h_1, kh_1), (h_2, kh_2)$, $h_1 < h_2$.

Выберем прямые

$$AB : y = y_l = \begin{cases} kl, & l \leq x_0, \\ y_0 + s_2, & l > x_0, \end{cases}; \quad BC : x = x_2 = \frac{y_1}{k}. \quad (21)$$

где l — большая из абсцисс точек пересечения линии I^∞ и I_2^0 . Вычислим ординату y_2 точки пересечения BC и I_1^0 . При условии

$$kh_2 \leq y_2 \leq kh_1, \quad (22)$$

выберем прямые

$$CD : y = y_2, \quad DA : x = x_1 = \frac{y_2}{k}. \quad (23)$$

В построенном прямоугольнике $ABCD$ выполняется условие устойчивости, если справедливы оценки

$$\begin{cases} \Delta_2(x_1, y_1) > 0, \\ \Delta_2(x_2, y_1) > 0. \end{cases} \quad (24)$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Если выполняются условия (3), (18), (20), (22), (24), то система (2) имеет устойчивое T -периодическое решение, траектория которого лежит внутри области, ограниченной прямыми (21), (23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1974.
2. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.

Абрамов Владимир Викторович

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

E-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru

Лискина Екатерина Юрьевна

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

E-mail: e.liskina@365.rsu.edu.ru