Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Баева, С. А. Павлова, О периодических решениях математической модели «политика-экономика», *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 185, 28–36

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-185-28-36>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:41:14

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 185 (2020). С. 28–36
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-185-28-36

УДК 517.925

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ «ПОЛИТИКА-ЭКОНОМИКА»

© 2020 г. О. В. БАЕВА, С. А. ПАВЛОВА

Аннотация. Рассматривается математическая модель «политика-экономика», описываемая нелинейной системой дифференциальных уравнений с параметром. Определены условия существования ненулевого положительного периодического решения.

Ключевые слова: математическая модель, нелинейная система дифференциальных уравнений с параметром, ненулевое периодическое решение.

ON PERIODIC SOLUTIONS OF THE MATHEMATICAL MODEL “POLITICS-ECONOMICS”

© 2020 O. V. BAEVA, S. A. PAVLOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider a mathematical model “politics-economy” described by a nonlinear system of differential equations with a parameter and obtain conditions for the existence of a nonzero positive periodic solution.

Keywords and phrases: mathematical model, nonlinear system of differential equations with a parameter, nonzero periodic solution.

AMS Subject Classification: 34K06, 34K10, 34K13

1. Введение. В основе предлагаемой модели лежит схема описания общества, принадлежащая Т. Парсонсу (см. [1]). Парсонс выделяет следующие подсистемы социальной системы: социетальное общество, систему поддержания институционализированных этнических образцов, экономическую и политическую системы. Динамику изменения данных подсистем опишем системой дифференциальных уравнений.

В качестве управляющего параметра возьмем уровень пассионарного напряжения (характеристика этноса). Пассионарное напряжение — это качественная характеристика, которую следует рассматривать как некую усредненную оценку этнической системы.

Политическую систему будем описывать степенью политической дифференциации (количеством политических институтов) $G(t)$, экономическую систему — количеством единиц фондов $E(t)$, социетальное сообщество — количеством социальных институтов $K(t)$, посредством которых происходит интеграция общества, а систему поддержания институционализированных этнических образцов — количеством социальных институтов $D(t)$, отвечающих за поддержание институционализированных этнических образцов.

Развитие политической системы опишем дифференциальным уравнением

$$\frac{dG}{dt} = G_G + G_E + G_K;$$

слагаемые в правой части уравнения имеют следующий смысл:

- (i) Слагаемое $G_G = k_{GG}(e^{\delta\lambda - \delta_1} - 1)G$ описывает процесс самоорганизации политической системы, который обеспечивает поддержание и развитие общественного строя. Он включает действия власти, препятствующие изменению существующей политической системы. Эти действия могут выражаться в принятии законов о разграничении властных полномочий. Здесь $k_{GG}(e^{\delta\lambda - \delta_1} - 1)$ — учет пассионарности λ при «построении» и поддержке государства, множитель $(e^{\delta\lambda - \delta_1} - 1)$ — относительный уровень пассионарности, множитель k_{GG} — положительный коэффициент.
- (ii) Слагаемое $G_E = (l_G(\varepsilon) - k_{GE}(t, \nu)E)E$ представляет усилия людей в момент времени t по укреплению политического режима за счет средств экономики. Степень этих усилий определяется условиями жизни, т.е. уровнем развитости экономики. Изменение политической системы зависит от состояния экономики. Увеличение уровня развития экономической системы (E) не приводит к постоянному усложнению политической системы (G). Наступает момент «насыщения», при котором увеличение экономических вложений во власть не приводит к дальнейшему «росту» политической системы. Здесь $(l_G(\varepsilon) - k_{GE}(t, \nu)E)$ — доля капитала в момент времени t , направленного на укрепление политического режима, $\nu = (\lambda, \varepsilon)$ — параметр, изменение которого влияет на развитие системы.
- (iii) Слагаемое $G_K = k_{GK}(\lambda)(K + D)G$ — ограничения на скорость изменения политической системы, связанные с действующими в обществе традицией (нравственностью) и нормативным порядком. Эти ограничения сказываются на высоком уровне «социализации» ($K + D$). Сюда входят затраты политической системы на поддержание нормативного порядка и этнических образцов. Также это борьба с преступлениями против порядка и против общества. Затраты на борьбу приводят к упрощению политической системы, к централизации и сосредоточению власти. Чем активнее государство борется с противоправными действиями, тем более централизованной и монополизированной становится власть.

Развитие экономической системы описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dE}{dt} = E_E - E_G - E_K;$$

смысл слагаемых в правой части таков:

- (i) Слагаемое $E_E = k_{EE}(e^{\delta\lambda - \delta_1} - 1)E$ — усилия людей по развитию экономики. Это процесс воспроизводства экономических ресурсов. Экономическая система пополняет запас ресурсов за счет собственных вложений;
- (ii) Слагаемое $E_G = (l_E(\varepsilon) - k_{EG}(t, \nu)G)G$ — экономические вливания во властные структуры в момент времени t . Для поддержания и развития политической системы требуется вложение экономических ресурсов. Слагаемое E_G — некоторая «саморегуляция» воздействия политической системы на экономическую. Смысл квадратичной зависимости в том, что это воздействие определяется коллективным состоянием системы и выражается числом возможных взаимодействий социальных институтов;
- (iii) Слагаемое $E_K = k_{EK}(\lambda)(K + D)E$ — ограничивающие факторы, связанные с этнокультурными традициями и нормативным порядком. С увеличением уровня «социализации» ($K + D$) возрастает ее сдерживающее воздействие на развитие экономики. Чем выше уровень традиции (D) и нормативного порядка (K), тем большие ограничения они оказывают на рост экономической системы.

Любое общество рождается не на пустом месте, а на обломках когда-то сплоченных государств. Поэтому в качестве начальных данных ($G|_{t=0} = G_0$, $E|_{t=0} = E_0$) мы можем выбрать соответствующие величины предшествующих социальных систем (константы G_0 , K_0).

Предположим, что социетальное сообщество (K) и система поддержания институционализированных этнических образцов (D) зафиксированы на некотором уровне и не меняются со временем.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dG}{dt} = k_{GG}(e^{\delta\lambda-\delta_1})G + (l_G(\varepsilon)E - k_{GE}(t, \nu)E^2) - k_{GK}(\lambda)(K + D)G, & G|_{t=0} = G_0, \\ \frac{dE}{dt} = k_{EE}(e^{\delta\lambda-\delta_1})E + (l_E(\varepsilon)G - k_{EG}(t, \nu)G^2) - k_{EK}(\lambda)(K + D)E, & E|_{t=0} = E_0. \end{cases}$$

Для упрощения исследования предположим, что интенсивность реакции политических институтов $k_G G$ и $k_E E$ интенсивность развития экономики равны. Предположим также, что равны доли социальных институтов (K и D), влияющих на политическую дифференциацию и экономический рост, т.е. $k_G K = k_E K$.

Пусть

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= k_{GG}(e^{\delta\lambda-\delta_1} - 1) - k_{GK}(\lambda)(K + D), \\ k_1(t, \lambda, \varepsilon) &= k_{GE}(t, \nu), \quad k_2(t, \lambda, \varepsilon) = k_{EG}(t, \nu), \quad l_G(\varepsilon) = l_E(\varepsilon) = l(\varepsilon), \quad \nu = (\lambda, \varepsilon), \\ x &= G, \quad y = E, \quad x_0 = G_0, \quad y_0 = E_0. \end{aligned}$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = f(\lambda)x + l(\varepsilon)y - k_1(t, \lambda, \varepsilon)y^2, & x|_{t=0} = x_0, \\ \dot{y} = -l(\varepsilon)x + f(\lambda)y + k_1(t, \lambda, \varepsilon)x^2, & y|_{t=0} = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

где x — уровень политической дифференциации G , y — развитие экономической системы E .

Определим условия, при которых развитие системы будет представлять собой циклический процесс.

Переходя к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получим систему вида

$$\begin{cases} \dot{\rho} = (A(\lambda) + X(t, \varphi, \rho, \lambda, \varepsilon))\rho, \\ \dot{\varphi} = \mu(\varepsilon) + \Phi(t, \varphi, \rho, \lambda, \varepsilon), \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= f(\lambda), \quad \mu(\varepsilon) = -l(\varepsilon), \\ X(t, \varphi, \rho, \lambda, \varepsilon) &= -k_1(t, \lambda, \varepsilon)\rho \cos \varphi \sin^2 \varphi + k_2(t, \lambda, \varepsilon)\rho \cos^2 \varphi \sin \varphi, \\ \Phi(t, \varphi, \rho, \lambda, \varepsilon) &= k_2(t, \lambda, \varepsilon)\rho \cos^3 \varphi + k_1(t, \lambda, \varepsilon)\rho \sin^3 \varphi, \\ \mu(0) &= 0, \quad X(t, \varphi, 0, \lambda, \varepsilon) = 0, \quad \Phi(t, \varphi, 0, \lambda, \varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Предположим, что для вектор-функции $\mu(\varepsilon)$ справедливо представление

$$\mu(\varepsilon) = B\varepsilon + \Theta(\varepsilon),$$

где $\mu(0) = 0$. Полагаем, что вектор-функция $\gamma(\lambda) = f(\lambda)$ представляется в виде

$$\gamma(\lambda) = D\lambda + o(|\lambda|), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Непосредственно можно убедиться, что для системы (2) при введенных предположениях выполнены следующие условия:

- (а) $\rho \in \mathbb{R}^m$, $\varphi \in \mathbb{R}^p$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^l$, $\lambda \in \mathbb{R}^q$, где $\mathbb{R}^s$ — s -мерное векторное пространство;
- (б) $\mu(\varepsilon)$ — p -мерная вектор-функция, определенная и непрерывная на множестве

$$E(\delta_0) = \{\varepsilon \in \mathbb{R}^l : |\varepsilon| \leq \delta_0\};$$

- (с) $\Phi(t, \varphi, \rho, \lambda, \varepsilon)$ — p -мерная вектор-функция, определенная и непрерывная по совокупности переменных, T -периодическая по t на множестве

$$M(\delta_0) = [0, T] \times \mathbb{R}^p \times M_0(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0) \times E(\delta_0),$$

$$M_0(\delta_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq \delta_0\}, \quad \Lambda(\delta_0) = \{\lambda \in \mathbb{R}^q : |\lambda| \leq \delta_0\},$$

$T > 0$, $\delta_0 > 0$ — некоторые постоянные числа;

(d) на множестве $M(\delta_0)$ справедливо неравенство

$$\left\| \Phi(t, \varphi', x, \lambda', \varepsilon') - \Phi(t, \varphi'', x, \lambda'', \varepsilon'') \right\| \leq c_1(\delta_0) \cdot |\varphi' - \varphi''| + c_2(\delta_0) |\lambda' - \lambda''| + c_3(\delta_0) |\varepsilon' - \varepsilon''|,$$

где $c_1(\delta_0) \rightarrow 0$, $c_2(\delta_0) \rightarrow 0$, $c_3(\delta_0) \rightarrow 0$ при $\delta_0 \rightarrow 0$, причем $\Phi(t, \varphi, 0, \nu) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(t, \varphi, x, \lambda, \varepsilon) = 0$ равномерно относительно $t, \phi, \lambda, \varepsilon$ на множестве $[0, T] \times \mathbb{R}^p \times M_0(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0) \times E(\delta_0)$;

(e) для всякого числа $\delta \in (0, \delta_0]$ на множестве $E(\delta_0)$ справедливо равенство

$$\mu(\varepsilon) = B\varepsilon + \Theta(\varepsilon),$$

где $B - (p \times l)$ -матрица, вектор-функция $\Theta(\varepsilon)$ удовлетворяет условию Липшица по ε с постоянной $\tau(\delta)$, $\tau(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$;

(f) $A(\lambda) - (m \times m)$ -матрица, определенная и непрерывная на множестве $\Lambda(\delta_0)$;

(g) $X(t, \varphi, x, \lambda, \varepsilon) - (m \times m)$ -матрица, определенная и непрерывная по совокупности переменных, T -периодическая по t на множестве $M(\delta_0)$;

(h) на множестве $M(\delta_0)$ справедливы неравенства

$$\|A(\lambda)\| \leq R, \quad \|X(t, \varphi, x, \lambda, \varepsilon)\| \leq L,$$

$$\left\| X(t, \varphi', x, \lambda', \varepsilon') - X(t, \varphi'', x, \lambda'', \varepsilon'') \right\| \leq l_1(\delta_0) \cdot |\varphi' - \varphi''| + l_2(\delta_0) |\lambda' - \lambda''| + l_3(\delta_0) |\varepsilon' - \varepsilon''|,$$

где $l_1(\delta_0) \rightarrow 0$, $l_2(\delta_0) \rightarrow 0$, $l_3(\delta_0) \rightarrow 0$ при $\delta_0 \rightarrow 0$;

$$\left\| A(\lambda') - A(\lambda'') \right\| \leq r(\delta_0) |\lambda' - \lambda''|,$$

$r(\delta_0) \rightarrow 0$ при $\delta_0 \rightarrow 0$; $X(t, \varphi, 0, \lambda, \varepsilon) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} X(t, \varphi, x, \lambda, \varepsilon) = 0$ равномерно относительно $t, \phi, \lambda, \varepsilon$ на множестве $[0, T] \times \mathbb{R}^p \times M_0(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0) \times E(\delta_0)$.

Пусть $C(d_0, k)$ — класс T -периодических по t вектор-функций $F(t)$, определенных на сегменте $[0, T]$, удовлетворяющих условиям

$$\|F(t)\| \leq d_0, \quad \|F(t') - F(t'')\| \leq k|t' - t''|$$

для любых $t', t'' \in [0, T]$, где d_0, k — некоторые положительные числа.

В основе доказательства теоремы о существовании ненулевого периодического решения системы (2) лежит теорема [2].

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия.

1. K и Λ — замкнутые компактные множества некоторых линейных нормированных пространств, K — выпуклое множество;
2. на подмножестве множества $K \times \Lambda$ определен такой оператор T_λ , что для любого $x \in K$ существует единственное $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяющее включению $T_\lambda x \in K$;
3. если $x_n \rightarrow x_0$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, $y_n = T_{\lambda_n} x_n$, $y_n \rightarrow y_0$, то $y_0 = T_{\lambda_0} x_0$.

Тогда существуют такие $x^* \in K$, $\lambda^* \in \Lambda$, что $x^* = T_{\lambda^*} x^*$.

2. Основные результаты. Сформулируем основной результат работы. Задача о существовании T -периодического решения системы (2) сводится к задаче определения условий существования таких чисел d, δ_0 , что для любой вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ найдется вектор $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$, удовлетворяющий условию

$$(Y_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon) - E) \cdot \alpha = 0.$$

Здесь $Y_F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon)$ — фундаментальная матрица решений системы

$$\dot{y} = [A(\lambda) + X(t, \varphi_t, F(t), \lambda, \varepsilon)] y, \quad (3)$$

удовлетворяющая условию $Y_F(0, \varphi_0, \lambda, \varepsilon) = E$, где E — единичная матрица.

Решение системы (3) определяется равенством

$$y_F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon) = Y_F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon) \cdot \alpha, \quad (4)$$

где $y_F(0, \varphi_t, \lambda, \varepsilon) = \alpha$, α — некоторый постоянный вектор, принадлежащий множеству $W(r) = \{\alpha : |\alpha| \leq r\}$. Равенство (4) при любом фиксированном $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ на множестве $C(d, k)$ определяет оператор $\Gamma(\lambda)F(t) \rightarrow y_F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon)$, который любой вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ ставит в соответствие вектор-функцию $y_F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon)$.

Теорема 2. *Неподвижные точки оператора $\Gamma(\lambda)$ являются T -периодическими решениями системы дифференциальных уравнений (2), принадлежащими множеству $C(d, k)$.*

Доказательство. Пусть при некотором $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ вектор-функция $\rho \in C(d, k)$ — неподвижная точка оператора $\Gamma(\lambda)$. Это значит, что при любом $t \in [0, T]$ справедливо соотношение $\rho(t) = Y_\rho(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon) \cdot \alpha$, т.е. при $\rho = F(t)$ вектор-функция ρ является решением системы (3), а следовательно, решением системы (2). Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

- (1) система уравнений (2) удовлетворяет условиям (a)–(h);
- (2) в условии (d) $\text{rang } B = p$;
- (3) вектор-функция $\gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda), \dots, \gamma_s(\lambda))$ представима в виде $\gamma(\lambda) = D\lambda + o(|\lambda|)$, где $D = (s \times q)$ -матрица, вектор-функция $o(|\lambda|)$ удовлетворяет условию Липшица по λ с постоянной $p(\delta)$, $p(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$;
- (4) $\text{rang } D = s$.

Тогда существуют такие число $d > 0$ и значение параметра $\nu^* = (\lambda^*, \varepsilon^*)$, что система (2) имеет ненулевое T -периодическое решение из класса $C(d, k)$.

Доказательство. Рассмотрим второе уравнение в системе (2). Для того чтобы решение

$$\varphi_t = \varphi^F(t, \varphi_0, \lambda, \varepsilon)$$

системы (2) было T -периодическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\mu(\varepsilon)T + \int_0^T \Phi(t, \varphi_t, F(t), \lambda, \varepsilon) dt = 0. \quad (5)$$

Согласно условию (d) и условию 2 теоремы, равенство (5) примет вид

$$\varepsilon_1 = -B_1^{-1} \left(B_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{T} \int_0^T [\Phi(t, \varphi_t, F(t), \lambda, \varepsilon) + \Theta(\varepsilon)] dt \right), \quad (6)$$

где B_1 — неособенная $(p \times p)$ -матрица, $B_2 = (p \times (l - p))$ -матрица, $\varepsilon = \text{colon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, ε_1 — p -мерный вектор, ε_2 — $(l - p)$ -мерный вектор.

Тогда по [3, теорема 1] существуют такие числа $d > 0$, $\delta_1 > 0$, что для любой вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ и любого фиксированного $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ существует значение параметра $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in E(\delta_1)$, где ε_1 — единственная неподвижная точка оператора, определенного равенством (6) для фиксированного ε_2 , при котором решение $\varphi_t = \varphi^F(t, \varphi_0, \lambda, \varepsilon)$ системы (2) является T -периодическим.

Таким образом, определена вектор-функция $\varepsilon = \Psi(F, \lambda)$, являющаяся единственной неподвижной точкой оператора Γ при фиксированном λ , т.е. $\Gamma\varepsilon = \varepsilon$. При замене ε будет меняться λ . Следовательно, ε — функция от λ .

Докажем, что $\varepsilon(\lambda)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной λ . Действительно,

$$\begin{aligned} |\varepsilon(\lambda_1) - \varepsilon(\lambda_2)| &= \left| \Gamma_F(\lambda_1)\varepsilon(\lambda_1) - \Gamma_F(\lambda_2)\varepsilon(\lambda_2) \right| = \\ &= \left| \Gamma_F(\lambda_1)\varepsilon(\lambda_1) - \Gamma_F(\lambda_1)\varepsilon(\lambda_2) + \Gamma_F(\lambda_1)\varepsilon(\lambda_2) - \Gamma_F(\lambda_2)\varepsilon(\lambda_2) \right| \leq \\ &\leq \eta_1 |\varepsilon(\lambda_1) - \varepsilon(\lambda_2)| + \eta_2 |\lambda_1 - \lambda_2|. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$|\varepsilon(\lambda_1) - \varepsilon(\lambda_2)| \leq \frac{\eta_2}{1 - \eta_1} |\lambda_1 - \lambda_2|.$$

Фиксируем вектор-функцию $F(t) \in C(d, k)$. Подставив решение $\varphi_t = \varphi^F(t, \varphi_0, \lambda, \varepsilon)$, вектор-функцию $F(t) \in C(d, k)$ и вектор $\varepsilon(\lambda)$ в первое уравнение системы (2), получим систему (3), решением которой является вектор-функция $y_F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon)$, определенная равенством (4). Для того чтобы вектор-функция $y_F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon)$ была T -периодическим решением системы (3), достаточно, чтобы вектор λ удовлетворял равенству

$$D\lambda + o(|\lambda|) + \phi_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon(\lambda)) = 0. \quad (7)$$

Так как по условию теоремы $\text{rang } D = s$, то для простоты рассуждений будем считать, что матрицу D можно представить в виде $D = [\Delta_1, \Delta_2]$, $\det \Delta_1 \neq 0$. Матрица D имеет размер $(s \times q)$, $\Delta_1 - (s \times s)$, $\Delta_2 - (s \times (q - s))$.

Пусть $\lambda = \text{colon}(\lambda_1, \lambda_2)$, где $\lambda_1 - s$ -мерный вектор, $\lambda_2 - (s - q)$ -мерный вектор. Тогда уравнение (7) примет вид

$$\Delta_1 \lambda_1 + \Delta_2 \lambda_2 + o(|\lambda|) + \phi_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon(\lambda)) = 0 \quad (8)$$

Так как матрица Δ_1 неособенная, то уравнение (7) можно представить в виде

$$\lambda_1 = \Delta_1^{-1} \left(\Delta_2 \lambda_2 + o(|\lambda|) + \phi_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon(\lambda)) \right). \quad (9)$$

Определим оператор S равенством

$$S\lambda_1 = \Delta_1^{-1} \left(\Delta_2 \lambda_2 + o(|\lambda|) + \phi_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon(\lambda)) \right).$$

Докажем, что оператор S имеет единственную неподвижную точку, т.е. существует единственный вектор λ_1 , для которого $S\lambda_1 = \lambda_1$. Так как

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{o(|\lambda|)}{|\lambda|} = 0,$$

то выберем такое число $\delta_1 > 0$, что при всех $|\lambda| \leq \delta_1$ выполняется неравенство

$$\|o(|\lambda|)\| \leq \frac{\delta_1}{3\|\Delta_1^{-1}\|}.$$

Тогда для любого λ , удовлетворяющего условию $|\lambda| \leq \delta_1$, выполняется неравенство

$$\|\Delta_1^{-1} o(|\lambda|)\| \leq \frac{\delta_1}{3}. \quad (10)$$

Так как $\lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} (\Delta_2 \lambda_2) = 0$, то существует такое число δ' , что $|\lambda_2| \leq \delta' \leq \delta_1$ и

$$\|\Delta_1^{-1} \Delta_2 \lambda_2\| \leq \frac{\delta_1}{3}. \quad (11)$$

Введем обозначение $\Lambda_1(\delta_1) = \{\lambda_1 : |\lambda_1| \leq \delta_1\}$. Зафиксируем $|\lambda_2^*| \leq \delta_1$. Согласно условию

$$\lim_{d \rightarrow 0} \beta_F^l(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon) = 0$$

равномерно относительно λ ; тогда число d выберем таким образом, что для любой вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ имеет место неравенство

$$\|\Delta_1^{-1} \phi_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon(\lambda))\| \leq \frac{\delta_1}{3}. \quad (12)$$

Учитывая неравенства (10)–(12), получим, что для любых λ_1 , удовлетворяющих условию $|\lambda_1| \leq \delta_1$, $F(t) \in C(d, k)$ и фиксированных $|\lambda_2^*| \leq \delta_1$ имеем

$$\begin{aligned} \|S\lambda_1\| &= \left\| \Delta_1^{-1} \left(\Delta_2 \lambda_2 + o(|\lambda|) + \phi_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon(\lambda)) \right) \right\| \leq \\ &\leq \|\Delta_1^{-1} o(|\lambda|)\| + \|\Delta_1^{-1} \Delta_2 \lambda_2\| + \|\Delta_1^{-1} \phi_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon(\lambda))\| \leq \frac{\delta_1}{3} + \frac{\delta_1}{3} + \frac{\delta_1}{3} = \delta_1. \end{aligned}$$

Таким образом, для фиксированных $|\lambda_2^*| \leq \delta_1$ и для любой вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ оператор S отображает множество $\Lambda_1(\delta_1)$ в себя.

Докажем, что оператор S является сжимающим на множестве $\Lambda_1(\delta_1)$ при фиксированных $F(t) \in C(d, k)$ и $|\lambda_2^*| \leq \delta_1$. Возьмем произвольным образом $\lambda'_1, \lambda''_1 \in \Lambda_1(\delta_1)$. Пусть $\lambda' = \text{colon}(\lambda'_1, \lambda_2^*)$, $\lambda'' = \text{colon}(\lambda''_1, \lambda_2^*)$. Согласно условию 3 теоремы и [3, лемма 2] на множестве $\Lambda_1(\delta_1)$ справедливы неравенства

$$\|o(|\lambda'|) - o(|\lambda''|)\| \leq p(\delta)|\lambda' - \lambda''|$$

и

$$\begin{aligned} & \left\| \phi_F(T, \varphi_T, \lambda', \varepsilon(\lambda')) - \phi_F(T, \varphi_T, \lambda'', \varepsilon(\lambda'')) \right\| \leq \\ & \leq H_1(\delta)|\lambda' - \lambda''| + H_2(\delta)|\varepsilon(\lambda') - \varepsilon(\lambda'')| \leq H_1(\delta)|\lambda' - \lambda''| + H_2(\delta) \frac{\eta_2}{1 - \eta_1} |\lambda' - \lambda''| = \\ & = \left(H_1(\delta) + H_2(\delta) \frac{\eta_2}{1 - \eta_1} \right) |\lambda' - \lambda''| = \bar{H}(\delta) |\lambda' - \lambda''|, \end{aligned}$$

где $p(\delta) \rightarrow 0$, $\bar{H}(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Выберем число δ_1 таким образом, чтобы для любого $\delta \in (0, \delta_1]$ имело место неравенство

$$\|\Delta_1^{-1}\|(p(\delta) + \bar{H}(\delta)) \leq \beta < 1.$$

Тогда для любых $\lambda'_1, \lambda''_1 \in \Lambda_1(\delta_1)$ при фиксированных $F(t) \in C(d, k)$ и $|\lambda_2^*| \leq \delta_1$ выполняется неравенство

$$\|S\lambda'_1 - S\lambda''_1\| \leq \|\Delta_1^{-1}\|(p(\delta) + \bar{H}(\delta))|\lambda' - \lambda''| \leq \beta|\lambda' - \lambda''| = \beta|\lambda'_1 - \lambda''_1|,$$

где $\beta < 1$. Таким образом, оператор S при фиксированных $F(t) \in C(d, k)$ и $|\lambda_2^*| \leq \delta_1$ является сжимающим на множестве $\Lambda_1(\delta_1)$.

Таким образом, мы установили, что существуют такие числа $d > 0$ и $\delta_1 > 0$, что для любой фиксированной вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ и для любого фиксированного $|\lambda_2^*| \leq \delta_1$ оператор S переводит замкнутое ограниченное выпуклое множество $\Lambda_1(\delta_1)$ в себя и является сжимающим оператором. По теореме Банаха оператор S имеет единственную неподвижную точку в множестве $\Lambda_1(\delta_1)$, являющуюся решением уравнения (9), т.е. существует единственный вектор $\tilde{\lambda}_1$, $|\tilde{\lambda}_1| \leq \delta_1$, для которого $S\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_1$. Это означает, что для любой вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ существует единственный вектор $\tilde{\lambda} \in \Lambda(\delta_1)$, $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$, где $\tilde{\lambda}_1$ — единственная неподвижная точка оператора S , координаты $\tilde{\lambda}_2$ — фиксированные, обладающий тем свойством, что m -й столбец матрицы $(Y_F(T, \varphi_T, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) - E) \cdot Q_F(T, \varphi_T, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda}))$ обращается в нуль.

Пусть c — m -мерный вектор, первые $m - 1$ координат которого равны нулю, а m -я координата отлична от нуля. Тогда

$$(Y_F(T, \varphi_T, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) - E) \cdot Q_F(T, \varphi_T, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \cdot c = 0.$$

Положив $\alpha = Q_F(T, \varphi_T, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \cdot c$, приходим к равенству

$$(Y_F(T, \varphi_T, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) - E) \cdot \alpha = 0.$$

Следовательно,

$$y_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) = Y_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \cdot Q_F(T, \varphi_T, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \cdot c$$

— T -периодическое решение системы (3). Так как $c \neq 0$, то это решение является ненулевым. Кроме того, функция $y_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda}))$, где $t \in [0, T]$, $|\varphi_t| \leq \delta_0$, $\tilde{\lambda} \in \Lambda(\delta_1)$, принадлежит множеству $C(d, k)$. Действительно,

$$\begin{aligned} |y_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda}))| &= \left\| Y_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \cdot Q_F(T, \varphi_T, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \cdot c \right\| \leq \\ &\leq \left\| Y_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \right\| \cdot \left\| Q_F(T, \varphi_T, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \right\| \cdot |c|. \end{aligned}$$

Поскольку величины $Y_F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon)$, $Q_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon)$ ограничены, то

$$\left\| Y_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \cdot Q_F(T, \varphi_T, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \right\| \leq \left\| Y_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \right\| \cdot \left\| Q_F(T, \varphi_T, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \right\| = P,$$

где

$$P = \sup_{t \in [0, T]} \left\| Y_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \right\| \cdot \sup_{|z| \leq 1} \left| Q_F(T, \varphi_T, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) z \right|.$$

Тогда

$$\left| y_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \right| \leq \left\| Y_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \right\| \cdot \left\| Q_F(T, \varphi_T, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \right\| \cdot |c| < Pc.$$

Кроме того,

$$\left\| \dot{y}_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \right\| \leq \left(\|A(\tilde{\lambda})\| + \left\| X(t, \varphi_t, F(t), \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \right\| \right) \cdot \left\| y_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \right\| \leq (R + L)Dc.$$

Следовательно, за счет выбора вектора c можно добиться справедливости неравенств $Pc \leq d$, $(R + L)Pc \leq k$. По теореме Лагранжа о среднем значении имеем

$$\left\| y_F(t', \varphi_{t'}, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) - y_F(t'', \varphi_{t''}, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \right\| \leq \left\| \dot{y}_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \right\| \cdot |t' - t''| \leq k \cdot |t' - t''|,$$

что доказывает принадлежность функции $y_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda}))$ классу $C(d, k)$.

Матрица $X(t, \varphi_t, F(t), \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda}))$ непрерывна на множестве $C(d, k) \times \Lambda(\delta_1)$ равномерно относительно $t \in [0, T]$ и $|\varphi_t| \leq \delta_0$, матрица $A(\tilde{\lambda})$ непрерывна на множестве $\Lambda(\delta_1)$. Поэтому оператор $\Gamma(\lambda)$, определенный равенством (4), непрерывен на множестве $C(d, k) \times \Lambda(\delta_1)$ и при любых $(F(t), \lambda, \varepsilon) \in C(d, k) \times \Lambda(\delta_1)$ имеет место соотношение

$$\Gamma(\lambda)F(t) = y_F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon(\lambda)).$$

Таким образом, получаем, что существуют такие числа $d > 0$, $\delta_1 > 0$, что на множестве $C(d, k) \times \Lambda(\delta_1)$ оператор $\Gamma(\lambda)$ непрерывен и для любой вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ существует единственный вектор $\tilde{\lambda} \in \Lambda(\delta_1)$, удовлетворяющий соотношению

$$\Gamma(\tilde{\lambda})F(t) = y_F(t, \varphi_t, \tilde{\lambda}, \varepsilon(\tilde{\lambda})) \in C(d, k).$$

Тогда по теореме 1 существуют такие вектор-функция $F^*(t) \in C(d, k)$ и вектор $\lambda^* \in \Lambda(\delta_1)$, что $F^*(t)$ — неподвижная точка оператора $\Gamma(\lambda^*)$, т.е. $F^*(t) = Y_{F^*}(t, \varphi_t, \lambda^*, \varepsilon(\lambda^*)) \cdot \alpha$. По теореме 2, так как

$$F^*(t) = Y_{F^*}(t, \varphi_t, \lambda^*, \varepsilon(\lambda^*)) \cdot \alpha, \quad \alpha = Q_{F^*}(T, \varphi_T, \lambda^*, \varepsilon(\lambda^*)) \cdot c \neq 0,$$

то $F^*(t)$ — ненулевое T -периодическое решение системы (2) при $\lambda = \lambda^*$.

В итоге получаем, что существует такое значение параметра $\nu^* = (\lambda^*, \varepsilon^*)$, где $\varepsilon^* = \varepsilon(\lambda^*)$, что

$$F^*(t) = Y_{F^*}(t, \varphi_t, \lambda^*, \varepsilon^*) \cdot Q_{F^*}(T, \varphi_T, \lambda^*, \varepsilon^*) \cdot c$$

— T -периодическое решение системы дифференциальных уравнений (2), т.е. $F^*(t)$ — решение уравнения

$$\dot{\rho} = \left[A(\lambda) + X(t, \varphi, \rho, \lambda, \varepsilon) \right] \rho$$

при $\nu = \nu^*$. Теорема доказана. $\square$

Поскольку $\mu(\varepsilon) = -l(\varepsilon)$, $A(\lambda) = f(\lambda)$, а $f(\lambda)$, $l(\varepsilon)$ — скалярные величины, то D , B — числа, отличные от нуля.

Так как $\text{rang } B = 1$, $\text{rang } D = 1$, то согласно теореме 3 существует единственное значение параметра $\nu = (\lambda, \varepsilon)$, при котором система (2) (а следовательно, (1)) имеет ненулевое T -периодическое решение. Тем самым найдены условия, при которых получены периодические колебания в развитии политической и экономической систем. Это хорошо согласуется с политической и экономическими теориями (циклы реформ-контрреформ, экономические циклы Н. Кондратьева).

Докажем, что это решение положительно. За счет выбора числа $d > 0$ решение $\varphi_F(t, \varphi_0, \lambda, \varepsilon)$ системы

$$\dot{\varphi} = l(\varepsilon) + k_2(t, \lambda, \varepsilon)\rho \cos^3 \varphi + k_1(t, \lambda, \varepsilon)\rho \sin^3 \varphi$$

с начальным значением $\varphi_0 > 0$ будет принадлежать промежутку $(0, \pi/2)$, т.е. располагаться в первом квадранте. Поскольку матрица $A(\lambda) = f(\lambda)$ определена и непрерывна на множестве

$\Lambda(\delta_0)$, то имеет место неравенство $l_1 \leq f(\lambda) \leq l_2$. В [3] установлено, что для того, чтобы решение системы (2) было T -периодическим, необходимо выполнение равенства

$$(P_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon) - E) \cdot \alpha = (P_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon) - E) \cdot Q_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon)c = 0,$$

в котором $P_F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon)$ — фундаментальная матрица решений системы

$$\dot{\rho} = (A(\lambda) + X(t, \varphi, \rho, \lambda, \varepsilon))\rho,$$

представимая в виде

$$P_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon) = \bar{P}(T, \lambda) + H(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon) = e^{f(\lambda)T} + \beta^F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon),$$

где $\bar{P}(t, \lambda)$ — фундаментальная матрица решений системы $\dot{\rho} = A(\lambda)\rho$, $\beta^F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon)$ — элемент матрицы $H_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon)$, причем $\lim_{d \rightarrow 0} \beta^F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon) = 0$ равномерно относительно λ .

Определено, что $Q_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon)$ имеет вид $Q_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon) = 1$, причем

$$\det Q_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon) = 1.$$

Выберем $c = c^* > 0$. Тогда $\alpha = Q_F(T, \varphi_T, \lambda, \varepsilon)c = c^*$. В этом случае решение системы (2) определится равенством

$$\rho_F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon) = P_F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon)\alpha = e^{f(\lambda)t} + \beta^F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon).$$

Приведем следующие оценки:

$$\begin{aligned} e^{l_1 t} &\leq e^{f(\lambda)t} \leq e^{l_2 t}, \\ e^{l_1 t} + \beta^F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon) &\leq e^{f(\lambda)t} + \beta^F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon) \leq e^{l_2 t} + \beta^F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon), \\ (e^{l_1 t} + \beta^F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon))c^* &\leq e^{f(\lambda)t} + \beta^F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon)c^* \leq (e^{l_2 t} + \beta^F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon))c^*, \\ (e^{l_1 t} - |\beta^F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon)|)c^* &\leq |(e^{f(\lambda)t} + \beta^F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon))c^*| \leq (e^{l_2 t} + |\beta^F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon)|)c^*. \end{aligned}$$

За счет выбора числа $d > 0$ можем добиться выполнения неравенства $|\beta^F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon)| < e^{l_1 t}$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 < (e^{l_1 t} - |\beta^F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon)|)c^* &\leq |(e^{f(\lambda)t} + \beta^F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon))c^*| \leq \\ &\leq (e^{l_2 t} + |\beta^F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon)|)c^* < e^{l_2 t}c^* + e^{l_1 t}c^*, \end{aligned}$$

т.е. решение $\rho_F(t, \varphi_t, \lambda, \varepsilon)$ системы (2) положительно. Тем самым установлено, что решения системы (1) расположены в первом квадранте и являются положительными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуц А. К., Коробицын В. В., Лаптев А. А., Паутова Л. А., Фролова Ю. В. Математические модели социальных систем. — Омск: Омск. гос. ун-т, 2000.
2. Терехин М. Т. Бифуркация периодических решений функционально-дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Мат. — 1999. — 10 (449). — С. 37–42.
3. Терехин М. Т., Баева О. В. Существование ненулевых периодических решений у особого класса систем дифференциальных уравнений с параметром // Вестн. Рязанск. гос. ун-та им. С. А. Есенина. — 2007. — 3 (16). — С. 77–98.

Баева Ольга Владимировна

Академия права и управления

Федеральной службы исполнения наказаний России, Рязань

E-mail: olga8682@mail.ru

Павлова Светлана Анатольевна

Академия права и управления

Федеральной службы исполнения наказаний России, Рязань