Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Ковалева, Бифуркации пространственно неоднородных решений в модифицированном варианте уравнения Курамото—Сивашинского, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 185, 58–71

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-185-58-71>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 04:06:23

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 185 (2020). С. 58–71
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-185-58-71

УДК 517.9

БИФУРКАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ В МОДИФИЦИРОВАННОМ ВАРИАНТЕ УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО—СИВАШИНСКОГО

© 2020 г. А. М. КОВАЛЕВА

Аннотация. Рассмотрена периодическая краевая задача для одного уравнения с отклоняющимся пространственным аргументом. При помощи метода нормальных форм Пуанкаре—Дюлака, метод интегральных многообразий и асимптотических формул изучен ряд бифуркационных задач коразмерности 1 и 2. Для однородных состояний равновесия рассмотрены возможности реализации критических случаев различных типов. Изучен вопрос об устойчивости однородных состояний равновесия, получены асимптотические формулы пространственно неоднородных решений и условия их устойчивости.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, периодическая краевая задача, устойчивость, бифуркация, асимптотика, уравнение Курамото—Сивашинского.

BIFURCATIONS OF SPATIALLY INHOMOGENEOUS SOLUTIONS IN A MODIFIED VERSION OF THE KURAMOTO—SIVASHINSKY EQUATION

© 2020 А. М. KOVALEVA

ABSTRACT. A periodic boundary-value problem for an equation with a deviating spatial argument is considered. Using the Poincaré–Dulac method of normal forms, the method of integral manifolds, and asymptotic formulas, we examine a number of bifurcation problems of codimension 1 and 2. For homogeneous equilibrium states, we analyze possibilities of realizing critical cases of various types. The problem on the stability of homogeneous equilibrium states is studied and asymptotic formulas for spatially inhomogeneous solutions and conditions for their stability are obtained.

Keywords and phrases: functional differential equation, periodic boundary-value problem, stability, bifurcation, asymptotics, Kuramoto–Sivashinsky equation.

AMS Subject Classification: 34K18, 34K21, 39A28

1. Постановка задачи. В работе рассматривается математическая модель формирования рельефа на поверхности полупроводников под влиянием потока ионов (см. [13, 16, 17]). Изучаемая ниже математическая модель объединяет идеи по учету нелокальных эффектов (см. [9, 10, 12]) с другой, традиционной математической моделью данного технологического процесса. Вторую модель часто называют моделью Бредли—Харпера. Она использует различные модификации широко известного уравнения Курамото—Сивашинского (см. [15, 18]). Данный технологический

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00672) и проекта № 1.5722.2017/8.9 в рамках базовой части государственного задания на научно-исследовательскую работу Ярославского государственного университета.

процесс (см. [16, 17]) применяется в нанoeлектронике, в том числе при создании микропроцессоров.

Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_t = -u_{xxxx} - bu_{xx} - cw_x + c_1 w_x^2. \quad (1)$$

В уравнении (1) $w(t, x) = u(t, x - h)$, h — пространственное отклонение, $c > 0$ — параметр. Дополним задачу периодическим краевым условием

$$u(t, x) = u(t, x + 2\pi) \quad (2)$$

и начальным условием

$$u(0, x) = f(x). \quad (3)$$

Пусть $f(x) \in Q_2(\delta)$, где $Q_2(\delta)$ — достаточно малый шар гильбертова пространства $\mathbb{H}_2^2$ (пространство Соболева 2π -периодических функций, имеющих интегрируемые с квадратом обобщенные производные до второго порядка включительно). Такое условие позволяет утверждать, что поставленная смешанная задача (1)–(3) локально корректно разрешима (см. [11]).

Для краевой задачи (1), (2) будет изучен вопрос о существовании и устойчивости пространственно неоднородных решений. Аналогичные вопросы для уравнения Курамото—Сивашинского были рассмотрены в [6, 14], а для оригинальной версии нелокального уравнения эрозии в [1, 7].

2. Линейный анализ. Нетрудно заметить, что краевая задача (1), (2) имеет семейство однородных состояний равновесия

$$u(t, x) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Более того, решения краевой задачи (1), (2) инвариантны относительно замены

$$u(t, x) \rightarrow u(t, x) + \alpha.$$

Поэтому далее без нарушения общности можем считать, что рассматривается окрестность нулевого состояния равновесия, т.е. окрестность решения $u(t, x) = 0$.

В рамках анализа задачи (1), (2) в данной статье ограничимся вариантом, когда пространственное отклонение $h = \pi/2$ и $h = \pi/3$.

На первом этапе изучим линеаризованный вариант краевой задачи (1), (2). Это означает, что на этом этапе анализу подлежит краевая задача

$$\begin{cases} u_t = Au, \\ u(t, x) = u(t, x + 2\pi), \end{cases} \quad (4)$$

$$(5)$$

где линейный дифференциальный оператор A имеет вид

$$Au = A(b, c)u = -u_{xxxx} - bu_{xx} - cw_x.$$

Вопрос об устойчивости решений краевых задач (4), (5) решается после нахождения собственных значений линейного дифференциального оператора A . Функции $v_n = \exp(inx)$, $n \in \mathbb{Z}$, являются собственными функциями линейного дифференциального оператора A .

Нетрудно убедиться, что спектр линейного дифференциального оператора A дискретен и состоит из собственных значений

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -n^4 + bn^2 - cin(\cos(nh) - i \sin(nh)), \\ \operatorname{Re}(\lambda_n) &= -n^4 + bn^2 - cn \sin(nh), \quad \operatorname{Im}(\lambda_n) = -cn \cos(nh). \end{aligned}$$

В силу четности $\operatorname{Re}(\lambda_n)$ относительно n ограничимся рассмотрением $n = 0, 1, 2, \dots$. Отметим, что $\lambda_0 = 0$ при любых значениях параметров.

Напомним, что нулевое решение краевой задачи (4), (5) асимптотически устойчиво, если $\operatorname{Re}(\lambda_n) < 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, но если $\operatorname{Re}(\lambda_{n_0}) > 0$ при некотором $n = n_0$ — то неустойчиво. Наконец, пусть $\operatorname{Re}(\lambda_{n_k}) = 0$ при некотором $n = n_k$, а при остальных n все собственные числа

ЛДО лежат в левой комплексной полуплоскости; тогда в задаче об устойчивости нулевого решения нелинейной краевой задачи реализуется критический случай. Отметим, что действительная часть собственного значения λ_n становится равной нулю при

$$b = \frac{n^4 + cn \sin(nh)}{n^2},$$

а потеря устойчивости нулевым состоянием равновесия происходит при

$$b = b_{cr} = \frac{n_k^4 + cn_k \sin(n_k h)}{n_k^2}.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Нулевое состояние равновесия краевой задачи (1), (2) устойчиво, если $b < b_{cr}$, и неустойчиво, если $b > b_{cr}$.

Теперь изучим расположение комплексных чисел λ_n на комплексной плоскости при разных значениях пространственного отклонения h .

2.1. Анализ собственных значений при $h = \pi/2$. Нетрудно заметить, что при всех целых положительных значениях l выполнено $\text{Re}(\lambda_{n+4l}) < \text{Re}(\lambda_n)$. Поэтому в данном случае достаточно проанализировать знак действительной части первых четырех собственных значений линейного дифференциального оператора A . Очевидно, что справедливы данные, приведенные в таблице 1. Для того чтобы нулевое состояние равновесия было устойчиво, необходимо, чтобы все $\text{Re}(\lambda_n) < 0$, $n = \overline{1, 4}$.

Таблица 1. Собственные значения при $h = \pi/2$

	$\text{Im}(\lambda_n)$	$\text{Re}(\lambda_n)$
$n = 1$	0	$-1 + b - c$
$n = 2$	$2c$	$-16 + 4b$
$n = 3$	0	$-81 + 9b + 3c$
$n = 4$	$-4c$	$-256 + 16b$

Найдем значения $b = b_{cr}$, при которых реализуются критические случаи. Сделаем это графическим способом (см. рис. 1). Выделенные области соответствуют тем значениям параметров, при которых соответствующие собственные значения имеют отрицательную действительную часть. При этом наиболее темная область правой полуплоскости (ограниченная прямыми $c = 0$, $\text{Re}(\lambda_1) = 0$, $\text{Re}(\lambda_2) = 0$ и $\text{Re}(\lambda_3) = 0$) является областью устойчивости нулевого состояния равновесия.

Графики на рис. 1 наглядно показывают, что для данной задачи возможны критические случаи коразмерности 1 и 2. Критические случаи коразмерности 1 возникают на первой, второй и третьей модах. Более детальная информация о параметрах и собственных значениях, при которых они реализуются, приведена в таблице 2.

Таблица 2. Критические случаи коразмерности 1 при $h = \pi/2$.

Мода (n)	b_{cr}	Интервал c	Собственные значения	Собственные функции
1	$1 + c$	$(0, 3)$	двукратный 0	$\exp(\pm ix)$
2	4	$(3, 15)$	$\pm 2ic$	$\exp(\pm 2ix)$
3	$(81 - 3c)/9$	$(15, +\infty)$	двукратный 0	$\exp(\pm 3ix)$

Критические случаи коразмерности 2 возникает на первой и второй модах, а также на второй и третьей модах. Информация о них приведена в таблице 3.

Рис. 1. Области параметров, при которых собственные значения имеют отрицательную вещественную часть.

Таблица 3. Критические случаи коразмерности 2 при $h = \pi/2$.

Мода (n)	b_{cr}	c_{cr}	Собственные значения	Собственные функции
1, 2	4	3	двукратный 0; $\pm 6i$	$\exp(\pm ix)$; $\exp(\pm 2ix)$
2, 3	4	15	двукратный 0; $\pm 30i$	$\exp(\pm 2ix)$; $\exp(\pm 3ix)$

2.2. Анализ собственных значений при $h = \pi/3$. В случае данного пространственного отклонения очевидно, что $\operatorname{Re}(\lambda_{n+6l}) < \operatorname{Re}(\lambda_n)$ для любого натурального l . Следовательно, достаточно рассмотреть первые шесть собственных значений линейного дифференциального оператора A . Приведем информацию о них в таблице 4.

Таблица 4. Собственные значения при $h = \pi/3$

	$\operatorname{Im}(\lambda_n)$	$\operatorname{Re}(\lambda_n)$
$n = 1$	$-c/2$	$-1 + b - \sqrt{3}c/2$
$n = 2$	c	$-16 + 4b - \sqrt{3}c$
$n = 3$	$3c$	$-81 + 9b$
$n = 4$	$2c$	$-256 + 16b + 2\sqrt{3}c$
$n = 5$	$-5c/2$	$-625 + 25b + 5\sqrt{3}c/2$
$n = 6$	$-6c$	$-1296 + 36b$

Как и в случае пространственного отклонения $h = \pi/2$ представим информацию об устойчивости нулевого состояния равновесия в виде графика на рис. 2. Как и ранее, область значений параметров b, c , при которых нулевое состояние равновесия устойчиво является на графике наиболее темной областью в правой полуплоскости. Эта область ограничена следующими прямыми: $c = 0$, $\operatorname{Re}(\lambda_1) = 0$, $\operatorname{Re}(\lambda_2) = 0$, $\operatorname{Re}(\lambda_3) = 0$ и $\operatorname{Re}(\lambda_4) = 0$.

При данном пространственном отклонении также возможны критические случаи коразмерности 1 и 2. Критические случаи коразмерности 1 имеют место на первых четырех модах (см. таблицу 5).

Теперь приведем информацию о возникающих критических случаях коразмерности 2 в таблице 6. Они возможны на первой и второй, второй и третьей и третьей и четвертой модах.

3. Бифуркационная задача в случае близком к критическому пары чисто мнимых корней. Такой критический случай реализуется, когда на мнимой оси может появиться пара простых чисто мнимых собственных значений.

Рис. 2. Области параметров, при которых собственные значения имеют отрицательную вещественную часть.

Таблица 5. Критические случаи коразмерности 1 при $h = \pi/3$.

Мода (n)	b_{cr}	Интервал c	Собств. значения	Собств. функции
1	$1 + \sqrt{3}c/2$	$(0, 4\sqrt{3})$	$\mp ic/2$	$\exp(\pm ix)$
2	$(16 + \sqrt{3}c)/4$	$(4\sqrt{3}, 20\sqrt{3}/3)$	$\pm ic$	$\exp(\pm 2ix)$
3	9	$(20\sqrt{3}/3, 56\sqrt{3}/3)$	$\pm 3ic$	$\exp(\pm 3ix)$
4	$(256 - 5\sqrt{3}c/2)/25$	$(56\sqrt{3}/3, +\infty)$	$\pm 2ic$	$\exp(\pm 4ix)$

Таблица 6. Критические случаи коразмерности 2 при $h = \pi/3$.

Мода (n)	b_{cr}	c_{cr}	Собственные значения	Собственные функции
1, 2	7	$4\sqrt{3}$	$\mp 2i\sqrt{3}; \pm 4i\sqrt{3}$	$\exp(\pm ix); \exp(\pm 2ix)$
2, 3	9	$20\sqrt{3}/3$	$\pm 20i\sqrt{3}/3; \pm 20i\sqrt{3}$	$\exp(\pm 2ix); \exp(\pm 3ix)$
3, 4	9	$56\sqrt{3}/3$	$\pm 56i\sqrt{3}; \pm 112i\sqrt{3}/3$	$\exp(\pm 3ix); \exp(\pm 4ix)$

Рассмотрим задачу (1), (2) при $b = b_{cr}(1 - \varkappa\varepsilon)$, $\varkappa = \pm 1$, $\varepsilon \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \ll 1$, $s = \varepsilon t$:

$$\begin{cases} u_t = -u_{xxxx} - b_{cr}(1 - \varkappa\varepsilon)u_{xx} - cw_x + c_1w_x^2, \\ u(t, x) = u(t, x + 2\pi). \end{cases} \quad (6)$$

$$u(t, x) = u(t, x + 2\pi). \quad (7)$$

Анализ структуры окрестности нулевого состояния равновесия может быть сведен к анализу нормальной формы Пуанкаре—Дюлака (НФ) (см. [5, 8]).

Будем искать решения краевой задачи (6), (7), которые могут быть представлены в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(t, x, s) + \varepsilon u_2(t, x, s) + \varepsilon^{3/2}u_3(t, x, s) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (8)$$

где $u_j(t, x, s)$, $j = 1, 2, \dots$, — достаточно гладкие функции, для которых выполнены следующие свойства:

- (1) $u_j(t, x + 2\pi, s) = u_j(t, x, s)$, $j = 1, 2, \dots$;
- (2) $u_j(t + 2\pi/\sigma_n, x, s) = u_j(t, x, s)$, $j = 1, 2, \dots$, $\sigma_n = \text{Im}(\lambda_n)$;
- (3) для функций $u_k(t, x, s)$ при $k = 2, 3, \dots$ справедливы равенства

$$\frac{\sigma_n}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma_n} \int_0^{2\pi} u_k(t, x, s) dx dt = \frac{\sigma_n}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma_n} \int_0^{2\pi} u_k(t, x, s) \exp(\pm inx \pm i\sigma_n t) dx dt = 0.$$

Следуя алгоритму построения НФ, подставим сумму (8) в нелинейное уравнение (6). Приравняв коэффициенты при степенях $\varepsilon^{1/2}$, ε и $\varepsilon^{3/2}$, имеем следующие краевые задачи:

$$\begin{cases} u_{1t} = Au_1 = -u_{1xxxx} - b_{cr}u_{1xx} - cw_{1x}, \\ u_1(t, x + 2\pi) = u_1(t, x); \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} u_{2t} = Au_2 + F_2(t, x, s), & F_2(t, x, s) = cw_{1x}^2 - \psi'(s), \\ u_2(t, x + 2\pi) = u_2(t, x). \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} u_{3t} = Au_3 + F_3(t, x, s), & F_3(t, x, s) = b_{cr}\kappa u_{1xx} + 2c_1w_{1x}w_{2x} - u'_{1s}, \\ u_3(t, x + 2\pi) = u_3(t, x). \end{cases} \quad (11)$$

Несложно показать, что функция

$$u_1(t, x, s) = z(s) \exp(inx + i\sigma_n t) + \overline{z(s)} \exp(-inx - i\sigma_n t), \quad \sigma_n = \text{Im}(\lambda_n)$$

является решением краевой задачи (9).

При анализе следующей краевой задачи (10) рассмотрим более детально выражение

$$\begin{aligned} c_1 w_{1x}^2 &= c_1 (z(s) \exp(inx + i\sigma_n t) - \overline{z(s)} \exp(-inx - i\sigma_n t))^2 = \\ &= c_1 n^2 (-n^2 z^2(s) \exp(2inx + 2i\sigma_n t) + 2z(s)\overline{z(s)} - n^2 \overline{z^2(s)} \exp(-2inx - 2i\sigma_n t)) \end{aligned}$$

и применим условие разрешимости в классе периодических функций к неоднородной краевой задаче (10)

$$\int_0^{2\pi/\sigma_n} \int_0^{2\pi} F_2(t, x, s) dx dt = \int_0^{2\pi/\sigma_n} \int_0^{2\pi} F_2(t, x, s) \exp(\pm inx \pm i\sigma_n t) dx dt = 0,$$

в результате чего получаем условие

$$\psi'(s) = 2n^2 c_1 z(s) \overline{z(s)}.$$

Будем искать $u_2(t, x, s)$ в следующем виде:

$$u_2(t, x, s) = \eta(s) \exp(2inx + 2i\sigma_n t) + \overline{\eta(s)} \exp(-2inx - 2i\sigma_n t), \quad \sigma_n = \text{Im}(\lambda_n). \quad (12)$$

Для нахождения функции $\eta(s)$ подставим (12) в краевую задачу (10); получим

$$\eta(s) = \xi z^2(s) = (\xi_1 + i\xi_2) z^2(s) = \frac{n^2 c_1}{4b_{cr}n^2 - 16n^4 - 2icn \exp(-2inh) - 2i\sigma_n} z^2(s).$$

Далее рассмотрим краевую задачу (11). Условие разрешимости для нее будет иметь вид

$$\int_0^{2\pi/\sigma_n} \int_0^{2\pi} F_3(t, x, s) dx dt = \int_0^{2\pi/\sigma_n} \int_0^{2\pi} F_3(t, x, s) \exp(\pm inx \pm i\sigma_n t) dx dt = 0. \quad (13)$$

После вычислений (13) перепишется в виде следующего дифференциального уравнения:

$$z'(s) = -b_{cr}\kappa n^2 z(s) + 4n^2 c_1 (\xi_1 \cos(nh) + \xi_2 \sin(nh) + i(\xi_2 \cos(nh) - \xi_1 \sin(nh))) |z(s)|^2 z(s).$$

Таким образом, мы получили систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \psi'(s) = 2n^2 c_1 |z(s)|^2, \\ z'(s) = kz(s) + (g + di) |z(s)|^2 z(s), \end{cases} \quad (14)$$

которую принято называть нормальной формой. При ее записи были использованы следующие обозначения:

$$k = -b_{cr}\kappa n^2, \quad g = 4n^2 c_1 (\xi_1 \cos(nh) + \xi_2 \sin(nh)), \quad d = 4n^2 c_1 (\xi_2 \cos(nh) - \xi_1 \sin(nh)).$$

Преобразуем НФ (14), положив $z(s) = \rho(s) \exp(i\varphi(s))$, $\rho(s) > 0$. После несложных вычислений нормальная форма принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \psi'(s) = 2n^2 c_1 \rho^2(s), \\ \rho'(s) = k\rho(s) + g\rho^3(s), \\ \varphi'(s) = d\rho^2(s). \end{cases} \quad (15)$$

Особую роль при анализе полученной НФ (15) играет уравнение для амплитуды ρ . Оно имеет состояние равновесия S_0 : $\rho_0 = \sqrt{-k/g}$, существующее если $kg < 0$. Ему соответствуют следующие решения системы (15):

$$\begin{cases} \rho(s) = \sqrt{-k/g}, \\ \psi(s) = -2n^2 c_1 \frac{k}{g} s + \psi_0, & \psi_0 \in \mathbb{R}, \\ \varphi(s) = -d \frac{k}{g} s + \varphi_0, & \varphi_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Стандартным образом определяется устойчивость состояния равновесия S_0 .

Теорема 2. Пусть выполнено условие существования состояния равновесия S_0 дифференциального уравнения для ρ в (15), т.е. условие $kg < 0$. Тогда S_0 асимптотически устойчиво, когда $g < 0$ ($k > 0$), и неустойчиво при $g > 0$ ($k < 0$).

Анализ НФ (см. теорему 2) и результаты работ [2–4] позволяют получить следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнено условие $kg < 0$. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ рассмотренная краевая задача (6), (7) имеет двупараметрическое семейство решений с асимптотикой

$$u(t, x, \varepsilon) = \left(-2n^2 c_1 \frac{k}{g} \varepsilon + o(\varepsilon) \right) t + \sqrt{-\frac{k}{g}} \varepsilon^{1/2} (v + \bar{v}) - \frac{\varepsilon k}{g} (\xi v^2 + \bar{\xi} \bar{v}^2) + o(\varepsilon) + \psi_0,$$

где

$$v = \exp \left(\left(\sigma_n - \varepsilon d \frac{k}{g} \right) it + inx + i\varphi_0 \right), \quad \sigma_n = \operatorname{Im}(\lambda_n), \quad \varphi_0 \in \mathbb{R}, \quad \psi_0 \in \mathbb{R}.$$

Эти решения устойчивы при $g < 0$ ($k > 0$) и неустойчивы при $g > 0$ ($k < 0$). Иными словами, они устойчивы, когда состояние равновесия S_0 асимптотически устойчиво, и неустойчивы, если S_0 неустойчиво.

Теперь последовательно рассмотрим все критические случаи, относящиеся к рассматриваемой ситуации.

3.1. Критические случаи при $h = \pi/3$. Как было показано в разделе линейного анализа, таких случаев четыре и они реализуются на первых четырех модах.

Случай 1: $n = 1$, $c \in (0, 4\sqrt{3})$. В этом случае

$$k = \left(-\frac{\sqrt{3}c}{2} - 1 \right) \varkappa, \quad g = \frac{2(\sqrt{3}c + 12)c_1^2}{-7c^2 + 24\sqrt{3}c - 144}, \quad d = \frac{2(5c - 12\sqrt{3})c_1^2}{-7c^2 + 24\sqrt{3}c - 144}.$$

Несложно проверить, что $-7c^2 + 24\sqrt{3}c - 144 < 0$ для любого c . Следовательно, $g < 0$, и состояние равновесия S_0 существует, если $\varkappa < 0$. Это состояние равновесия асимптотически устойчиво.

Случай 2: $n = 2$, $c \in (4\sqrt{3}, 20\sqrt{3}/3)$. В этом случае

$$k = (-\sqrt{3}c - 16)\varkappa, \quad g = \frac{16c_1^2}{96 - 3\sqrt{3}c}, \quad d = \frac{16c_1^2}{32\sqrt{3} - 3c}.$$

Заметим, что $96 - 3\sqrt{3}c > 0$ при рассматриваемых значениях параметра c . Следовательно, $g > 0$ и состояние равновесия S_0 существует, если $\varkappa > 0$. Это состояние равновесия неустойчиво.

Случай 3 : $n = 3$, $c \in (20\sqrt{3}/3, 56\sqrt{3}/3)$. В этом случае

$$k = -81\kappa, \quad g = \frac{2187c_1^2}{c^2 + 6561}, \quad d = -\frac{27cc_1^2}{c^2 + 6561}.$$

Очевидно, $g > 0$, и состояние равновесия S_0 существует, если $\kappa > 0$. Это состояние равновесия неустойчиво.

Случай 4 : $n = 4$, $c > 56\sqrt{3}/3$. В этом случае

$$k = (2\sqrt{3}c - 256)\kappa, \quad g = \frac{128c_1^2}{3\sqrt{3}c + 768}, \quad d = -\frac{128cc_1^2}{3c + 256\sqrt{3}}.$$

Очевидно, $g > 0$. Несложно показать, что состояние равновесия S_0 существует, когда $\kappa > 0$ и $c < 128\sqrt{3}/3$ или когда $\kappa < 0$ и $c > 128\sqrt{3}/3$. Это состояние равновесия неустойчиво.

3.2. *Критические случаи при $h = \pi/2$.* Критический случай пары чисто мнимых собственных значений реализуется только на второй моде. В этом случае $n = 2$, $c \in (3, 15)$ и

$$k = -16\kappa, \quad g = \frac{192c_1^2}{c^2 + 576}, \quad d = -\frac{8cc_1^2}{c^2 + 576}.$$

Очевидно, $g > 0$. Следовательно, состояние равновесия S_0 существует, если $\kappa > 0$. Это состояние равновесия неустойчиво.

4. Критический случай двукратного нуля. Пусть реализуется критический случай коразмерности 1, когда на мнимой оси появляется пара нулевых собственных значений. Описанная ситуация возникает только при пространственном отклонении $h = \pi/2$ на первой и третьей модах. В данной ситуации анализ бифуркационной задачи почти повторяет предыдущий раздел. В результате исследования рассматриваемого критического случая, можно сформулировать результат, схожий с теоремами 2 и 3. Отличие состоит в том, что в этом разделе $\sigma_n = 0$ для всех n .

Случай 1 : $n = 1$, $c \in (0, 3)$. В этом случае

$$k = (-c - 1)\kappa, \quad g = -\frac{2cc_1^2}{5c^2 - 24c + 36}, \quad d = -\frac{4(c - 3)c_1^2}{5c^2 - 24c + 36}.$$

Несложно показать, что $5c^2 - 24c + 36 > 0$, а значит, $g < 0$. Состояние равновесия S_0 существует, если $\kappa < 0$. Это состояние равновесия асимптотически устойчиво.

Случай 2 : $n = 3$, $c > 15$. В этом случае

$$k = (-81 + 3c)\kappa, \quad g = \frac{54cc_1^2}{5c^2 + 648c + 26244}, \quad d = -\frac{108(c + 81)c_1^2}{5c^2 + 648c + 26244}.$$

В данном случае $g > 0$. Состояние равновесия S_0 существует, если $\kappa < 0$ и $c > 27$ или $\kappa < 0$ и $c < 27$. Это состояние равновесия неустойчиво.

Подчеркнем, что и в этом случае краевая задача имеет периодические решения второго рода, т.е. $\partial u / \partial t$ — периодическая функция переменного t (по x она, конечно, периодична с периодом 2π). При этом $\partial u / \partial t$ имеет период $T(\varepsilon) = 2\pi g / (\varepsilon dk + o(\varepsilon))$. Величина $T(\varepsilon)$ стремится к бесконечности, если $\varepsilon \rightarrow 0$.

5. Бифуркационная задача коразмерности 2. В данном разделе ограничимся рассмотрением только одного нерезонансного случая, когда у линейного дифференциального оператора существуют две пары комплексно сопряженных собственных значений, а остальные собственные значения находятся в левой комплексной полуплоскости. Моды, на которых возникают эти собственные значения, обозначим n_1 и n_2 . В данном случае бифуркационная задача имеет два бифуркационных параметра и записывается в виде

$$\begin{cases} u_t = -u_{xxxx} - b_{cr}(1 - \kappa_1\varepsilon)u_{xx} - c_{cr}(1 - \kappa_2\varepsilon)w_x + c_1w_x^2, & \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} u(t, x) = u(t, x + 2\pi). \end{cases} \quad (17)$$

Как и в бифуркационных задачах, рассмотренных выше, считаем, что $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \ll 1$.

Найдем решение в виде ряда

$$u(t, x, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(t, x, s) + \varepsilon u_2(t, x, s) + \varepsilon^{3/2}u_3(t, x, s) + o(\varepsilon^{3/2}). \quad (18)$$

Для этого подставим разложение (18) в краевую задачу (16), (17). Приравнявая выражения при каждой степени ε , получим следующие краевые задачи

$$\begin{cases} u_{1t} = Au_1 = -u_{1xxxx} - b_{cr}u_{1xx} - c_{cr}w_{1x}, \\ u_1(t, x, s) = u_1(t, x + 2\pi, s); \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} u_{2t} + \psi' = Au_2 + c_1w_{1x}^2, \\ u_2(t, x, s) = u_2(t, x + 2\pi, s); \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} u_{3t} + u_{1s} = Au_3 + b_{cr}\kappa_1u_{1xx} + c_{cr}\kappa_2w_{1x} + c_1w_{1x}w_{2x}, \\ u_3(t, x, s) = u_3(t, x + 2\pi, s). \end{cases} \quad (21)$$

В данном случае решение краевой задачи (19) имеет вид

$$u_1 = z_1(s) \exp(in_1x + i\sigma_{n_1}t) + \overline{z_1(s)} \exp(-in_1x - i\sigma_{n_1}t) + z_2(s) \exp(in_2x + i\sigma_{n_2}t) + \overline{z_2(s)} \exp(-in_2x - i\sigma_{n_2}t), \quad \sigma_{n_j} = \text{Im}(\lambda_{n_j}), \quad j = 1, 2. \quad (22)$$

В представлении (22) функции $z_1(s)$ и $z_2(s)$ подлежат определению, а n_1, n_2 — моды, при которых реализуется критический случай.

Введем обозначения

$$k_j = \exp(-in_jh), \quad q_j = \exp(in_jx + i\sigma_{n_j}t), \quad j = 1, 2,$$

и рассмотрим выражение $F_1(t, x, s) = c_1w_{1x}^2 - \psi'(s)$. Для того чтобы задача (20) имела 2π -периодичное по x и $2\pi/\sigma_j$ -периодичное по t решение, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\sigma_{n_j}} \int_0^{2\pi} F_1(t, x, s) dx dt &= \int_0^{2\pi/\sigma_{n_j}} \int_0^{2\pi} F_1(t, x, s) \exp(\pm in_1x \pm i\sigma_{n_1}t) dx dt, \\ \int_0^{2\pi/\sigma_{n_j}} \int_0^{2\pi} F_1(t, x, s) \exp(\pm in_2x \pm i\sigma_{n_2}t) dx dt &= 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (23)$$

Они определяют ограничение, которое необходимо наложить на функцию $\psi(s)$:

$$\psi'(s) = 2c_1 \left[n_1^2 |z_1(s)|^2 |k_1|^2 + n_2^2 |z_2(s)|^2 |k_2|^2 \right]. \quad (24)$$

Следующий член разложения решения представим в виде

$$u_2 = \alpha(s)q_1^2 + \overline{\alpha(s)}\overline{q_1}^2 + \beta(s)q_2^2 + \overline{\beta(s)}\overline{q_2}^2 + \gamma(s)q_1q_2 + \overline{\gamma(s)}\overline{q_1}\overline{q_2} + \tau(s)q_1\overline{q_2} + \overline{\tau(s)}\overline{q_1}q_2, \quad (25)$$

где функции $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$ и $\tau(s)$ подлежат определению.

Учитывая уравнение (24), после подстановки (25) краевая задача (20) позволяет нам определить вид искомых функций в представлении (25):

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= -\frac{c_1n_1^2k_1^2}{2i\sigma_{n_1} + 16n_1^4 - 4n_1^2b_{cr} + 2ik_1^2n_1c_{cr}} z_1(s)^2, \\ \beta(s) &= -\frac{c_1n_2^2k_2^2}{2i\sigma_{n_2} + 16n_2^4 - 4n_2^2b_{cr} + 2ik_2^2n_2c_{cr}} z_2(s)^2, \\ \gamma(s) &= -\frac{2c_1n_1n_2k_1k_2}{i(\sigma_{n_1} + \sigma_{n_2}) + (n_1 + n_2)^4 - (n_1 + n_2)^2b_{cr} + i(n_1 + n_2)k_1k_2c_{cr}} z_1(s)z_2(s), \\ \tau(s) &= -\frac{2c_1n_1n_2k_1\overline{k_2}}{i(\sigma_{n_1} - \sigma_{n_2}) + (n_1 - n_2)^4 - (n_1 - n_2)^2b_{cr} + i(n_1 - n_2)k_1\overline{k_2}c_{cr}} z_1(s)\overline{z_2(s)}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание все вышесказанное и применяя условия разрешимости (23), но уже для краевой задачи (21), получим следующие условия:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1(c_{cr}\kappa_2 in_1 k_1 - b_{cr}\kappa_1 n_1^2) + 2c_1(-n_2(n_1 - n_2)k_1|k_2|^2 z_2(s)\tau(s) + \\ &\quad + n_2(n_1 + n_2)k_1|k_2|^2 \overline{z_2(s)}\gamma(s) + 2n_1^2 k_1|k_1|^2 \overline{z_1(s)}\alpha(s)), \\ z_2' &= z_2(c_{cr}\kappa_2 in_2 k_2 - b_{cr}\kappa_1 n_2^2) + 2c_1(n_1(n_1 - n_2)k_2|k_1|^2 z_1(s)\overline{\tau(s)} + \\ &\quad + n_1(n_1 + n_2)k_2|k_1|^2 \overline{z_1(s)}\gamma(s) + 2n_2^2 k_2|k_2|^2 \overline{z_2(s)}\beta(s)). \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \widehat{\alpha(s)} z_1(s)^2, \quad \beta(s) = \widehat{\beta(s)} z_2(s)^2, \\ \gamma(s) &= \widehat{\gamma(s)} z_1(s) z_2(s), \quad \tau(s) = \widehat{\tau(s)} z_1(s) \overline{z_2(s)}, \\ g_1 + id_1 &= c_{cr}\kappa_2 in_1 k_1 - b_{cr}\kappa_1 n_1^2, \quad g_2 + id_2 = c_{cr}\kappa_2 in_2 k_2 - b_{cr}\kappa_1 n_2^2, \\ a_1 + ib_1 &= 4c_1 n_1^2 k_1|k_1|^2 \widehat{\alpha(s)}, \quad l_2 + if_2 = 4c_1 n_2^2 k_2|k_2|^2 \widehat{\beta(s)}, \\ l_1 + if_1 &= 2c_1(n_2(n_2 - n_1)k_1|k_2|^2 \widehat{\tau(s)} + n_2(n_1 + n_2)k_1|k_2|^2 \widehat{\gamma(s)}), \\ a_2 + ib_2 &= 2c_1(n_1(n_1 - n_2)k_2|k_1|^2 \widehat{\tau(s)} + n_1(n_1 + n_2)k_2|k_1|^2 \widehat{\gamma(s)}). \end{aligned}$$

Таким образом, полученная нормальная форма состоит из трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \psi'(s) = 2c_1(n_1^2|z_1(s)|^2|k_1|^2 + n_2^2|z_2(s)|^2|k_2|^2), \\ z_1'(s) = (g_1 + id_1)z_1(s) + \left((a_1 + ib_1)|z_1(s)|^2 + (l_1 + if_1)|z_2(s)|^2\right)z_1(s), \\ z_2'(s) = (g_2 + id_2)z_2(s) + \left((a_2 + ib_2)|z_1(s)|^2 + (l_2 + if_2)|z_2(s)|^2\right)z_2(s). \end{cases} \quad (26)$$

Представим функции $z_1(s)$ и $z_2(s)$ в тригонометрической форме:

$$z_1(s) = \rho_1(s) \exp(i\varphi_1(s)), \quad z_2(s) = \rho_2(s) \exp(i\varphi_2(s)).$$

После их подстановки в уравнения системы (26) получаем систему из пяти более простых уравнений:

$$\begin{cases} \rho_1'(s) = g_1\rho_1(s) + a_1\rho_1(s)^3 + l_1\rho_1(s)\rho_2(s)^2, \\ \rho_2'(s) = g_2\rho_2(s) + a_2\rho_2(s)\rho_1(s)^2 + l_2\rho_2(s)^3, \\ \psi'(s) = 2c_1(n_1^2\rho_1(s)^2|k_1|^2 + n_2^2\rho_2(s)^2|k_2|^2), \\ \varphi_1'(s) = d_1 + b_1\rho_1(s)^2 + f_1\rho_2(s)^2, \\ \varphi_2'(s) = d_2 + b_2\rho_1(s)^2 + f_2\rho_2(s)^2. \end{cases} \quad (27)$$

Рассмотрим отдельно систему для амплитуд

$$\begin{cases} \rho_1'(s) = g_1\rho_1(s) + a_1\rho_1(s)^3 + l_1\rho_1(s)\rho_2(s)^2, \\ \rho_2'(s) = g_2\rho_2(s) + a_2\rho_2(s)\rho_1(s)^2 + l_2\rho_2(s)^3. \end{cases} \quad (28)$$

Ей соответствует матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} g_1 + 3a_1\rho_1(s)^2 + l_1\rho_2(s)^2 & 2l_1\rho_1(s)\rho_2(s) \\ 2a_2\rho_1(s)\rho_2(s) & g_2 + a_2\rho_1(s)^2 + 3l_2\rho_2(s)^2 \end{pmatrix}.$$

Система (28) имеет четыре состояния равновесия:

1. Состояние равновесия S_0 : $\rho_1(s) = 0$, $\rho_2(s) = 0$ существует всегда. Его устойчивость определяется собственными значениями матрицы Якоби

$$J|_{S_0} = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix},$$

которые равны g_1 и g_2 . Следовательно, нулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво, когда $g_1 < 0$ и $g_2 < 0$, и неустойчиво, когда $g_1 > 0$ или $g_2 > 0$.

2. Положим $\rho_1(s) = 0$, $\rho_2(s) \neq 0$. Тогда $\rho_2(s)$ определяется из условия $g_2 + l_2\rho_2(s)^2 = 0$. Таким образом, состояние равновесия S_1 : $\rho_1(s) = 0$, $\rho_2(s) = \sqrt{-g_2/l_2}$ существует, если $g_2 l_2 < 0$. Соответствующая матрица Якоби имеет вид

$$J|_{S_1} = \begin{pmatrix} g_1 - g_2 l_1 / l_2 & 0 \\ 0 & -2g_2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что при $g_2 > 0$ и $g_1 - g_2 l_1 / l_2 < 0$ состояние равновесия S_1 асимптотически устойчиво. Если же $g_2 < 0$ или $g_1 - g_2 l_1 / l_2 > 0$, то S_1 является неустойчивым состоянием равновесия.

3. Теперь положим $\rho_2(s) = 0$, $\rho_1(s) \neq 0$. Состояние равновесия S_2 : $\rho_2(s) = 0$, $\rho_1(s) = \sqrt{-g_1/a_1}$ существует, когда $g_1 a_1 < 0$. Соответствующая матрица Якоби имеет вид

$$J|_{S_2} = \begin{pmatrix} -2g_1 & 0 \\ 0 & g_2 - g_1 a_2 / a_1 \end{pmatrix}.$$

Состояние равновесия S_2 асимптотически устойчиво при условии, что $g_1 > 0$ и $g_2 - g_1 a_2 / a_1 < 0$, и неустойчиво, когда $g_1 < 0$ или $g_2 - g_1 a_2 / a_1 > 0$.

4. Полагая $\rho_1(s) \neq 0$ и $\rho_2(s) \neq 0$, получаем систему

$$\begin{cases} g_1 + a_1 \rho_1(s)^2 + l_1 \rho_2(s)^2 = 0, \\ g_2 + a_2 \rho_1(s)^2 + l_2 \rho_2(s)^2 = 0, \end{cases}$$

из которой определяем состояние равновесия

$$S_3: \quad \rho_1(s) = \sqrt{\frac{g_1 l_2 - g_2 l_1}{a_2 l_1 - a_1 l_2}}, \quad \rho_2(s) = \sqrt{\frac{g_2 a_1 - g_1 a_2}{a_2 l_1 - a_1 l_2}}.$$

Для удобства введем обозначения $A = g_2 a_1 - g_1 a_2$, $B = a_2 l_1 - a_1 l_2$, $C = g_1 l_2 - g_2 l_1$; тогда состояние равновесия S_3 запишется в виде $\rho_1(s) = \sqrt{C/B}$, $\rho_2(s) = \sqrt{A/B}$. Оно существует, когда $AB > 0$ и $AC > 0$. Соответствующая матрица Якоби равна

$$J|_{S_3} = \begin{pmatrix} 2a_1 C/B & 2l_1 \sqrt{AC/B^2} \\ 2a_2 \sqrt{AC/B^2} & 2l_2 A/B \end{pmatrix};$$

ее собственные значения определяются из уравнения

$$\lambda^2 - \frac{2(a_1 C + l_2 A)}{B} \lambda + \frac{4a_1 l_2 AC}{B^2} - \frac{4l_1 a_2 AC}{B^2} = 0.$$

Необходимым и достаточным условием положительности действительной части корней данного уравнения второго порядка является положительность всех коэффициентов. Это означает, что состояние равновесия S_3 является асимптотически устойчивым, когда

$$\begin{cases} -\frac{2(a_1 C + l_2 A)}{B} > 0, \\ \frac{4a_1 l_2 AC}{B^2} - \frac{4l_1 a_2 AC}{B^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1 C + l_2 A}{B} < 0, \\ \frac{AC}{B} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A < 0, \\ B < 0, \\ C < 0, \\ a_1 C + l_2 A > 0. \end{cases}$$

Неустойчивым состояние равновесия S_3 будет когда либо $A > 0$, либо $B > 0$, либо $C > 0$, либо $a_1 C + l_2 A > 0$.

Каждому состоянию равновесия $S_i = (\eta_1, \eta_2)$ соответствует решение системы (27)

$$\begin{cases} \rho_1(s) = \eta_1, \\ \rho_2(s) = \eta_2, \\ \psi(s) = 2c_1(n_1^2\rho_1^2|k_1|^2 + n_2^2\rho_2(s)^2|k_2|^2)s + \psi_0, \\ \varphi_1(s) = (d_1 + b_1\rho_1(s)^2 + f_1\rho_2(s)^2)s + \varphi_{01}, \\ \varphi_2(s) = (d_2 + b_2\rho_1(s)^2 + f_2\rho_2(s)^2)s + \varphi_{02}, \end{cases}$$

где $\psi_0, \varphi_{01}, \varphi_{02} \in \mathbb{R}$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия существования состояния равновесия $\rho_1(s) = \eta_1$, $\rho_2(s) = \eta_2$ (S_1 , S_2 или S_3). Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ рассмотренная краевая задача (16), (17) имеет семейство решений с асимптотикой

$$u(t, x, \varepsilon) = \left(2c_1(n_1^2\rho_1^2|k_1|^2 + n_2^2\rho_2(s)^2|k_2|^2) + o(\varepsilon)\right)t + v(t, x, \varepsilon) + \psi_0,$$

где $\psi_0, \varphi_{01}, \varphi_{02} \in \mathbb{R}$,

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}(p_1(t, x, \varepsilon) + \overline{p_1(t, x, \varepsilon)} + p_2(t, x, \varepsilon) + \overline{p_2(t, x, \varepsilon)}) + o(\varepsilon^{1/2}),$$

$$p_i(t, x, \varepsilon) = \eta_i \exp\left(in_i x + (\sigma_{n_i} + \varepsilon(d_i + b_i\eta_1^2 + f_i\eta_2^2))it + i\varphi_{0i}\right), \quad i = 1, 2.$$

Эти решения устойчивы, если соответствующее состояние равновесия системы (28) асимптотически устойчиво, и неустойчивы, когда неустойчиво соответствующее состояние равновесия системы (28).

Теперь рассмотрим критический случай коразмерности 2, который возникает на третьей и четвертой модах ($n_1 = 3$, $n_2 = 4$) при пространственном отклонении $h = \pi/3$.

Благодаря уже приведенным рассуждениям мы можем сразу вычислить все данные, которые нам понадобятся для записи и анализа нормальной формы, а также анализа устойчивости состояний равновесия S_1 , S_2 и S_3 (отметим, что десятичные дроби приводятся с точностью до трех знаков после запятой):

$$\begin{aligned} c_{cr} &= 56\sqrt{3}/3, \quad b_{cr} = 9, \quad k_1 = -1, \quad k_2 = -1/2 + (i\sqrt{3})/2, \quad \sigma_1 = 56\sqrt{3}, \\ \sigma_2 &= 112\sqrt{3}/3, \quad q_1 = \exp(3ix + 56i\sqrt{3}t), \quad q_2 = \exp(4ix + 112i\sqrt{3}/3t), \\ \widehat{\alpha}(s) &= c_1(-0,008 + 0,003i), \quad \widehat{\beta}(s) = c_1(0,002 + 0,004i), \quad g_1 = -81\kappa_1, \\ \widehat{\gamma}(s) &= c_1(-0,004 + 0,01i), \quad \widehat{\tau}(s) = c_1(-0,871 - 0,335i), \quad g_2 = -16(9\kappa_1 + 7\kappa_2), \\ d_1 &= -56\sqrt{3}\kappa_2, \quad d_2 = -64,663\kappa_2, \quad a_1 = 0,288c_1^2, \quad b_1 = -0,115c_1^2, \quad l_2 = -0,274c_1^2, \\ f_2 &= 0, \quad l_1 = 7,207c_1^2, \quad f_1 = 2,112c_1^2, \quad a_2 = -1,152c_1^2, \quad b_2 = 5,162c_1^2. \end{aligned}$$

Теперь приведем нормальную форму (26) в рассматриваемом случае:

$$\begin{cases} \psi'(s) = 2c_1(9|z_1(s)|^2 + 16|z_2(s)|^2), \\ z_1'(s) = (-81\kappa_1 - 56i\sqrt{3}\kappa_2)z_1(s) + [(0,288 - 0,115i)|z_1(s)|^2 + (7,207 + 2,112i)|z_2(s)|^2]c_1^2z_1(s); \\ z_2'(s) = -\frac{16}{3}(27\kappa_1 + 7(3 + i\sqrt{3})\kappa_2)z_2(s) + [(-1,152 + 5,162i)|z_1(s)|^2 - 0,274|z_2(s)|^2]c_1^2z_2(s). \end{cases}$$

После замены система (27) примет вид

$$\begin{cases} \rho_1'(s) = -81\kappa_1\rho_1(s) + 0,288c_1^2\rho_1(s)^3 + 7,207c_1^2\rho_1(s)\rho_2(s)^2, \\ \rho_2'(s) = -16(9\kappa_1 + 7\kappa_2)\rho_2(s) - 1,152c_1^2\rho_2(s)\rho_1(s)^2 - 0,274c_1^2\rho_2(s)^3, \\ \psi'(s) = 2c_1(9|z_1(s)|^2 + 16|z_2(s)|^2), \\ \varphi_1'(s) = -56\sqrt{3}\kappa_2 - 0,115c_1^2\rho_1(s)^2 + 2,112c_1^2\rho_2(s)^2, \\ \varphi_2'(s) = -64,663\kappa_2 + 5,162c_1^2\rho_1(s)^2. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим состояния равновесия системы, состоящей из амплитудных уравнений.

1. Нулевое состояние равновесия S_0 : $\rho_1(s) = 0$, $\rho_2(s) = 0$ асимптотически устойчиво, если $g_1 < 0$ и $g_2 < 0$, т.е. когда

$$\begin{cases} -81\kappa_1 < 0, \\ -16(9\kappa_1 + 7\kappa_2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 > 0, \\ 9\kappa_1 + 7\kappa_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 > 0, \\ \kappa_2 > -\frac{9}{7}\kappa_1. \end{cases}$$

2. Состояние равновесия S_1 : $\rho_1(s) = 0$, $\rho_2(s) = \sqrt{-117 \frac{9\kappa_1 + 7\kappa_2}{2c_1^2}}$ существует, когда $9\kappa_1 + 7\kappa_2 < 0$. Оно асимптотически устойчиво, если

$$-1,313\kappa_1 < \kappa_2 < -1,286\kappa_1.$$

Очевидно, что это условие может быть выполнено только при $\kappa_1 > 0$.

3. Теперь рассмотрим состояние равновесия S_2 : $\rho_2(s) = 0$, $\rho_1(s) = \sqrt{281,716\kappa_1/c_1^2}$ существует, когда $\kappa_1 > 0$. Условия его асимптотической устойчивости имеют следующий вид:

$$-81\kappa_1 > 0, \quad -468,475\kappa_1 - 112\kappa_2 < 0.$$

Так как первое неравенство системы противоречит условию существования данного состояния равновесия, то оно является неустойчивым.

4. Для исследования состояния равновесия S_3 : $\rho_1(s) = \sqrt{C/B}$, $\rho_2(s) = \sqrt{A/B}$ определим величины

$$A = -(134,7\kappa_1 + 32,203\kappa_2)c_1^2, \quad B = -8,222c_1^4, \quad C = (1059,923\kappa_1 + 807,154\kappa_2)c_1^2.$$

Очевидно, $B < 0$. Состояние равновесие S_3 существует, если

$$\kappa_1 > 0, \quad -4,183\kappa_1 < \kappa_2 < -1,313\kappa_1.$$

Условие асимптотической устойчивости имеет вид

$$\kappa_1 > 0, \quad -1,418\kappa_1 < \kappa_2 < -1,131\kappa_1.$$

6. Заключение. В данной статье рассмотрена периодическая краевая задача для одного уравнения с отклоняющимся пространственным аргументом. Поставленная краевая задача рассматривалась при двух значениях пространственного отклонения $h = \pi/2$, $h = \pi/3$.

Для однородных состояний равновесия была рассмотрена возможность реализации критических случаев трех типов:

1. На мнимой оси находится одна простая пара чисто мнимых собственных значений. В этом случае бифурцируют периодические по t решения второго рода, которые также зависят от x . Напомним, что периодическим решением второго рода называют такое решение, производная по t которого будет уже обычной периодической функцией переменного t .
2. Критический случай двукратного нулевого собственного значения спектра устойчивости. Изучение соответствующей бифуркационной задачи показало возможность появления пространственно неоднородных решений. Эти решения являются по переменной t периодическими функциями второго рода.
3. В работе была изучена и бифуркационная краевая задача коразмерности 2, когда на мнимой оси находятся две пары чисто мнимых нерезонансных собственных значений. Отметим, что состояниям равновесия S_1 и S_2 соответствуют решения, которые являются периодическими решениями второго рода. Иной вариант решений реализуется, если рассмотреть состояние равновесия S_3 . Ему соответствуют пространственно неоднородные решения, у которых есть две составляющие: линейная функция от t и квазипериодическая функция переменного t . Такие решения принято называть квазипериодическими решениями второго рода.

Для решения поставленных бифуркационных задач использовались метод нормальных форм Пуанкаре—Дюлака, метод интегральных многообразий и асимптотические формулы. В работе изучен вопрос об устойчивости однородных состояний равновесий, получены асимптотические формулы пространственно неоднородных решений и условия их устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалева А. М., Куликов А. Н., Куликов Д. А. Устойчивость и бифуркации волнообразных решений для одного функционально-дифференциального уравнения// Изв. ин-та мат. и информат. Удмурт. гос. ун-та — 2015. — 2, № 46. — С. 60–68.
2. Колесов А. Ю., Куликов А. Н. Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений. — Ярославль: ЯрГУ, 2005.
3. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 6. — С. 738–753.
4. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. — М.: Физматлит, 2004.
5. Куликов А. Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве// в кн.: Исследования по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль: ЯрГУ, 1976. — С. 114–129.
6. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — 52, № 5. — С. 930–945.
7. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Нелокальная модель формирования рельефа под воздействием потока ионов. Неоднородные наноструктуры// Изв. ин-та мат. и информат. Удмурт. гос. ун-та — 2015. — 28, № 3. — С. 33–50.
8. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980.
9. Рудый А. С., Бачурин В. И. Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой// Изв. РАН. Сер. физ. — 2008. — 72, № 5. — С. 624–629.
10. Рудый А. С., Куликов А. Н., Метлицкая А. В. Моделирование процессов формирования наноструктур при распылении ионной бомбардировкой// Микроэлектроника. — 2011. — 40, № 2. — С. 109–118.
11. Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1967. — 10. — С. 297–350.
12. Bachurin V. I., Rudy A. S., Smirnov V. K. Nanoscale Model of Surface Erosion by Ion Bombardment// Radiat. Eff. Defects Solids. — 2006. — 161, № 6. — P. 319–329.
13. Bradley R. M., Harper J. M. F. Theory of ripple topography induced by ion bombardment// J. Vac. Sci. Techn. A. — 1988. — 6, № 4. — P. 2390–2395.
14. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Spatially inhomogeneous solutions for a modified Kuramoto—Sivashinsky equation// J. Math. Sci. — 2016. — 219, № 2. — P. 173–183.
15. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. — Berlin: Springer, 1984.
16. Sigmund P. Theory of sputtering. I. Sputtering yield of amorphous and polycrystalline targets// Phys. Rev. — 1969. — 184, № 2. — P. 383–416.
17. Sigmund P. A mechanism of surface micro-roughening by ion bombardment// J. Math. Sci. — 1973. — 8. — P. 1545.
18. Sivashinsky G. I. Weak Turbulence in Periodic Flow// Phys. D. Nonlin. Phenom. — 1985. — 17, № 2. — P. 243–255.

Ковалева Анастасия Михайловна

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: anastasia2kovaleva@gmail.com