Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, Г. И. Шляпугин, О разрушении решений задач Коши для одного класса нелинейных уравнений теории ферритов, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 185, 79–131

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-185-79-131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:08:37

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 185 (2020). С. 79–131
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-185-79-131

УДК 517.538

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ФЕРРИТОВ

© 2020 г. М. О. КОРПУСОВ, Г. И. ШЛЯПУГИН

Аннотация. В работе рассмотрены три нелинейных уравнения теории магнетиков с градиентными нелинейностями $|\nabla u|^q$, $\partial_t |\nabla u|^q$ и $\partial_t^2 |\nabla u|^q$. Для соответствующих задач Коши получены результаты о локальной во времени однозначной разрешимости в слабом смысле и о разрушении за конечное время. Эти три уравнения объединены наличием критического показателя $q = 3/2$, поскольку поведение слабых решений различно при $1 < q \leq 3/2$ и при $q > 3/2$. Методом нелинейной емкости С. И. Похожаева получены априорные оценки, из которых и вытекают результаты об отсутствии локальных и глобальных слабых решений.

Ключевые слова: нелинейное уравнение соболевского типа, разрушение, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценка времени разрушения.

ON BLOW-UP OF SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEMS FOR A CLASS OF NONLINEAR EQUATIONS OF FERRITE THEORY

© 2020 M. O. KORPUSOV, G. I. SHLYAPUGIN

ABSTRACT. In this paper, we consider three nonlinear equations of the theory of magnets with gradient nonlinearities $|\nabla u|^q$, $\partial_t |\nabla u|^q$, and $\partial_t^2 |\nabla u|^q$ are considered. For the corresponding Cauchy problems, we obtain results on local-in-time unique solvability in the weak sense and on blow-up for a finite time. These three equations have the same critical exponent $q = 3/2$ since weak solutions behave differently for $1 < q \leq 3/2$ and for $q > 3/2$. By the method of nonlinear capacity proposed by S. I. Pokhozhaev, we obtain a priori estimates, which imply the absence of local and global weak solutions.

Keywords and phrases: nonlinear Sobolev-type equation, blow-up, local solvability, nonlinear capacity, estimates of the blow-up time.

AMS Subject Classification: 35B44

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	80
2. Обозначения	81
3. Фундаментальное решение	83
4. Вторая формула Грина	86
5. Третья формула Грина в ограниченной области	87
6. Третья формула Грина во всем пространстве	92
7. Слабые решения задач Коши	94
8. Свойства объемного и поверхностных потенциалов	99

9. Задача Коши (7.1), (7.2): существование локальных и отсутствие локальных и глобальных во времени слабых решений	112
10. Задача Коши (7.3), (7.4): существование локальных и отсутствие локальных и глобальных во времени слабых решений	119
11. Задача Коши (7.5), (7.6): существование локальных и отсутствие локальных и глобальных во времени слабых решений	125
12. Приложение	128
Список литературы	130

1. ВВЕДЕНИЕ

В [11] были получены линейные уравнения волн намагниченности в ферритах типа «легкая ось» и «легкая плоскость» (см. [11, уравнения (4.12), (4.18)]), которые можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \psi + \omega_1^2 \psi_{x_1 x_1} + \omega_2^2 \psi_{x_2 x_2} + \omega_3^2 \psi_{x_3 x_3} = f, \quad \psi = \psi(x, t), \quad f = f(x, t) \quad (1.1)$$

при $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]$, где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — некоторые частоты (вообще говоря, попарно различные), а функция $\psi(x, t)$ — магнитный потенциал. Функция $f(x, t)$ в правой части задана явно. В данной работе мы рассмотрим следующие три нелинейных уравнения с модельными нелинейностями:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \psi + \omega_1^2 \psi_{x_1 x_1} + \omega_2^2 \psi_{x_2 x_2} + \omega_3^2 \psi_{x_3 x_3} + |\nabla \psi|^q = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \psi + \omega_1^2 \psi_{x_1 x_1} + \omega_2^2 \psi_{x_2 x_2} + \omega_3^2 \psi_{x_3 x_3} - \frac{\partial |\nabla \psi|^q}{\partial t} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \psi + \omega_1^2 \psi_{x_1 x_1} + \omega_2^2 \psi_{x_2 x_2} + \omega_3^2 \psi_{x_3 x_3} + \frac{\partial^2 |\nabla \psi|^q}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4)$$

при $q > 1$, $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]$ и $\psi = \psi(x, t)$. Данная работа продолжает исследования, начатые в [8–10, 17] и посвященные нахождению критических показателей для уравнений соболевского типа.

Уравнения (1.2)–(1.4) относятся к классу нелинейных уравнений типа С. Л. Соболева. Отметим, что исследованию линейных и нелинейных уравнений соболевского типа посвящено много работ. Так, в работах Г. А. Свиридюка, С. А. Загребинной, А. А. Замышляевой (см. [6, 15, 18]) были рассмотрены в общем виде и в виде примеров начально–краевые задачи для большого многообразия классов линейных и нелинейных уравнений соболевского типа.

Отметим, что впервые теория потенциала для неклассических уравнений типа С. Л. Соболева была рассмотрена в работе Б. В. Капитонова [7]. В дальнейшем теория потенциала изучалась в работах С. А. Габова и А. Г. Свешникова (см. [2, 3]), а также в работах их учеников (см. работу Ю. Д. Плетнера [13]).

В классической работе [14] С. И. Похожаева и Э. Митидиери достаточно простым методом нелинейной емкости были получены глубокие результаты о роли так называемых критических показателей. Отметим также работы [4, 16] Е. И. Галахова и О. А. Салиевой.

В настоящей работе мы получили результат о существовании такого критического показателя $q = 3/2$, что поведение слабых решений задач Коши для уравнения (1.2) при $1 < q \leq 3/2$ и $q > 3/2$ существенно различно. При $1 < q \leq 3/2$ локальные во времени слабые решения отсутствуют в широком классе начальных функций, а при $q > 3/2$ уже существуют. Для решений задачи Коши для уравнений (1.3) и (1.4) мы докажем отсутствие глобальных и локальных во времени решений в некоторых классах начальных функций при $1 < q \leq 3/2$.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

В дальнейшем мы будем систематически использовать абстрактные банаховы пространства вида $\mathbb{C}^{(n)}([0, T]; \mathbb{B})$, где $\mathbb{B}$ — банахово пространство относительно нормы $|\cdot|_{\mathbb{B}}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Определяется это пространство индуктивно. Сначала определим банахово пространство $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B})$ как линейное пространство таких функций $f(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{B}$, что

$$|f(t_2) - f(t_1)|_{\mathbb{B}} \rightarrow +0 \quad \text{для любых } t_1, t_2 \in [0, T], |t_2 - t_1| \rightarrow +0.$$

Линейное пространство $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B})$ является банаховым относительно нормы

$$\|f(t)\|_T := \sup_{t \in [0, T]} |f(t)|_{\mathbb{B}}.$$

Функция $f(t)$ лежит в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{B})$, если $f(t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B})$ и существует сильная производная $df(t)/dt \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B})$, определяемая следующим образом:

$$\lim_{|\Delta t| \rightarrow +0} \left| \frac{1}{\Delta t} [f(t + \Delta t) - f(t)] - \frac{df}{dt}(t) \right|_{\mathbb{B}} = 0.$$

Далее индуктивно определяем банахово пространство $\mathbb{C}^{(n)}([0, T]; \mathbb{B})$ для произвольного $n \in \mathbb{N}$.

В качестве банахова пространства $\mathbb{B}$ будут выступать следующие банаховы пространства: пространство $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ относительно нормы

$$|f(x)|_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |f(x)|, \quad (2.1)$$

пространство $\mathbb{C}_b(\rho(x); \mathbb{R}^3)$ при $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$, которое является банаховым относительно нормы (более подробно см. доказательство леммы 2.1)

$$|f(x)|_{0, \rho} := \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \rho(x) |f(x)|, \quad (2.2)$$

а также пространство $\mathbb{C}_b^{\gamma_1, \gamma_2}(\rho(x); \mathbb{R}^3)$, где $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, которое определяется как линейное подпространство банахова пространства $\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3) \ni f(x)$, в котором конечна норма

$$|f(x)|_{\gamma_1, \gamma_2} := \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \rho^{\gamma_2}(x) |f(x)| + \sum_{j=1}^3 \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \rho^{\gamma_1}(x) \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right|. \quad (2.3)$$

Лемма 2.1. *Линейное пространство $\mathbb{C}_b^{\gamma_1, \gamma_2}(\rho(x); \mathbb{R}^3)$ является банаховым относительно нормы (2.3).*

Доказательство. Пусть $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{C}_b^{\gamma_1, \gamma_2}(\rho(x); \mathbb{R}^3)$ — фундаментальная последовательность, т.е.

$$|f_n - f_m|_{\gamma_1, \gamma_2} \rightarrow +0 \quad \text{при } n, m \rightarrow +\infty. \quad (2.4)$$

Тогда, в частности, справедливы следующие соотношения:

$$\left| |f_n|_{\gamma_1, \gamma_2} - |f_m|_{\gamma_1, \gamma_2} \right| \leq |f_n - f_m|_{\gamma_1, \gamma_2} \rightarrow +0 \quad \text{при } n, m \rightarrow +\infty. \quad (2.5)$$

Таким образом, числовая последовательность $\{|f_n|_{\gamma_1, \gamma_2}\}$ является фундаментальной, а следовательно, сходится, и поэтому эта последовательность ограничена:

$$|f_n|_{\gamma_1, \gamma_2} \leq K < +\infty, \quad (2.6)$$

где $K > 0$ — постоянная, не зависящая от $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что имеет место неравенство

$$|f|'_1 := \min\{\rho_0^{\gamma_1}, \rho_0^{\gamma_2}\} \left[|f|_0 + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right|_0 \right] \leq |\rho^{\gamma_2}(x) f(x)|_0 + \sum_{j=1}^3 \left| \rho^{\gamma_1}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right|_0 =: |f|_{\gamma_1, \gamma_2}, \quad (2.7)$$

где $|g|_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |g(x)|$. Из (2.4) и (2.7) вытекает, что последовательность $\{f_n\}$ является фундаментальной последовательностью в банаховом пространстве $\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3)$ относительно нормы $|\cdot|'_1$,

определенной равенством из (2.7). Следовательно, существует такая функция $f_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3)$, что

$$|f_n - f_0|_1' \rightarrow +0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (2.8)$$

Из (2.4) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geq N$ будет выполнено неравенство

$$\rho^{\gamma_2}(x)|f_n(x) - f_m(x)| + \rho^{\gamma_1}(x) \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_j} \right| \leq |f_n - f_m|_{\gamma_1, \gamma_2} \leq \varepsilon. \quad (2.9)$$

Перейдя в этом поточечном неравенстве к пределу при $m \rightarrow +\infty$, получим следующее неравенство:

$$\rho^{\gamma_2}(x)|f_n(x) - f_0(x)| + \rho^{\gamma_1}(x) \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_0(x)}{\partial x_j} \right| \leq \varepsilon. \quad (2.10)$$

В силу (2.6) и (2.10) приходим к следующим неравенствам:

$$|f_n - f_0|_{\gamma_1, \gamma_2} \leq \varepsilon, \quad (2.11)$$

$$|f_0|_{\gamma_1, \gamma_2} \leq |f_n - f_0|_{\gamma_1, \gamma_2} + |f_n|_{\gamma_1, \gamma_2} \leq \varepsilon + K < +\infty. \quad (2.12)$$

Таким образом, из (2.11) и (2.12) вытекает, что фундаментальная последовательность $\{f_n\}$ сходится сильно к некоторой функции $f_0(x) \in \mathbb{C}_b^{\gamma_1, \gamma_2}(\rho(x); \mathbb{R}^3)$ по норме (2.3). $\square$

Важными для нас будут также следующие банаховы пространства. Во-первых, пространство

$$\mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3) = \mathbb{C}_b^{\gamma_1, \gamma_2}(\rho(x); \mathbb{R}^3) \quad (2.13)$$

при $\rho(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$ и $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = 0$, норму которого будем обозначать символом $|\cdot|_1$:

$$|f(x)|_1 := |f(x)|_0 + \sum_{j=1}^3 \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right|_0. \quad (2.14)$$

Во-вторых, будем также использовать банахово пространство

$$\mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3) = \mathbb{C}_b^{\gamma_1, \gamma_2}(\rho(x); \mathbb{R}^3) \quad (2.15)$$

при $\rho(x) = 1 + |x|^2$, $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = 1/2$. Далее, будет встречаться банахово пространство $\mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3)$ при $\beta > 0$, которое является линейным подпространством банахова пространства $\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3) \ni f(x)$, в котором конечна норма

$$|f|_2 := \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|^2)^{1/2} |f(x)| + \sum_{j=1}^3 \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|^2) \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right| + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|^2)^\beta \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right|. \quad (2.16)$$

Символом $\mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$ обозначаем банахово пространство функций из $\mathbb{C}^{(2)}[0, T] \ni f(t)$, для которых $f(T) = f'(T) = f''(T) = 0$, относительно стандартной нормы

$$\|f(t)\| := |f(t)|_0 + |f'(t)|_0 + |f''(t)|_0, \quad (2.17)$$

где норма $|\cdot|_0$ определяется формулой (2.1). Будем использовать следующие обозначения для норм специальных банаховых пространств:

$$\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)) : \quad \|f\|_{0,T} := \sup_{t \in [0, T]} |f(x, t)|_1, \quad (2.18)$$

$$\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)) : \quad \|f\|_{1,T} := \sup_{t \in [0, T]} \left[|f(x, t)|_1 + \left| \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right|_1 \right], \quad (2.19)$$

$$\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)) : \quad \|f\|_{2,T} := \sup_{t \in [0, T]} \left[|f(x, t)|_1 + \left| \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right|_1 + \left| \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \right|_1 \right], \quad (2.20)$$

где норма $|\cdot|_1$ определена равенством (2.14). Символом $\mathbb{C}_{x,t}^{(0,n)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, обозначаем пространство таких функций $f(x, t)$, что

$$f(x, t), \quad \frac{\partial^j f(x, t)}{\partial t^j} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]) \quad \text{при } j = \overline{0, n}. \quad (2.21)$$

Символами $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{D}(-\infty, +\infty)$, $\mathcal{D}(-\infty, T)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, +\infty))$ обозначаем векторные топологические пространства основных функций с компактными носителями из соответствующих множеств, а через $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{D}'(-\infty, +\infty)$, $\mathcal{D}'(-\infty, T)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, +\infty))$ — соответствующие пространства обобщенных функций.

Символ $W_{q,\text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$ обозначает пространство измеримых функций $f(x, t)$, для которых определены слабые частные производные, причем для любого компакта $K \in \mathbb{R}^3$ имеем

$$f(x, t), \quad \frac{\partial f(x, t)}{\partial x_j} \in L^q(K \otimes [0, T]). \quad (2.22)$$

Символ $W_{q,\text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, +\infty))$ обозначает пространство измеримых функций $f(x, t)$, для которых определены слабые частные производные, причем для любого компакта $K \in \mathbb{R}^3$ и для любого $T > 0$ имеем

$$f(x, t), \quad \frac{\partial f(x, t)}{\partial x_j} \in L^q(K \otimes [0, T]). \quad (2.23)$$

Символ $W_{q,\text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3)$ обозначает пространство таких измеримых функций $f(x)$, что существуют все слабые производные и для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^3$ имеем

$$f(x), \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \in L^q(K). \quad (2.24)$$

Символами $W_q^1(D)$ и $H^2(O(x_0, R_0))$ будем обозначать классические пространства С. Л. Соболева, где $O(x_0, R_0)$ — открытый шар радиуса $R_0 > 0$ в $\mathbb{R}^3$ с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

Наконец, для функции $f(t) \in \mathbb{C}^{(n)}(-\infty, 0] \cup \mathbb{C}^{(n)}[0, +\infty)$, где $n \in \mathbb{N}$ и производные в точке $t = 0$ понимаются в смысле односторонних пределов, будем использовать следующее обозначение:

$$\left\{ \frac{\partial^j f(t)}{\partial t^j} \right\} = \begin{cases} f^{(j)}(t), & \text{если } \{t > 0\} \cup \{t < 0\}, \\ \text{произвольно,} & \text{если } t = 0, \end{cases} \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.25)$$

Пусть $f(t)$ — некоторая функция, определенная при $t \in [0, T]$; тогда символом $\tilde{f}(t)$ будем обозначать продолжение нулем при $t < 0$:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } t \in [0, T], \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

3. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Построим фундаментальное решение оператора

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x, t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u(x, t) + \omega_1^2 u_{x_1 x_1}(x, t) + \omega_2^2 u_{x_2 x_2}(x, t) + \omega_3^2 u_{x_3 x_3}(x, t), \quad (3.1)$$

где, вообще говоря, $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, $\omega_3 > 0$ попарно различны. Рассмотрим следующее уравнение в смысле пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\mathcal{E}](x, t) = \delta(x)\delta(t). \quad (3.2)$$

Применяя преобразование Лапласа, получим следующее уравнение:

$$(p^2 + \omega_1^2) \overline{\mathcal{E}}_{x_1 x_1}(x, p) + (p^2 + \omega_2^2) \overline{\mathcal{E}}_{x_2 x_2}(x, p) + (p^2 + \omega_3^2) \overline{\mathcal{E}}_{x_3 x_3}(x, p) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3). \quad (3.3)$$

Одним из решений этого уравнения является функция

$$\overline{\mathcal{E}}(x, p) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_3^2)x_1^2 + (p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2)x_2^2 + (p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)x_3^2}}. \quad (3.4)$$

Последнее выражение можно преобразовать к виду

$$\overline{\mathcal{E}}(x, p) = -\frac{1}{4\pi|x|} \frac{1}{p^2} \left[1 + \frac{\alpha_1(x)}{p^2} + \frac{\alpha_2(x)}{p^4} \right]^{-1/2}, \quad (3.5)$$

где

$$\alpha_1(x) := \frac{(\omega_2^2 + \omega_3^2)x_1^2 + (\omega_1^2 + \omega_3^2)x_2^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (3.6)$$

$$\alpha_2(x) := \frac{\omega_2^2\omega_3^2x_1^2 + \omega_1^2\omega_3^2x_2^2 + \omega_1^2\omega_2^2x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (3.7)$$

Предположим, что $\operatorname{Re} p = \sigma > R$ при достаточно большом $R > 0$. Тогда $|p| > R$, и поэтому справедливо следующее разложение в ряд:

$$\frac{1}{p^2} \left[1 + \frac{\alpha_1(x)}{p^2} + \frac{\alpha_2(x)}{p^4} \right]^{-1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{k} \frac{1}{p^{2k+2}} \left(\alpha_1(x) + \frac{\alpha_2(x)}{p^2} \right)^k = \frac{1}{p^2} + \overline{\Phi}(x, p), \quad (3.8)$$

$$\overline{\Phi}(x, p) = \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{-1/2}{k} \frac{1}{p^{2k+2}} \left(\alpha_1(x) + \frac{\alpha_2(x)}{p^2} \right)^k. \quad (3.9)$$

Поскольку $|p| \geq R > 0$, то применяя обратное преобразование Лапласа к функции $\overline{\Phi}(x, p)$, получим выражение

$$\Phi(x, t) = \theta(t) \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{-1/2}{k} \frac{1}{(2k+1)!} (\alpha_1(x) \operatorname{id} + \alpha_2(x) t*)^k t^{2k+1}, \quad (3.10)$$

где

$$(\alpha_1(x) \operatorname{id} + \alpha_2(x) t*) \phi(t) := \alpha_1(x) \phi(t) + \alpha_2(x) \int_0^t (t - \tau) \phi(\tau) d\tau.$$

Таким образом, для фундаментального решения справедливо равенство

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \overline{\mathcal{E}}(x, p) e^{pt} dp, \quad \sigma > R > 0 \quad (3.11)$$

и с учетом равенства (3.10) имеем

$$\mathcal{E}(x, t) = -\frac{t\theta(t)}{4\pi|x|} - \frac{1}{4\pi|x|} \Phi(x, t), \quad (3.12)$$

где функция $\Phi(x, t)$ определена равенством (3.10). Фундаментальное решение обладает свойствами, которые мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Фундаментальное решение $\mathcal{E}(x, t)$ обладает следующими свойствами:*

1. $\mathcal{E}(x, t) \in \mathbb{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \otimes [0, +\infty))$.
2. При $x \neq (0, 0, 0)$ и $t \in [0, T]$ справедливы следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^k \mathcal{E}}{\partial t^k}(x, t) \right| \leq \frac{K_1(T)}{|x|}, \quad \left| \frac{\partial^{k+1} \mathcal{E}}{\partial t^k \partial x_j}(x, t) \right| \leq \frac{K_2(T)}{|x|^2}, \quad (3.13)$$

$$\left| \frac{\partial^{k+2} \mathcal{E}}{\partial t^k \partial x_j \partial x_i}(x, t) \right| \leq \frac{K_3(T)}{|x|^3}, \quad (3.14)$$

где все смешанные производные перестановочны и $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i, j = 1, 2, 3$.

3. При $x \neq (0, 0, 0)$ и $t \geq 0$ справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial^l \mathcal{E}}{\partial x_j^l}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^l \mathcal{E}}{\partial x_j^l} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x, 0) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^l}{\partial x_j^l} \frac{1}{|x|}, \quad l = 0, 1. \quad (3.15)$$

4. При $x \neq (0, 0, 0)$ и $t \geq 0$ справедливо равенство

$$\frac{\partial^{2+k} \mathcal{E}}{\partial t^2 \partial x_j^k}(x, 0) = 0, \quad k = 0, 1, \quad (3.16)$$

где все смешанные производные перестановочны.

Доказательство. Свойство 1 немедленно следует из явного вида (3.12), из которого видна бесконечная дифференцируемость при $x \neq (0, 0, 0)$ и $t \in [0, T]$.

Для доказательства свойства 2 прежде всего заметим, что фундаментальное решение при $x \neq (0, 0, 0)$ и $t \in [0, T]$ бесконечно дифференцируемо по $t \in [0, T]$ и все производные имеют особенность по $x \in \mathbb{R}^3$ вида

$$\frac{\Psi(x, t)}{|x|}, \quad |\Psi(x, t)| \leq K_1(T) < +\infty, \quad t \in [0, T].$$

Теперь заметим, что

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_j}(x, t) = \frac{t}{4\pi} \frac{x_j}{|x|^3} + \frac{\Phi(x, t)}{4\pi} \frac{x_j}{|x|^3} - \frac{1}{4\pi|x|} \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x_j}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{-1/2}{k} \frac{k}{(2k+1)!} (\alpha_1(x) \text{id} + \alpha_2(x) t*)^{k-1} \left(\frac{\partial \alpha_1(x)}{\partial x_j} \text{id} + \frac{\partial \alpha_2(x)}{\partial x_j} t* \right) t^{2k+1}, \quad (3.18)$$

$$0 \leq \alpha_1(x) \leq \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2, \quad 0 \leq \alpha_2(x) \leq \omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_3^2 \omega_1^2, \quad (3.19)$$

$$\left| \frac{\partial \alpha_1(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{c_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{|x|}, \quad \left| \frac{\partial \alpha_2(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{c_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{|x|}. \quad (3.20)$$

Таким образом, из (3.17)–(3.20) вытекает оценка

$$\left| \frac{\partial \mathcal{E}(x, t)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{K_2(T)}{|x|^2}. \quad (3.21)$$

Аналогичным образом можно доказать оценку

$$\left| \frac{\partial^{k+1} \mathcal{E}(x, t)}{\partial t^k \partial x_j} \right| \leq \frac{K_2(T)}{|x|^2}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.22)$$

В силу свойства 1 все смешанные производные в левой части неравенства (3.22) перестановочны. Для доказательства неравенства (3.14) нужно установить оценки

$$\left| \frac{\partial^2 \alpha_1(x)}{\partial x_j \partial x_i} \right| \leq \frac{c_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{|x|^2}, \quad \left| \frac{\partial^2 \alpha_2(x)}{\partial x_j \partial x_i} \right| \leq \frac{c_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{|x|^2}. \quad (3.23)$$

Докажем свойство 3. Заметим, что, с одной стороны, при $x \neq (0, 0, 0)$ первое слагаемое

$$J(x, t) := -\frac{t\theta(t)}{4\pi|x|}$$

в выражении (3.12) для фундаментального решения $\mathcal{E}(x, t)$ обладает при $t \geq 0$ следующими свойствами:

$$\frac{\partial^l}{\partial x_j^l} J(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^l}{\partial x_j^l} \frac{\partial J}{\partial t}(x, 0) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x|}, \quad l = 0, 1. \quad (3.24)$$

С другой стороны, в силу явного выражения (3.10) для функции $\Phi(x, t)$ при $x \neq (0, 0, 0)$ справедливо равенства

$$\frac{\partial^l}{\partial x_j^l} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \Phi(x, 0) = 0, \quad l, m = 0, 1. \quad (3.25)$$

Поэтому из (3.24) и (3.25) вытекают равенства (3.15).

Свойство 4 является непосредственным следствием выражения (3.12) для фундаментального решения. $\square$

В [10] были доказаны следующие оценки интегралов:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{1}{|x - y|} dy = B_1(\beta) < +\infty, \quad \beta > \frac{3}{2}, \quad (3.26)$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1 + |x|^2}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{1}{|x - y|^2} dy = B_2(\beta) < +\infty, \quad \beta > \frac{3}{2}. \quad (3.27)$$

Введем следующее обозначение:

$$G_\beta(x, y, t) := \frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^\beta} \mathcal{E}(x - y, t), \quad (3.28)$$

где $\mathcal{E}(x, t)$ — фундаментальное решение, определенное формулой (3.11).

Теорема 3.2. *Справедливы следующие оценки:*

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial^k G_\beta(x, y, t)}{\partial t^k} \right| dy = B_3(\beta, T) < +\infty, \quad (3.29)$$

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]} (1 + |x|^2)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial^{k+1} G_\beta(x, y, t)}{\partial t^k \partial x_j} \right| dy = B_4(\beta, T) < +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.30)$$

при $\beta > 3/2$ и $k = 0, 1, 2, 3$.

Доказательство теоремы 3.2 основано на применении оценок (3.13), (3.26) и (3.27).

4. ВТОРАЯ ФОРМУЛА ГРИНА

Пусть $u(x, t), v(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}(\bar{\Omega}))$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} v \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u &= \frac{\partial}{\partial t} \left(v \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta u \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \nabla u \right) - \operatorname{div} \left(u \nabla \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) + u \Delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(v \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta u \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \operatorname{div} \left(v \nabla \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \operatorname{div} \left(u \nabla \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \nabla u \right) - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \left(v \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right) + u \Delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + u \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \quad \text{при } j = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

Отметим, что в данном случае формально сопряженный оператор имеет следующий вид:

$$\mathfrak{M}_{x,t}^t[u](x, t) = \mathfrak{M}_{x,t}[u](x, t). \quad (4.3)$$

Из равенств (4.1) и (4.2) вытекает вторая формула Грина:

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{\Omega} [v(\xi, \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) - u(\xi, \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}^t[v](\xi, \tau)] d\xi d\tau = \\ &= \int_0^t \int_{\partial\Omega} [v(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) - u(\xi, \tau) \mathfrak{N}^t[v](\xi, \tau)] dS_\xi d\tau + \\ &+ \int_{\Omega} \left[v(\xi, t) \Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) - v(\xi, 0) \Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) \right] d\xi - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) \Delta u(\xi, t) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) \Delta u(\xi, 0) \right] d\xi + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, t) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi - \int_{\partial\Omega} \left[v(\xi, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, t) - v(\xi, 0) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi, \quad (4.4)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) &= \mathfrak{N}_{\xi, \tau}^t[u](\xi, \tau) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial u}{\partial n_\xi} + \omega_1^2 \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cos(n_\xi, e_1) + \omega_2^2 \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \cos(n_\xi, e_2) + \omega_3^2 \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \cos(n_\xi, e_3). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 4.1. Для любых функций $u(x, t), v(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}(\bar{\Omega}))$ при $t \in [0, T]$ справедливо равенство (4.4).

5. ТРЕТЬЯ ФОРМУЛА ГРИНА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Прежде всего докажем следующее утверждение.

Лемма 5.1. Пусть

$$\begin{aligned} f(x, t) := \int_{\partial O(x, 1)} & \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_\xi}(x - \xi, t) + \omega_1^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi_1}(x - \xi, t) \cos(n_\xi, e_1) + \right. \\ & \left. + \omega_2^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi_1}(x - \xi, t) \cos(n_\xi, e_2) + \omega_3^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi_3}(x - \xi, t) \cos(n_\xi, e_3) \right] dS_\xi, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\mathcal{E}(x, t)$ — фундаментальное решение оператора $\mathfrak{M}_{x, t}$, определенное равенством (3.12). Тогда $f(x, t) = 0$ для всех $t \geq 0$.

Доказательство. Для определенности будем считать, что n_ξ — внутренняя нормаль в точке $\xi \in \partial O(x, 1)$. Отметим, что в силу результатов п. 3 теоремы 3.1 справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{E}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}(x, 0)}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi|x|}, \quad t \geq 0. \quad (5.2)$$

Если при этом $\xi \in \partial O(x, 1)$, то $\xi \neq x$ и потому

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_\xi}(x - \xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_\xi}(x - \xi, 0) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x - \xi|}, \quad t \geq 0. \quad (5.3)$$

Применяя преобразование Лапласа по t к функции $f(x, t)$ и принимая во внимание (5.3), получим равенство

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial O(x, 1)} & \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x - \xi|} dS_\xi + \int_{\partial O(x, 1)} \left[p^2 \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial n_\xi}(x - \xi, p) + \omega_1^2 \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \xi_1}(x - \xi, p) \cos(n_\xi, e_1) + \right. \\ & \left. + \omega_2^2 \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \xi_1}(x - \xi, p) \cos(n_\xi, e_2) + \omega_3^2 \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \xi_3}(x - \xi, p) \cos(n_\xi, e_3) \right] dS_\xi. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Отметим, что в силу равенства (3.4) справедливы следующие формулы:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \xi_1}(z, p) = -\frac{1}{4\pi} \frac{(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_3^2)z_1}{\beta(z, p)}, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \xi_2}(z, p) = -\frac{1}{4\pi} \frac{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2)z_2}{\beta(z, p)}, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \xi_3}(z, p) = -\frac{1}{4\pi} \frac{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)z_3}{\beta(z, p)}, \quad (5.7)$$

где $z_j = x_j - \xi_j$, $j = 1, 2, 3$, и

$$\beta(z, p) := \left((p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_3^2)z_1^2 + (p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2)z_2^2 + (p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)z_3^2 \right)^{3/2}. \quad (5.8)$$

Но тогда справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^3 (p^2 + \omega_j^2) \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}(z, p)}{\partial \xi_j} = -\frac{1}{4\pi} (p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_3^2) \frac{|x - \xi|}{\beta(z, p)}, \quad (5.9)$$

где мы воспользовались тем, что

$$\sum_{j=1}^3 (x_j - \xi_j) \cos(n_\xi, e_j) = |x - \xi|. \quad (5.10)$$

Заметим, что $|z| = |x - \xi| = 1$ при $\xi \in \partial O(x, 1)$. Вычислим следующий интеграл:

$$I(x, p) := - \int_{\partial O(x, 1)} \frac{1}{\beta(z, p)} dS_\xi. \quad (5.11)$$

Перейдем к сферической системе координат с центром в точке x . Тогда интеграл $I(x, p)$ примет вид

$$I(x, p) := - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{(\delta_1^2 \sin^2 \theta + \delta_2^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} d\theta d\phi, \quad (5.12)$$

где

$$\delta_1^2 = (p^2 + \omega_3^2) ((p^2 + \omega_2^2) \cos^2 \phi + (p^2 + \omega_1^2) \sin^2 \phi), \quad \delta_2^2 = (p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2). \quad (5.13)$$

Вычислим сначала внутренний интеграл в (5.12). Справедлива следующая цепочка равенств:

$$I_1(p, \phi) := \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{(\delta_1^2 \sin^2 \theta + \delta_2^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} d\theta = \int_{-1}^1 \frac{dt}{(\delta_1^2 + (\delta_2^2 - \delta_1^2)t^2)^{3/2}} = \frac{2}{\delta_1^2 \delta_2}, \quad (5.14)$$

где использованы подстановка $t = -\cos \theta$ и формула 380.003 из [5]. Итак,

$$\begin{aligned} I(x, p) &= - \frac{2}{(p^2 + \omega_3^2) \sqrt{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(p^2 + \omega_2^2) \cos^2 \phi + (p^2 + \omega_1^2) \sin^2 \phi} d\phi = \\ &= - \frac{2}{(p^2 + \omega_3^2) \sqrt{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)}} \frac{2\pi}{\sqrt{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)}} = - \frac{4\pi}{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_3^2)}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Из (5.4) получаем равенство

$$\bar{f}(x, p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial O(x, 1)} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x - \xi|} dS_\xi - 1. \quad (5.16)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{\partial O(x, 1)} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x - \xi|} dS_\xi &= \\ &= \int_{\partial O(x, 1)} \frac{(x_1 - \xi_1) \cos(n_\xi, e_1) + (x_2 - \xi_2) \cos(n_\xi, e_2) + (x_3 - \xi_3) \cos(n_\xi, e_3)}{|x - \xi|^3} dS_\xi = \\ &= \int_{\partial O(x, 1)} \frac{|x - \xi|}{|x - \xi|^3} dS_\xi = \int_{\partial O(x, 1)} dS_\xi = 4\pi. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Из равенств (5.16) и (5.17) вытекает равенство $\bar{f}(x, p) = 0$. Следовательно, $f(x, t) = 0$ для всех $t \geq 0$. Лемма доказана. $\square$

Непосредственным следствием этой леммы является следующее утверждение.

Лемма 5.2. Для любого $\varepsilon > 0$, для любого $x \in \mathbb{R}^3$ и любого $t > 0$ справедливо следующее равенство:

$$\int_{\partial O(x, \varepsilon)} \mathfrak{M}_{\xi, \tau}^t[\mathcal{E}(x - \xi, t - \tau)](\xi, \tau) dS_\xi = 0, \quad \tau \in [0, t]. \quad (5.18)$$

Доказательство. Докажем утверждение для случая $\varepsilon \in (0, 1)$. Отметим, что фундаментальное решение $\mathcal{E}(x - \xi, t - \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{M}_{\xi, \tau}^t[\mathcal{E}(x - \xi, t - \tau)](\xi, \tau) = 0, \quad \xi \neq x, \quad \tau \in [0, t]. \quad (5.19)$$

Интегрируя равенство (5.19) по шаровому слою $O(x, 1) \setminus O(x, \varepsilon)$, получим равенство

$$\int_{\partial O(x, \varepsilon)} \mathfrak{M}_{\xi, \tau}^t[\mathcal{E}(x - \xi, t - \tau)](\xi, \tau) dS_\xi = \int_{\partial O(x, 1)} \mathfrak{M}_{\xi, \tau}^t[\mathcal{E}(x - \xi, t - \tau)](\xi, \tau) dS_\xi = 0, \quad (5.20)$$

где последнее равенство справедливо в силу леммы 5.1. $\square$

Пусть $x \in \Omega$ и $t \in (0, T]$. Теперь применим вторую формулу Грина (4.4) к функциям $u(\xi, \tau) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}(\bar{\Omega}))$ и $v(\xi, \tau) = \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau)$. Поскольку $x \in \Omega$, то найдется такое $\varepsilon \in (0, 1)$, что $O(x, \varepsilon) \subset \Omega$. Поэтому $v(\xi, \tau) = \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}(\bar{\Omega} \setminus O(x, \varepsilon)))$. Поэтому вторая формула Грина (4.4), примененная к указанным функциям в области $\Omega \setminus O(x, \varepsilon)$, примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega \setminus \overline{O(x, \varepsilon)}} [v(\xi, \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) - u(\xi, \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}^t[v](\xi, \tau)] d\xi d\tau = \\ & = \int_0^t \int_{\partial \Omega \cup \partial O(x, \varepsilon)} [v(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) - u(\xi, \tau) \mathfrak{N}^t[v](\xi, \tau)] dS_\xi d\tau + \\ & \quad + \int_{\Omega \setminus \overline{O(x, \varepsilon)}} \left[v(\xi, t) \Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) - v(\xi, 0) \Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) \right] d\xi - \\ & \quad - \int_{\Omega \setminus \overline{O(x, \varepsilon)}} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) \Delta u(\xi, t) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) \Delta u(\xi, 0) \right] d\xi + \\ & \quad + \int_{\partial \Omega \cup \partial O(x, \varepsilon)} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, t) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi - \\ & \quad - \int_{\partial \Omega \cup \partial O(x, \varepsilon)} \left[v(\xi, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, t) - v(\xi, 0) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi. \quad (5.21) \end{aligned}$$

Рассмотрим последовательно все объемные и поверхностные интегралы по $O(x, \varepsilon)$ и по $\partial O(x, \varepsilon)$. Справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{O(x, \varepsilon)} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau \right| & \leq \sup_{(\xi, \tau) \in \overline{O(x, \varepsilon)} \otimes [0, T]} |\mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau)| T \int_{O(x, \varepsilon)} \frac{K_1(T)}{|x - \xi|} d\xi \leq \\ & \leq M_1(T) T \frac{4\pi}{3} \varepsilon^3 \frac{K_1(T)}{\varepsilon} \rightarrow +0 \quad (5.22) \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. Поэтому

$$\int_0^t \int_{\Omega \setminus \overline{O(x, \varepsilon)}} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau \rightarrow \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (5.23)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. В силу (5.19) имеет место равенство

$$\int_0^t \int_{\Omega \setminus \overline{O(x, \varepsilon)}} u(\xi, \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}^t[v](\xi, \tau) d\xi d\tau = 0. \quad (5.24)$$

Справедлива оценка

$$\left| \int_0^t \int_{\partial O(x, \varepsilon)} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\tau dS_{\xi} \right| \leq \sup_{(\xi, \tau) \in \partial O(x, \varepsilon) \otimes [0, T]} |\mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau)| \frac{K_1(T)}{\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 \rightarrow +0 \quad (5.25)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. Поэтому

$$\int_0^t \int_{\partial \Omega \cup \partial O(x, \varepsilon)} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\tau dS_{\xi} \rightarrow \int_0^t \int_{\partial \Omega} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\tau dS_{\xi} \quad (5.26)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. Имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\partial O(x, \varepsilon)} u(\xi, \tau) \mathfrak{N}^t[\mathcal{E}(x - \xi, t - \tau)](\xi, \tau) dS_{\xi} d\tau \right| &\leq \\ &\leq \int_0^t \int_{\partial O(x, \varepsilon)} |u(\xi, \tau) - u(x, \tau)| |\mathfrak{N}^t[\mathcal{E}(x - \xi, t - \tau)](\xi, \tau)| dS_{\xi} d\tau + \\ &+ \left| \int_0^t u(x, \tau) \int_{\partial O(x, \varepsilon)} \mathfrak{N}^t[\mathcal{E}(x - \xi, t - \tau)](\xi, \tau) dS_{\xi} d\tau \right| := J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (5.27)$$

В силу леммы 5.2 имеет место равенство $J_2 = 0$. Для J_1 справедлива следующая оценка:

$$J_1 \leq \sup_{(\xi, \tau) \in \partial O(x, \varepsilon) \otimes [0, T]} |u'_{\xi}(\xi, \tau)| \varepsilon T \frac{K_2(T)}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 \rightarrow +0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (5.28)$$

Итак, справедливо предельное свойство

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\partial \Omega \cup \partial O(x, \varepsilon)} u(\xi, \tau) \mathfrak{N}^t[\mathcal{E}(x - \xi, t - \tau)](\xi, \tau) dS_{\xi} d\tau &\rightarrow \\ &\rightarrow \int_0^t \int_{\partial \Omega} u(\xi, \tau) \mathfrak{N}^t[\mathcal{E}(x - \xi, t - \tau)](\xi, \tau) dS_{\xi} d\tau \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

В силу равенств (3.15) теоремы 3.1 имеет место равенство

$$\int_{O(x, \varepsilon)} \left[\mathcal{E}(x - \xi, 0) \Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) - \mathcal{E}(x - \xi, t) \Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) \right] d\xi = - \int_{O(x, \varepsilon)} \mathcal{E}(x - \xi, t) \Delta u_1(\xi) d\xi, \quad (5.30)$$

где $u_1(\xi) := \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0)$, причем

$$\left| \int_{O(x, \varepsilon)} \mathcal{E}(x - \xi, t) \Delta u_1(\xi) d\xi \right| \leq \sup_{\xi \in O(x, \varepsilon)} |\Delta u_1(\xi)| \frac{4\pi}{3} \varepsilon^3 \frac{K_1(T)}{\varepsilon} \rightarrow +0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (5.31)$$

Поэтому

$$\int_{\Omega \setminus \overline{O(x, \varepsilon)}} \left[\mathcal{E}(x - \xi, 0) \Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) - \mathcal{E}(x - \xi, t) \Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) \right] d\xi \rightarrow - \int_{\Omega} \mathcal{E}(x - \xi, t) \Delta u_1(\xi) d\xi \quad (5.32)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. Справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega \setminus \overline{O(x, \varepsilon)}} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) \Delta u(\xi, t) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) \Delta u(\xi, 0) \right] d\xi = \\ = \int_{\Omega \setminus \overline{O(x, \varepsilon)}} \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x - \xi, 0) \Delta u(\xi, t) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x - \xi, t) \Delta u_0(\xi) \right] d\xi \rightarrow \\ \rightarrow \int_{\Omega} \left[-\frac{1}{4\pi|x - \xi|} \Delta u(\xi, t) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x - \xi, t) \Delta u_0(\xi) \right] d\xi \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0; \end{aligned} \quad (5.33)$$

здесь мы воспользовались теоремой 3.1. Заметим, что в рассматриваемом классе функций $u(x, t)$ справедливо следующее равенство:

$$u(x, t) = - \int_{\Omega} \frac{\Delta u(\xi, t)}{4\pi|x - \xi|} d\xi + \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{4\pi|x - \xi|} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial n_{\xi}} - u(\xi, t) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \frac{1}{4\pi|x - \xi|} \right] dS_{\xi}. \quad (5.34)$$

В силу теоремы 3.1 справедливо предельное равенство

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega \cup \partial O(x, \varepsilon)} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}}(\xi, t) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}}(\xi, 0) \right] dS_{\xi} \rightarrow \\ \rightarrow \int_{\partial\Omega} \left[-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x - \xi, 0) \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}}(\xi, t) + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} \frac{\partial u_0(\xi)}{\partial n_{\xi}} \right] dS_{\xi} = \\ = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{4\pi|x - \xi|} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial n_{\xi}} + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} \frac{\partial u_0(\xi)}{\partial n_{\xi}} \right] dS_{\xi} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Наконец, в силу теоремы 3.1 имеет место следующее предельное свойство:

$$- \int_{\partial\Omega \cup \partial O(x, \varepsilon)} \left[v(\xi, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_{\xi}}(\xi, t) - v(\xi, 0) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_{\xi}}(\xi, 0) \right] dS_{\xi} \rightarrow \int_{\partial\Omega} \mathcal{E}(x - \xi, t) \frac{\partial u_1(\xi)}{\partial n_{\xi}} dS_{\xi} \quad (5.36)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. Таким образом, из (5.23), (5.24), (5.26), (5.29), (5.32), (5.33), (5.35) и (5.36) получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ = \int_0^t \int_{\partial\Omega} [\mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) - u(\xi, \tau) \mathfrak{N}^t[\mathcal{E}](x - \xi, t - \tau)] dS_{\xi} d\tau - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \mathcal{E}(x - \xi, t) \Delta u_1(\xi) d\xi - \int_{\Omega} \left[\frac{1}{4\pi|x - \xi|} \Delta u(\xi, t) + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} \Delta u_0(\xi) \right] d\xi + \\
& + \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{4\pi|x - \xi|} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial n_{\xi}} + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} \frac{\partial u_0(\xi)}{\partial n_{\xi}} \right] dS_{\xi} + \int_{\partial\Omega} \mathcal{E}(x - \xi, t) \frac{\partial u_1(\xi)}{\partial n_{\xi}} dS_{\xi}, \quad (5.37)
\end{aligned}$$

из которого с учетом равенства (5.34) приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[u(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}^t[\mathcal{E}](x - \xi, t - \tau) - \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) \right] dS_{\xi} d\tau - \\
& - \int_{\partial\Omega} u(\xi, t) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \frac{1}{4\pi|x - \xi|} dS_{\xi} + \int_{\Omega} \left[\mathcal{E}(x - \xi, t) \Delta u_1(\xi) + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} \Delta u_0(\xi) \right] d\xi - \\
& - \int_{\partial\Omega} \left[\mathcal{E}(x - \xi, t) \frac{\partial u_1(\xi)}{\partial n_{\xi}} + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} \frac{\partial u_0(\xi)}{\partial n_{\xi}} \right] dS_{\xi}, \quad (5.38)
\end{aligned}$$

где операторы $\mathfrak{N}_{\xi, \tau}$ и $\mathfrak{N}_{\xi, \tau}^t$ определены равенством (4.5), а оператор $\mathfrak{M}_{x, t}$ равенством (3.1). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Для любой функции $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}))$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, справедливо равенство (5.38) для $(x, t) \in \Omega \otimes [0, T]$.*

6. ТРЕТЬЯ ФОРМУЛА ГРИНА ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определение 6.1. Функция $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3))$ называется регулярной в окрестности бесконечно удаленной точки, если выполнены следующие неравенства:

$$\left| \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} \right| \leq \frac{M_1(T)}{|x|}, \quad \left| \frac{\partial^{k+1} u(x, t)}{\partial t^k \partial x_j} \right| \leq \frac{M_2(T)}{|x|^2}, \quad k = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, \quad (6.1)$$

$$|\mathfrak{M}_{x, t}[u](x, t)| \leq \frac{M_3(T)}{|x|^3}, \quad \max \left\{ |\Delta u_0(x)|, |\Delta u_1(x)| \right\} \leq \frac{M_4(T)}{|x|^3} \quad (6.2)$$

для всех $t \in [0, T]$ и при $|x| \geq R$, где $R > 0$ достаточно велико, а постоянные $M_m(T) > 0$ зависят только от $T > 0$ при $m = 1, 2, 3, 4$, где использованы обозначения $u_0(x) := u(x, 0)$ и $u_1(x) := u'(x, 0)$.

Справедливо следующее утверждение, которое по своей сути является утверждением о виде третьей формулой Грина во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ для регулярных функций.

Теорема 6.1. *Для любой функции $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3))$, регулярной в окрестности бесконечно удаленной точки в смысле определения 6.1, справедливо равенство*

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\mathcal{E}(x - \xi, t) \Delta u_1(\xi) + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} \Delta u_0(\xi) \right] d\xi. \quad (6.3)$$

Доказательство. Пусть $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]$ — произвольная фиксированная точка. Применяя третью формулу Грина (5.38) к ограниченной области $\Omega = O(x, 2R)$ при $R > 0$ и функции $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3))$, удовлетворяющей условию регулярности в окрестности бесконечно удаленной точки, получим следующую формулу:

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \int_0^t \int_{O(x, 2R)} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\partial O(x, 2R)} \left[u(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}^t[\mathcal{E}](x - \xi, t - \tau) - \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) \right] dS_\xi d\tau - \\
& - \int_{\partial O(x, 2R)} u(\xi, t) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi|x - \xi|} dS_\xi + \int_{O(x, 2R)} \left[\mathcal{E}(x - \xi, t) \Delta u_1(\xi) + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} \Delta u_0(\xi) \right] d\xi - \\
& - \int_{\partial O(x, 2R)} \left[\mathcal{E}(x - \xi, t) \frac{\partial u_1(\xi)}{\partial n_\xi} + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} \frac{\partial u_0(\xi)}{\partial n_\xi} \right] dS_\xi, \quad (6.4)
\end{aligned}$$

где $R > 0$ таково, что $x \in O(0, R)$. Последовательно рассмотрим все слагаемые в правой части равенства (6.4). Заметим, что в силу (3.13) и (6.2)

$$\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, 2R)} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \leq T \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, 2R)} \frac{K_1(T)}{|x - \xi|} \frac{M_3(T)}{|\xi|^3} d\xi := I_1(R), \quad (6.5)$$

поскольку при $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus O(x, 2R)$ и $x \in O(0, R)$ имеем $|\xi| \geq |x - \xi| - |x| \geq 2R - R = R$. После замены $\xi_j - x_j = y_j$ получим следующее выражение для $I_1(R)$:

$$I_1(R) := TK_1(T)M_3(T) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R)} \frac{1}{|x + y|^3 |y|} dy. \quad (6.6)$$

Для оценки этого интеграла заметим, что в силу нашего выбора справедливы следующие неравенства:

$$|x| \leq R \leq \frac{|y|}{2} \Rightarrow |x + y| \geq |y| - |x| \geq \frac{|y|}{2}. \quad (6.7)$$

Поэтому справедлива следующая оценка:

$$I_1(R) \leq K_4(T) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R)} \frac{1}{|y|^4} dy = K_4(T) 4\pi \int_{2R}^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr \rightarrow +0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty. \quad (6.8)$$

Таким образом,

$$\int_0^t \int_{O(x, 2R)} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau \rightarrow \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (6.9)$$

при $R \rightarrow +\infty$. Справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t \int_{\partial O(x, 2R)} u(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}^t[\mathcal{E}](x - \xi, t - \tau) dS_\xi d\tau \right| & \leq T \int_{|x - \xi| = 2R} \frac{M_1(T)}{|\xi|} \max \{1, \omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2\} \frac{4K_2(T)}{|x - \xi|^2} d\xi \leq \\
& \leq \frac{K_5(T)}{R^3} 4\pi R^2 \rightarrow +0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty, \quad (6.10)
\end{aligned}$$

где мы воспользовались неравенствами $|\xi| \geq |x - \xi| - |x| \geq 2R - R = R$. Аналогичным образом доказывается, что

$$\int_0^t \int_{\partial O(x, 2R)} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) dS_\xi d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty. \quad (6.11)$$

Поскольку справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x - \xi|} \right| \leq \frac{c_1}{|x - \xi|^2}, \quad \xi \neq x, \quad (6.12)$$

то имеет место предельное свойство

$$\int_{\partial O(x, 2R)} u(\xi, t) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi|x - \xi|} dS_\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty. \quad (6.13)$$

Точно так же, как при выводе предельного свойства (6.9), с учетом свойств (3.13) и (6.2) можно доказать, что

$$\begin{aligned} \int_{O(x, 2R)} \left[\mathcal{E}(x - \xi, t) \Delta u_1(\xi) + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} \Delta u_0(\xi) \right] d\xi \rightarrow \\ \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \left[\mathcal{E}(x - \xi, t) \Delta u_1(\xi) + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} \Delta u_0(\xi) \right] d\xi \quad \text{при } R \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Наконец, нетрудно доказать, что

$$\int_{\partial O(x, 2R)} \left[\mathcal{E}(x - \xi, t) \frac{\partial u_1(\xi)}{\partial n_\xi} + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} \frac{\partial u_0(\xi)}{\partial n_\xi} \right] dS_\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty. \quad (6.15)$$

Таким образом, при $R \rightarrow +\infty$ из (6.4) получим равенство (6.3). Теорема 6.1 доказана. $\square$

7. СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОШИ

В этом разделе мы приведем дадим слабые формулировки следующих задач Коши:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u + \omega_1^2 u_{x_1 x_1} + \omega_2^2 u_{x_2 x_2} + \omega_3^2 u_{x_3 x_3} + |\nabla u|^q = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0, T], \quad (7.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3; \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u + \omega_1^2 u_{x_1 x_1} + \omega_2^2 u_{x_2 x_2} + \omega_3^2 u_{x_3 x_3} - \frac{\partial |\nabla u|^q}{\partial t} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0, T], \quad (7.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3; \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u + \omega_1^2 u_{x_1 x_1} + \omega_2^2 u_{x_2 x_2} + \omega_3^2 u_{x_3 x_3} + \frac{\partial^2 |\nabla u|^q}{\partial t^2} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0, T], \quad (7.5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (7.6)$$

Определение 7.1. Слабым локальным во времени решением задачи Коши (7.1), (7.2) называется такая функция $u(x, t) \in W_{q, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, что для любой функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$ справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla u(x, t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 u_{x_j}(x, t) \phi_{x_j}(x, t) \right] dx dt + \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - \left(\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x) \right) \right] dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi(x, t) |\nabla u(x, t)|^q dx dt, \end{aligned} \quad (7.7)$$

причем $u_0(x), u_1(x) \in W_{1, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3)$.

Определение 7.2. Слабым глобальным во времени решением задачи Коши (7.1), (7.2) называется такая функция $u(x, t) \in W_{q, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, +\infty))$, что для любой функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, +\infty))$ справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla u(x, t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 u_{x_j}(x, t) \phi_{x_j}(x, t) \right] dx dt + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) \right] dx = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \phi(x, t) |\nabla u(x, t)|^q dx dt, \quad (7.8) \end{aligned}$$

причем $u_0(x), u_1(x) \in W_{1, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3)$.

Определение 7.3. Слабым локальным во времени решением задачи Коши (7.3), (7.4) называется такая функция $u(x, t) \in W_{q, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, что для любой функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$ справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla u(x, t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 u_{x_j}(x, t) \phi_{x_j}(x, t) \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - \right. \\ & \left. - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) - \phi(x, 0) |\nabla u_0(x)|^q \right] dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} |\nabla u(x, t)|^q dx dt, \quad (7.9) \end{aligned}$$

причем $u_0(x) \in W_{q, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in W_{1, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3)$.

Определение 7.4. Слабым глобальным во времени решением задачи Коши (7.3), (7.4) называется такая функция $u(x, t) \in W_{q, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, +\infty))$, что для любой функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, +\infty))$ справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla u(x, t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 u_{x_j}(x, t) \phi_{x_j}(x, t) \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - \right. \\ & \left. - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) - \phi(x, 0) |\nabla u_0(x)|^q \right] dx = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} |\nabla u(x, t)|^q dx dt, \quad (7.10) \end{aligned}$$

причем $u_0(x) \in W_{q, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in W_{1, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3)$.

Определение 7.5. Слабым локальным во времени решением задачи Коши (7.5), (7.6) называется такая функция $u(x, t) \in W_{q, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, что для любой функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$ справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla u(x, t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 u_{x_j}(x, t) \phi_{x_j}(x, t) \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - \right. \\ & \left. - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) |\nabla u_0(x)|^q + \phi(x, 0) q (\nabla u_1(x), |\nabla u_0(x)|^{q-2} \nabla u_0(x)) \right] dx = \\ & = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} |\nabla u(x, t)|^q dx dt, \quad (7.11) \end{aligned}$$

причем $u_0(x), u_1(x) \in W_{q, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3)$.

Определение 7.6. Слабым глобальным во времени решением задачи Коши (7.5), (7.6) называется такая функция $u(x, t) \in W_{q, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, +\infty))$, что для любой функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, +\infty))$ справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla u(x, t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 u_{x_j}(x, t) \phi_{x_j}(x, t) \right] dx dt + \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) |\nabla u_0(x)|^q + \phi(x, 0) q (\nabla u_1(x), |\nabla u_0(x)|^{q-2} \nabla u_0(x)) \right] dx = \\ & \quad = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} |\nabla u(x, t)|^q dx dt, \quad (7.12) \end{aligned}$$

причем $u_0(x), u_1(x) \in W_{q, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3)$.

Заметим, что имеется связь между введенными локальными во времени слабыми решениями в смысле определений 7.1, 7.3, 7.5 и глобальными во времени слабыми решениями в смысле определений 7.2, 7.4, 7.6, соответственно.

Лемма 7.1. Всякие глобальные во времени слабые решения в смысле определений 7.2, 7.4, 7.6 являются локальными во времени слабыми решениями в смысле определений 7.1, 7.3, 7.5 соответственно.

Доказательство основано на том, что

$$W_{q, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, +\infty)) \subset W_{q, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$$

для любого $T > 0$ и, кроме того,

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, +\infty)),$$

если функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$ продолжить нулем при $t \geq T$. $\square$

Теорема 7.1. Пусть $u(x, t)$ — слабое решение задачи Коши (7.1), (7.2) в смысле определения 7.1. Тогда в классе таких функций $u(x, t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$, что существуют свертки

$$U_1(x, t) := - \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) |\nabla \tilde{u}(y, \tau)|^q dy d\tau \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)), \quad (7.13)$$

$$V(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \Delta u_1(y) dy \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)), \quad (7.14)$$

$$W(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \Delta u_0(y) dy \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)), \quad (7.15)$$

справедливо следующее представление в виде суммы трех потенциалов:

$$\tilde{u}(x, t) = U_1(x, t) + V(x, t) + W(x, t) \quad \text{для н.в. } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T), \quad (7.16)$$

где $\mathcal{E}(x, t)$ — фундаментальное решение оператора $\mathfrak{M}_{x, t}$, определенное равенством (3.12).

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — локальное во времени слабое решение задачи Коши (7.1), (7.2), а $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$ — произвольная функция. Рассмотрим продолжение этой функции

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases} \quad (7.17)$$

Отметим, что тогда

$$\widetilde{|\nabla u|^q}(x, t) = \begin{cases} |\nabla u(x, t)|^q, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases} = |\nabla \tilde{u}|^q. \quad (7.18)$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{M}_{x,t}[\tilde{u}](x, t), \phi(x, t) \rangle &= \langle \tilde{u}(x, t), \mathfrak{M}_{x,t}[\phi(x, t)] \rangle = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \mathfrak{M}_{x,t}[\phi](x, t) dx dt = \\ &= - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla u(x, t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 u_{x_j}(x, t) \phi_{x_j}(x, t) \right] dx dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) \right] dx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi(x, t) |\nabla u(x, t)|^q dx dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) \Delta \phi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) \Delta \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) dx - \int_{-\infty}^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi(x, t) |\nabla \tilde{u}(x, t)|^q dx dt = \\ &= \langle u_1(x) \delta(t), \Delta \phi(x, t) \rangle + \langle u_0(x) \delta'(t), \Delta \phi(x, t) \rangle - \langle |\nabla \tilde{u}(x, t)|^q, \phi(x, t) \rangle = \\ &= \langle \delta(t) \Delta u_1(x) + \delta'(t) \Delta u_0(x) - |\nabla \tilde{u}(x, t)|^q, \phi(x, t) \rangle. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Итак, справедливо равенство

$$\langle \mathfrak{M}_{x,t}[\tilde{u}](x, t), \phi(x, t) \rangle = \langle \delta(t) \Delta u_1(x) + \delta'(t) \Delta u_0(x) - |\nabla \tilde{u}(x, t)|^q, \phi(x, t) \rangle, \quad (7.20)$$

в котором все производные понимаются в смысле обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$. Таким образом, мы приходим к следующему равенству, понимаемому в смысле обобщенных функций:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\tilde{u}](x, t) = \delta(t) \Delta u_1(x) + \delta'(t) \Delta u_0(x) - |\nabla \tilde{u}(x, t)|^q. \quad (7.21)$$

В силу [1, теорема 11.3] приходим к утверждению теоремы. $\square$

Теорема 7.2. Пусть $u(x, t)$ — слабое решение задачи Коши (7.3), (7.4) в смысле определения 7.3. Тогда в классе $|\nabla u(x, t)|^q \in \mathbb{C}_{x,t}^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$ таких функций $u(x, t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$, что существуют свертки

$$U_2(x, t) := \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \left\{ \frac{\partial |\nabla \tilde{u}(y, \tau)|^q}{\partial \tau} \right\} dy d\tau \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)), \quad (7.22)$$

$$V(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \Delta u_1(y) dy \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)), \quad (7.23)$$

$$W(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \Delta u_0(y) dy \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)), \quad (7.24)$$

справедливо следующее представление в виде суммы трех потенциалов:

$$\tilde{u}(x, t) = U_2(x, t) + V(x, t) + W(x, t) \quad \text{для п.в. } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T), \quad (7.25)$$

где $\mathcal{E}(x, t)$ — фундаментальное решение оператора $\mathfrak{M}_{x,t}$, определенное равенством (3.12).

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{M}_{x,t}[\tilde{u}](x, t), \phi(x, t) \rangle &= \langle \tilde{u}, \mathfrak{M}_{x,t}[\phi](x, t) \rangle = \\ &= - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla u(x, t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 u_{x_j}(x, t) \phi_{x_j}(x, t) \right] dx dt = \\ &= - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} |\nabla u(x, t)|^q dx dt + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - \right. \\ &\quad \left. - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) - \phi(x, 0) |\nabla u_0(x)|^q \right] dx = \\ &= - \int_{-\infty}^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} |\nabla \tilde{u}(x, t)|^q dx dt + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - \right. \\ &\quad \left. - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) - \phi(x, 0) |\nabla u_0(x)|^q \right] dx = \\ &= - \left\langle |\nabla \tilde{u}(x, t)|^q, \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \Delta u_0(x) \delta'(t) + \Delta u_1(x) \delta'(t), \phi(x, t) \right\rangle - \left\langle |\nabla u_0(x)|^q \delta(t), \phi(x, t) \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} |\nabla \tilde{u}(x, t)|^q, \phi(x, t) \right\rangle - \left\langle |\nabla u_0(x)|^q \delta(t), \phi(x, t) \right\rangle + \left\langle \Delta u_0(x) \delta'(t) + \Delta u_1(x) \delta'(t), \phi(x, t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Предположим, что $|\nabla u(x, t)|^q \in \mathbb{C}_{x,t}^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} |\nabla \tilde{u}(x, t)|^q, \phi(x, t) \right\rangle &= - \left\langle |\nabla \tilde{u}(x, t)|^q, \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right\rangle = - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x, t)|^q \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} dx dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_0(x)|^q \phi(x, 0) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u(x, t)|^q \right\} \phi(x, t) dx dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_0(x)|^q \phi(x, 0) dx + \int_{-\infty}^T \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} |\nabla \tilde{u}(x, t)|^q \right\} \phi(x, t) dx dt = \\ &= \left\langle |\nabla u_0(x)|^q \delta(t), \phi(x, t) \right\rangle + \left\langle \left\{ \frac{\partial}{\partial t} |\nabla \tilde{u}(x, t)|^q \right\}, \phi(x, t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Тогда из равенств (7.26) и (7.27) вытекает следующее равенство:

$$\left\langle \mathfrak{M}_{x,t}[\tilde{u}](x, t), \phi(x, t) \right\rangle = \left\langle \left\{ \frac{\partial}{\partial t} |\nabla \tilde{u}(x, t)|^q \right\} + \delta'(t) \Delta u_0(x) + \delta(t) \Delta u_1(x), \phi(x, t) \right\rangle \quad (7.28)$$

для любых функций $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$. Таким образом, всякое слабое решение задачи Коши (7.3), (7.4) в смысле определения 7.3 удовлетворяет следующему равенству в смысле

пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\tilde{u}](x, t) = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} |\nabla \tilde{u}(x, t)|^q \right\} + \delta'(t) \Delta u_0(x) + \delta(t) \Delta u_1(x), \quad (7.29)$$

где все производные понимаются в смысле обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$. Применяя теорему 11.3 из [1], приходим к утверждению теоремы. $\square$

Аналогичным образом можно доказать следующее утверждение.

Теорема 7.3. Пусть $u(x, t)$ — слабое решение задачи Коши (7.5), (7.6) в смысле определения 7.5. Тогда в классе $|\nabla u(x, t)|^q \in \mathbb{C}_{x,t}^{(0,2)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$ таких функций $u(x, t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$, что существуют свертки

$$U_3(x, t) := - \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \left\{ \frac{\partial^2 |\nabla \tilde{u}(y, \tau)|^q}{\partial \tau^2} \right\} dy d\tau \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)), \quad (7.30)$$

$$V(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \Delta u_1(y) dy \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)), \quad (7.31)$$

$$W(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \Delta u_0(y) dy \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)), \quad (7.32)$$

справедливо следующее представление в виде суммы трех потенциалов:

$$\tilde{u}(x, t) = U_3(x, t) + V(x, t) + W(x, t) \quad \text{для н.в. } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T), \quad (7.33)$$

где $\mathcal{E}(x, t)$ — фундаментальное решение оператора $\mathfrak{M}_{x,t}$, определенное равенством (3.12).

8. СВОЙСТВА ОБЪЕМНОГО И ПОВЕРХНОСТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассмотрим следующие объемный и поверхностные потенциалы, имеющие важную роль при исследовании локальной во времени разрешимости поставленных в предыдущем разделе задач Коши:

$$U(x, t) := U[\rho](x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_\beta(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad (8.1)$$

$$V(x, t) := V[\mu](x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} G_\beta(x, y, t) \mu(y) dy, \quad (8.2)$$

$$W(x, t) := W[\sigma](x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_\beta(x, y, t)}{\partial t} \sigma(y) dy, \quad (8.3)$$

где

$$G_\beta(x, y, t) := \frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^\beta} \mathcal{E}(x - y, t), \quad \beta > \frac{3}{2}, \quad (8.4)$$

а $\mathcal{E}(x, t)$ — фундаментальное решение, определенное равенством (3.12). Сначала рассмотрим объемный потенциал $U(x, t)$, определенный равенством (8.1). Отметим, что его можно записать в виде

$$U(x, t) = \int_0^t H(x, t, \tau) d\tau, \quad H(x, t, \tau) := \int_{\mathbb{R}^3} G_\beta(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy. \quad (8.5)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8.1. Если $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$, то при условии $\beta > 3/2$ объемный потенциал $U(x, t)$ принадлежит классу $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$.

Доказательство. Шаг 1. Поскольку $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$, то справедливо неравенство

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(x, t)| < +\infty. \quad (8.6)$$

Докажем, что $H(x, t, \tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, t])$ для любого $t \in (0, T]$. Действительно, пусть $(x^1, \tau^1), (x^2, \tau^2) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, t]$. Заметим, что для любых $\varepsilon_0 > 0$ и $R_0 > \varepsilon_0$ справедливо равенство

$$H(x^j, t, \tau^j) = H_1(x^j, t, \tau^j) + H_2(x^j, t, \tau^j) + H_3(x^j, t, \tau^j), \quad (8.7)$$

где

$$H_1(x^j, t, \tau^j) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x^j, R_0)} G_\beta(x^j, y, t - \tau^j) \rho(y, \tau^j) dy, \quad (8.8)$$

$$H_2(x^j, t, \tau^j) = \int_{O(x^j, R_0) \setminus O(x^j, \varepsilon_0)} G_\beta(x^j, y, t - \tau^j) \rho(y, \tau^j) dy, \quad (8.9)$$

$$H_3(x^j, t, \tau^j) = \int_{O(x^j, \varepsilon_0)} G_\beta(x^j, y, t - \tau^j) \rho(y, \tau^j) dy. \quad (8.10)$$

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \left| H(x^1, t, \tau^1) - H(x^2, t, \tau^2) \right| \leq \\ & \leq |H_1(x^1, t, \tau^1)| + |H_1(x^2, t, \tau^2)| + |H_3(x^1, t, \tau^1)| + |H_3(x^2, t, \tau^2)| + \\ & \quad + |H_2(x^1, t, \tau^1) - H_2(x^2, t, \tau^2)|. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Пусть $R > 0$ настолько велико, что $x^1, x^2 \in O(0, R)$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. Тогда найдется настолько большое $R_0 > 0$, что в силу оценки (3.13) теоремы 3.1 будет выполнена следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |H_1(x^j, t, \tau^j)| & \leq (1 + R^2)^{1/2} \sup_{(y, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(y, \tau)| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x^j, R_0)} \frac{1}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{K_1(T)}{|x^j - y|} dy \leq \\ & \leq (1 + R^2)^{1/2} \sup_{(y, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(y, \tau)| \frac{K_1(T)}{R_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1 + |y|^2)^\beta} dy < \frac{\varepsilon}{5} \end{aligned} \quad (8.12)$$

при $\beta > 3/2$. Теперь выберем настолько малое $\varepsilon_0 \in (0, R_0)$, что в силу оценки (3.13) теоремы 3.1 будет выполнена следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |H_3(x^j, t, \tau^j)| & \leq (1 + R^2)^{1/2} \sup_{(y, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(y, \tau)| \int_{O(x^j, \varepsilon_0)} \frac{K_1(T)}{|x^j - y|} dy = \\ & = (1 + R^2)^{1/2} \sup_{(y, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(y, \tau)| 4\pi K_1(T) \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \right)^2 < \frac{\varepsilon}{5}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Теперь фиксируем найденные $R_0 > \varepsilon_0 > 0$. Тогда найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon_0, R_0, \varepsilon) > 0$, что при

$$|(x^1, \tau^1) - (x^2, \tau^2)| = \left(\sum_{j=1}^3 (x_j^1 - x_j^2)^2 + (\tau^1 - \tau^2)^2 \right)^{1/2} < \delta \quad (8.14)$$

будет справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} & |H_2(x^1, t, \tau^1) - H_2(x^2, t, \tau^2)| \leq \\ & \leq \int_{O(0, R_0) \setminus O(0, \varepsilon_0)} \left| \frac{(1 + |x^1|^2)^{1/2} \rho(x^1 + z, \tau^1)}{(1 + |x^1 + z|^2)^\beta} \mathcal{E}(z, t - \tau^1) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{(1 + |x^2|^2)^{1/2} \rho(x^2 + z, \tau^2)}{(1 + |x^2 + z|^2)^\beta} \mathcal{E}(z, t - \tau^2) \right| dz < \frac{\varepsilon}{5}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Таким образом, из (8.11)–(8.15) вытекает, что $H(x, t, \tau) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, t])$. Докажем, что $H(x, t, \tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, t])$. С этой целью воспользуемся следующей оценкой:

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} |G_\beta(x, y, t)| dy \leq B_3(\beta, T) < +\infty, \quad (8.16)$$

которая является следствием неравенства (3.29) теоремы 3.2. Поэтому из (8.16) вытекает следующая оценка:

$$\sup_{(x, t, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T] \otimes [0, t]} |H(x, t, \tau)| \leq B_{11}(T) < +\infty \quad \text{для любого } t \in [0, T]. \quad (8.17)$$

Таким образом, из (8.17) вытекает, что

$$H(x, t, \tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, t]) \quad \text{для любого } t \in [0, T]. \quad (8.18)$$

Шаг 2. Заметим, что с учетом теоремы из [1, раздел 1.6] и оценок (3.13) теоремы 3.1 справедливы поточечные равенства

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_\beta(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy, \quad (8.19)$$

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_\beta(x, y, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy \quad (8.20)$$

для всех $(x, t, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T] \otimes [0, t]$. Более того, с учетом оценок (3.13) точно так же, как при рассмотрении функции $H(x, t, \tau)$, можно доказать, что для каждого $t \in [0, T]$

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, t]), \quad \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, t]), \quad j = 1, 2, 3. \quad (8.21)$$

Докажем, что на самом деле

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, t]), \quad (1 + |x|^2)^{1/2} \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, t]) \quad (8.22)$$

при $j = 1, 2, 3$. Прежде всего заметим, что в силу оценки (3.29) из теоремы 3.2 имеет место неравенство

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial G_\beta(x, y, t)}{\partial t} \right| dy \leq B_3(\beta, T) < +\infty \quad \text{при } \beta > \frac{3}{2}. \quad (8.23)$$

С учетом оценки (8.23) из равенства (8.19) вытекает, что справедливо неравенство

$$\sup_{(x, t, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T] \otimes [0, t]} \left| \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} \right| \leq B_1(T, \beta) \sup_{(y, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(y, \tau)| < +\infty, \quad (8.24)$$

т.е. доказано первое соотношение из (8.22). При $x \neq y$ справедливо следующее равенство:

$$(1 + |x|^2)^{1/2} \frac{\partial G_\beta(x, y, t)}{\partial x_j} = \frac{1 + |x|^2}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial x_j} + \frac{x_j}{(1 + |y|^2)^\beta} \mathcal{E}(x - y, t). \quad (8.25)$$

С учетом оценок (3.13) из теоремы 3.1 имеет место неравенство

$$\left| (1 + |x|^2)^{1/2} \frac{\partial G_\beta(x, y, t)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{1 + |x|^2}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{K_1(T)}{|x - y|^2} + \frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{K_1(T)}{|x - y|}. \quad (8.26)$$

Из этой оценки с учетом формул (3.30) вытекает неравенство

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \frac{\partial G_\beta(x, y, t)}{\partial x_j} \right| dy \leq B_2(T, \beta) < +\infty, \quad \beta > \frac{3}{2}, \quad (8.27)$$

из которого и из (8.20) получаем оценку

$$\sup_{(x, t, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T] \otimes [0, t]} (1 + |x|^2)^{1/2} \left| \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} \right| \leq B_2(T, \beta) \sup_{(y, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(y, \tau)| < +\infty. \quad (8.28)$$

Итак, доказано второе соотношение из (8.22).

Аналогичным образом при помощи оценок (3.13) теоремы 3.1 с учетом формул (3.30) можно доказать, что

$$\frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial t} = \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, t]) \quad \text{для каждого } t \in [0, T] \quad (8.29)$$

и следующую оценку:

$$\sup_{(x, t, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T] \otimes [0, t]} (1 + |x|^2)^{1/2} \left| \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j} \right| \leq B_2(T, \beta) \sup_{(y, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(y, \tau)| < +\infty. \quad (8.30)$$

Таким образом, из (8.5), (8.18) и (8.22) получаем, что для каждого $t \in [0, T]$

$$U(x, t) \in \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3). \quad (8.31)$$

Кроме того, справедливы равенства

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = H(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau = \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T], \quad (8.32)$$

из которых и из (8.22), (8.30) вытекает следующая оценка:

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_1 \leq T \sup_{(x, t, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T] \otimes [0, t]} \left| \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} \right|_1 \leq B_3(T, \beta) < +\infty \quad \text{при } \beta > \frac{3}{2}. \quad (8.33)$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$U(x, t_2) - U(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} dt, \quad (8.34)$$

из которого и из (8.33) вытекает следующая оценка:

$$|U(x, t_2) - U(x, t_1)|_1 \leq \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_1 |t_2 - t_1| \leq B_3(T, \beta) |t_2 - t_1|. \quad (8.35)$$

Из (8.31) и (8.35) приходим к выводу о том, что

$$U(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)) \quad \text{при } \beta > \frac{3}{2}. \quad (8.36)$$

Шаг 3. Докажем теперь, что

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)) \quad \text{при } \beta > \frac{3}{2}. \quad (8.37)$$

Прежде всего заметим, что при помощи оценок (3.13) и равенств (3.15) теоремы 3.1 можно доказать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = & - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{\rho(y, t)}{|x - y|} dy + \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_\beta(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]). \end{aligned} \quad (8.38)$$

Действительно, это следствие оценки

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial^2 G_\beta(x, y, t)}{\partial t^2} \right| dy \leq B_3(\beta, T) < +\infty \quad \text{при} \quad \beta > \frac{3}{2}, \quad (8.39)$$

справедливой в силу оценок (3.29), а также того факта, что $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$. Из теоремы в [1, раздел 1.6] и оценок (3.15) теоремы 3.1 вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2} = & - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{1}{|x - y|} \right) \rho(y, t) dy + \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_\beta(x, y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]). \end{aligned} \quad (8.40)$$

Из формул (3.30) получаем оценку

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \frac{\partial^3 G_\beta(x, y, t)}{\partial x_j \partial t^2} \right| dy \leq B_3(T, \beta) < +\infty \quad \text{при} \quad \beta > \frac{3}{2}. \quad (8.41)$$

Кроме того, нетрудно получить оценку

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|^2)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{1}{|x - y|} \right) \right| dy = B_4(\beta) < +\infty \quad \text{при} \quad \beta > \frac{3}{2}, \quad (8.42)$$

поскольку при $x \neq y$ справедливо соотношение

$$(1 + |x|^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{1}{|x - y|} \right) = \frac{1}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{x_j}{|x - y|} - \frac{1 + |x|^2}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^3}, \quad (8.43)$$

из которого вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{1}{|x - y|} \right) \right| & \leq \\ & \leq \frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{1}{|x - y|} + \frac{1 + |x|^2}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{1}{|x - y|^2} \quad \text{при} \quad x \neq y. \end{aligned} \quad (8.44)$$

Теперь осталось воспользоваться оценками (3.27) и (3.28) и доказать оценку (8.42). Таким образом, из (8.40) с учетом оценок (8.41) и (8.42) вытекает оценка

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2} \right| \leq B_5(\beta, T) \sup_{(y, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(y, \tau)| < +\infty \quad \text{при} \quad \beta > \frac{3}{2}. \quad (8.45)$$

Из (8.38) и (8.45) приходим к следующей оценке:

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} \left| \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \right|_1 \leq B_6(T, \beta) \sup_{(y, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(y, \tau)| < +\infty \quad \text{при} \quad \beta > \frac{3}{2}. \quad (8.46)$$

Заметим, что ранее (см. оценку (8.33)) было доказано, что

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \in \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3) \quad \text{для всех } t \in [0, T]. \quad (8.47)$$

Кроме того, справедливо равенство

$$\frac{\partial U(x, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t_1)}{\partial t} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} dt, \quad (8.48)$$

из которого с учетом оценки (8.46) вытекает оценка

$$\left| \frac{\partial U(x, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t_1)}{\partial t} \right|_1 \leq \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \right|_1 dt \leq B_6(T, \beta) \sup_{(y, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(y, \tau)| |t_2 - t_1|. \quad (8.49)$$

Из (8.47) и (8.49) получаем, что

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)). \quad (8.50)$$

Докажем, что сильная производная по времени от функции $U(x, t)$ в смысле банахова пространства $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$ совпадает с частной производной

$$\frac{dU(x)(t)}{dt} = \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)). \quad (8.51)$$

Прежде всего докажем, что справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t \partial x_j} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]. \quad (8.52)$$

Действительно, имеют место равенства

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t \partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j} d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial t} d\tau = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t}, \quad (8.53)$$

где мы воспользовались свойством коммутативности (8.29). Заметим, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \left| \frac{U(x)(t + \Delta t) - U(x)(t)}{\Delta t} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_1 = \\ &= \left| \frac{\partial U(x, t^*)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_0 + \sum_{j=1}^3 \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \left(\frac{\partial^2 U(x, t^*)}{\partial t \partial x_j} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} \right) \right|_0 \leq \\ &\leq \sup_{s \in [t, t + \Delta t]} \left| \frac{\partial U(x, s)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_0 + \\ &+ \sup_{s \in [t, t + \Delta t]} \sum_{j=1}^3 \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \left(\frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial t \partial x_j} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t \partial x_j} \right) \right|_0 \rightarrow +0 \quad \text{при } |\Delta t| \rightarrow +0, \end{aligned} \quad (8.54)$$

где $t^* = t^*(x) \in (t, t + \Delta t)$, и мы воспользовались свойством (8.50), а также тем фактом, что если $f(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$, то

$$g(s, t) := \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |f(x, s) - f(x, t)|_1 \in \mathbb{C}([0, T] \otimes [0, T])$$

и поэтому

$$\sup_{s \in [t, t + \Delta t]} g(s, t) \rightarrow +0 \quad \text{при } |\Delta t| \rightarrow +0 \quad \text{для каждого } t \in [0, T].$$

Таким образом, на данный момент доказано, что

$$U(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)). \quad (8.55)$$

Шаг 4. Теперь наша задача доказать, что

$$U(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)). \quad (8.56)$$

С этой целью рассмотрим потенциал

$$V_0(x, t) := - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^\beta} \frac{\rho(y, t)}{4\pi|x - y|} dy. \quad (8.57)$$

Лемма 8.1. Для любой функции $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$ потенциал $V_0(x, t)$ принадлежит классу $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$ при $\beta > 3/2$.

Доказательство. При помощи оценок (3.26) и (3.27), справедливых при условии $\beta > 3/2$, несложно доказать, что $V_0(x, t) \in \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)$ для каждого $t \in [0, T]$, причем справедлива оценка

$$|V_0(x, t_2) - V_0(x, t_1)|_1 \leq B_7(\beta) |\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)|_0 \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |t_2 - t_1| \rightarrow +0. \quad (8.58)$$

Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим теперь следующий вспомогательный потенциал:

$$U_0(x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_\beta(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau. \quad (8.59)$$

Лемма 8.2. Если функция $\rho(x, t)$ принадлежит классу $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$ и $\beta > 3/2$, то потенциал $U_0(x, t)$ принадлежит классу $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$.

Доказательство. С учетом оценок (3.29) и (3.30) стандартным образом можно доказать, что для каждого $t \in [0, T]$ потенциал $U_0(x, t) \in \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)$. С учетом равенства (3.16) можно доказать равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0(x, t)}{\partial t} &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_\beta(x, y, 0)}{\partial t^2} \rho(y, t) dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_\beta(x, y, t - \tau)}{\partial t^3} \rho(y, \tau) dy d\tau = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_\beta(x, y, t - \tau)}{\partial t^3} \rho(y, \tau) dy d\tau, \end{aligned} \quad (8.60)$$

причем с учетом оценки (3.29) заключаем, что

$$\frac{\partial U_0(x, t)}{\partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]). \quad (8.61)$$

Далее, используя оценки (3.29) и (3.30), можно получить оценку

$$\left| \frac{\partial U_0(x, t)}{\partial t} \right|_1 \leq B_8(T, \beta) \sup_{(y, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(y, \tau)| \quad \text{при} \quad \beta > \frac{3}{2}. \quad (8.62)$$

Таким образом, приходим к следующей оценке:

$$|U_0(x, t_2) - U_0(x, t_1)|_1 \leq \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial U_0(x, t)}{\partial t} \right|_1 |t_2 - t_1| \leq B_8(T, \beta) \sup_{(y, \tau) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(y, \tau)| |t_2 - t_1|. \quad (8.63)$$

Лемма доказана. $\square$

Таким образом, из (8.38) с учетом лемм 8.1 и 8.2 приходим к выводу о том, что

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = V_0(x, t) + U_0(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)). \quad (8.64)$$

Нам осталось доказать, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \quad (8.65)$$

в смысле банахова пространства $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$. Прежде всего заметим, что точно так же, как равенство (8.52) (и с учетом этого равенства), можно доказать следующие коммутационные равенства:

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t \partial t} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial t} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial t \partial x_j} \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]. \quad (8.66)$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\partial U(x, t + \Delta t)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right] - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \right|_1 = \\ & = \left| \frac{\partial^2 U(x, t^*)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \right|_0 + \sum_{j=1}^3 \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \left(\frac{\partial^3 U(x, t^*)}{\partial t \partial x_j \partial t} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2} \right) \right|_0 \leq \\ & \leq \sup_{s \in [t, t + \Delta t]} \left| \frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \right|_0 + \\ & + \sup_{s \in [t, t + \Delta t]} \sum_{j=1}^3 \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \left(\frac{\partial^3 U(x, s)}{\partial t \partial x_j \partial t} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2} \right) \right|_0 \rightarrow +0 \quad (8.67) \end{aligned}$$

при $|\Delta t| \rightarrow +0$, где $t^* = t^*(x) \in (t, t + \Delta t)$, и мы воспользовались коммутационными соотношениями (8.66) и свойством (8.64). Таким образом, вложение (8.56) доказано. $\square$

Рассмотрим теперь следующие два объемных потенциала:

$$U_0^{(1)}(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_\beta(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad (8.68)$$

$$U_0^{(2)}(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_\beta(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad (8.69)$$

где функция $G_\beta(x, y, t)$ определена равенством (8.4). При доказательстве теоремы 8.1 фактически было доказано следующее утверждение.

Теорема 8.2. Если $\beta > 3/2$ и $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$, то

$$\begin{aligned} U_0^{(1)}(x, t) & \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)), \\ U_0^{(2)}(x, t) & \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)). \end{aligned}$$

Теорема 8.3. Пусть $\mu(x), \sigma(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ и $\beta > 3/2$. Тогда для произвольного $T > 0$ поверхностные потенциалы $V(x, t), W(x, t)$ принадлежат классу $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$.

Доказательство. Доказательство основано на той же технике, что и доказательство теоремы 8.1. При этом существенно используются оценки (3.29), (3.30) теоремы 3.2. $\square$

Сформулируем и докажем теорему о свойствах объемного и поверхностных потенциалов (без веса) следующего вида:

$$U^1(x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_1(y, \tau) dy d\tau, \quad (8.70)$$

$$V^1(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \mu_1(y) dy, \quad (8.71)$$

$$W^1(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \sigma_1(y) dy, \quad (8.72)$$

где $\mathcal{E}(x, t)$ — фундаментальное решение, определенное равенством (3.12). Справедлива следующая теорема о гладкости этих потенциалов.

Теорема 8.4. Пусть $\rho_1(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3))$ и $\mu_1(x)$, $\sigma_1(x) \in \mathbb{C}_b((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3)$. Тогда при $\beta > 3/2$

$$U^1(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3)), \quad (8.73)$$

$$V^1(x, t), W^1(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_1]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3)) \quad \text{для любого } T_1 > 0. \quad (8.74)$$

Доказательство. Заметим, что справедливы равенства

$$U^1(x, t) = \frac{U(x, t)}{(1 + |x|^2)^{1/2}}, \quad V^1(x, t) = \frac{V(x, t)}{(1 + |x|^2)^{1/2}}, \quad W^1(x, t) = \frac{W(x, t)}{(1 + |x|^2)^{1/2}}, \quad (8.75)$$

в которых

$$\rho(x, t) = (1 + |x|^2)^\beta \rho_1(x, t), \quad \mu(x) = (1 + |x|^2)^\beta \mu_1(x), \quad \sigma(x) = (1 + |x|^2)^\beta \sigma_1(x). \quad (8.76)$$

Осталось воспользоваться теоремами 8.1 и 8.3, а также определениями банаховых пространств $\mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)$ и $\mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3)$. Теорема доказана. $\square$

Справедлива следующая лемма (доказательство см., например, в [10]).

Лемма 8.3. Пусть $\rho_0(x) \in \mathbb{C}_b((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3)$ при $\beta > 3/2$. Тогда классический объемный ньютоновский потенциал

$$W_0(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|x-y|} \rho_0(y) dy \quad (8.77)$$

удовлетворяет равенству

$$\langle \Delta_x W_0(x), \phi(x) \rangle = \langle \rho_0(x), \phi(x) \rangle \quad \text{для каждого } t \in [0, T] \quad (8.78)$$

и для любых $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, оператор Δ_x — трехмерный оператор Лапласа, понимаемый в смысле производных обобщенных функций.

Приступим к доказательству ряда утверждений относительно объемного и поверхностных потенциалов, определенных равенствами (8.70) и (8.71), (8.72).

Лемма 8.4. Пусть $\rho_1(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3))$ при $\beta > 3/2$. Тогда справедливо равенство

$$\langle \mathfrak{M}_{x,t}[U^1](x, t), \phi(x) \rangle = \langle \rho_1(x, t), \phi(x) \rangle \quad \text{для всех } t \in [0, T] \quad (8.79)$$

и для всех $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, оператор $\mathfrak{M}_{x,t}$ определен равенством

$$\mathfrak{M}_{x,t}[w](x, t) := \Delta_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 w_{x_j x_j}(x, t), \quad (8.80)$$

в котором производные по координатам понимаются в смысле обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Кроме того,

$$U^1(x, 0) = \frac{\partial U^1}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^3. \quad (8.81)$$

Доказательство. В силу теорем 3.1 и 8.4 справедливо следующее поточечное равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U^1(x, t)}{\partial t^2} = & - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|x-y|} \rho_1(y, t) dy + \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}_2(x-y, t-\tau) \rho_1(y, \tau) dy d\tau =: W_0(x, t) + U^2(x, t), \end{aligned} \quad (8.82)$$

где

$$\mathcal{E}_2(x-y, t-\tau) := \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2}. \quad (8.83)$$

В силу леммы 8.3 справедливо равенство

$$\langle \Delta_x W_0(x, t), \phi(x) \rangle = \langle \rho_1(x, t), \phi(x) \rangle \quad \text{для каждого } t \in [0, T] \quad (8.84)$$

и для любых пробных функций $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. С учетом введенных обозначений справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta_x U^2(x, t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 U_{x_j x_j}^1(x, t), \phi(x) \right\rangle = \\ = \left\langle U^2(x, t), \Delta_x \phi(x) \right\rangle + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \left\langle U^1(x, t), \phi_{x_j x_j}(x) \right\rangle := J_1 + J_2 \end{aligned} \quad (8.85)$$

для любой $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Теперь фиксируем произвольным образом пробную функцию $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Найдется такое число $R = R(\phi) > 0$, что $\text{supp } \phi(x) \subset O(0, R)$. Рассмотрим сначала слагаемое J_1 из равенства (8.85). Справедливы равенства

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{O(0, R)} \Delta_x \phi(x) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}_2(x-y, t-\tau) \rho_1(y, \tau) dy d\tau dx = \\ &= \int_0^t \int_{O(0, R)} \Delta_x \phi(x) \int_{O(0, 2R)} \mathcal{E}_2(x-y, t-\tau) \rho_1(y, \tau) dy dx d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{O(0, R)} \Delta_x \phi(x) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R)} \mathcal{E}_2(x-y, t-\tau) \rho_1(y, \tau) dy dx d\tau := J_{11} + J_{12}. \end{aligned} \quad (8.86)$$

Заметим, что при $|y| \geq 2R$ и $|x| \leq R$ справедливо неравенство

$$|y-x| \geq |y| - |x| \geq 2R - R = R > 0. \quad (8.87)$$

Интегрируя по частям в выражении для J_{12} , получим равенство

$$J_{12} = \int_0^t \int_{O(0, R)} \phi(x) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R)} \Delta_x \mathcal{E}_2(x-y, t-\tau) \rho_1(y, \tau) dy dx d\tau. \quad (8.88)$$

Рассмотрим теперь выражение для J_2 из формулы (8.85). Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \left\langle U^1(x, t), \phi_{x_j x_j}(x) \right\rangle = \\ &= \int_{O(0, R)} dx \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \rho_1(y, \tau) dy d\tau dx = \\ &= \int_{O(0, R)} dx \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x) \int_0^t \int_{O(0, 2R)} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \rho_1(y, \tau) dy d\tau dx + \\ &+ \int_{O(0, R)} dx \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R)} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \rho_1(y, \tau) dy d\tau dx := J_{21} + J_{22}. \end{aligned} \quad (8.89)$$

В силу (8.87) интегрированием по частям в выражении для J_{22} можно получить равенство

$$J_{22} = \int_0^t \int_{O(0,R)} \phi(x) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0,2R)} \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \mathcal{E}_{x_j x_j}(x-y, t-\tau) \rho_1(y, \tau) dy dx d\tau. \quad (8.90)$$

Из выражений (8.88), (8.90) и определения фундаментального решения $\mathcal{E}(x, t)$ получаем

$$J_{12} + J_{22} = \int_0^t \int_{O(0,R)} \phi(x) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0,2R)} \left[\Delta_x \mathcal{E}_2(x-y, t-\tau) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \mathcal{E}_{x_j x_j}(x-y, t-\tau) \right] \times \\ \times \rho_1(y, \tau) dy dx d\tau = 0. \quad (8.91)$$

Из равенств (8.86) и (8.89) вытекает следующая цепочка равенств:

$$J_{11} + J_{21} = \int_{O(0,R)} \Delta_x \phi(x) \int_0^t \int_{O(0,2R)} \mathcal{E}_2(x-y, t-\tau) \rho_1(y, \tau) dy dx d\tau + \\ + \int_{O(0,R)} dx \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x) \int_0^t \int_{O(0,2R)} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \rho_1(y, \tau) dy d\tau dx = \\ = \int_0^t \int_{O(0,2R)} \rho_1(y, \tau) \int_{O(0,3R)} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2} \Delta_x \phi(x) + \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x) \right] dx dy d\tau, \quad (8.92)$$

где последнее равенство имеет место, поскольку $\text{supp } \phi(x) \subset O(0, R) \subset O(0, 3R)$. Отдельно рассмотрим интеграл

$$K := \int_{O(0,3R)} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2} \Delta_x \phi(x) + \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x) \right] dx dy d\tau, \quad (8.93)$$

при $y \in O(0, 2R)$. В силу оценок (3.13) справедливо предельное равенство

$$K = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} K^\varepsilon, \quad (8.94)$$

где

$$K^\varepsilon := \int_{O(0,3R) \setminus O(y,\varepsilon)} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2} \Delta_x \phi(x) + \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x) \right] dx dy d\tau, \quad (8.95)$$

при $\varepsilon \in (0, R/2)$ и для любого $y \in O(0, 2R)$. Теперь мы проведем интегрирование по частям в выражении (8.95) и получим равенство

$$K^\varepsilon = K_1^\varepsilon + K_2^\varepsilon + K_3^\varepsilon, \quad (8.96)$$

где

$$K_1^\varepsilon = \int_{\partial O(0,3R) \cup \partial O(y,\varepsilon)} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2} \frac{\partial \phi(x)}{\partial n_x} + \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j} \cos(n_x, e_j) \right] dS_x, \quad (8.97)$$

$$K_2^\varepsilon = - \int_{\partial O(0,3R) \cup \partial O(y,\varepsilon)} \left[\frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2 \partial n_x} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial x_j} \cos(n_x, e_j) \right] \phi(x) dS_x, \quad (8.98)$$

$$K_3^\varepsilon = \int_{O(0,3R) \setminus O(y,\varepsilon)} \phi(x) \mathfrak{M}_{x,t}[\mathcal{E}](x-y, t-\tau) dx = 0, \quad (8.99)$$

поскольку согласно определению фундаментального решения $\mathcal{E}(x-y, t-\tau)$ имеет место равенство

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\mathcal{E}](x-y, t) = 0 \quad \text{для всех } (x, t) \in (O(0, 3R) \setminus O(y, \varepsilon)) \times [0, T].$$

Кроме того,

$$\int_{\partial O(0,3R)} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2} \frac{\partial \phi(x)}{\partial n_x} + \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j} \cos(n_x, e_j) \right] dS_x = 0, \quad (8.100)$$

поскольку $\text{supp } \phi(x) \subset O(0, R)$. Далее,

$$\int_{\partial O(y,\varepsilon)} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2} \frac{\partial \phi(x)}{\partial n_x} + \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j} \cos(n_x, e_j) \right] dS_x \rightarrow 0 \quad (8.101)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$ для каждого фиксированного $y \in O(0, 2R)$, поскольку $\phi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(O(0, 3R))$ и справедливы оценки (3.13) фундаментального решения $\mathcal{E}(x, t)$, а площадь сферы $\partial O(y, \varepsilon)$ равна $2\pi\varepsilon^2$. Следовательно, имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} K_1^\varepsilon = 0. \quad (8.102)$$

Наконец, поскольку $\phi(x) = 0$ на $\partial O(0, 3R)$, то от выражения для K_2^ε остается только следующий интеграл:

$$K_2^\varepsilon = - \int_{\partial O(y,\varepsilon)} \left[\frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2 \partial n_x} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial x_j} \cos(n_x, e_j) \right] \phi(x) dS_x, \quad (8.103)$$

который перепишем в виде

$$\begin{aligned} K_2^\varepsilon &= -\phi(y) \int_{\partial O(y,\varepsilon)} \left[\frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2 \partial n_x} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial x_j} \cos(n_x, e_j) \right] dS_x + \\ &+ \int_{\partial O(y,\varepsilon)} \left[\frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2 \partial n_x} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial x_j} \cos(n_x, e_j) \right] [\phi(y) - \phi(x)] dS_x = \\ &:= K_{21}^\varepsilon + K_{22}^\varepsilon. \end{aligned} \quad (8.104)$$

Заметим, что

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq a(y, \varepsilon) |x - y| \quad \text{для всех } x \in O(y, \varepsilon),$$

и поэтому в силу оценок (3.13) фундаментального решения $\mathcal{E}(x, t)$ приходим к предельному свойству

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} K_{22}^\varepsilon = 0. \quad (8.105)$$

Осталось заметить, что

$$\int_{\partial O(y,\varepsilon)} \left[\frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2 \partial n_x} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial x_j} \cos(n_x, e_j) \right] dS_x = 0 \quad (8.106)$$

силу полученного ранее равенства (5.18) леммы 5.2. Таким образом, из (8.104)–(8.106) вытекает предельное свойство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} K_2^\varepsilon = 0. \quad (8.107)$$

Следовательно, из (8.96), (8.102) и (8.107) выводим, что $K = 0$. Поэтому из (8.92) и (8.93) следует, что $J_{11} + J_{21} = 0$. Отсюда и из (8.85)–(8.92) получаем, что

$$\left\langle \Delta_x U^2(x, t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 U_{x_j x_j}^1(x, t), \phi(x) \right\rangle = 0 \quad (8.108)$$

для любой $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Отсюда и из (8.84) с учетом (8.82) вытекает утверждение леммы. $\square$

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Лемма 8.5. Пусть $\mu_1(x), \sigma_1(x) \in \mathbb{C}_b((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3)$ при $\beta > 3/2$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\langle \mathfrak{M}_{x,t}[V^1](x, t), \phi(x) \rangle = 0, \quad \langle \mathfrak{M}_{x,t}[W^1](x, t), \phi(x) \rangle = 0 \quad \text{при } t \in [0, +\infty) \quad (8.109)$$

и для всех $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, а оператор $\mathfrak{M}_{x,t}$ определен равенством (8.80).

Лемма 8.6. Пусть $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3)$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$W^1[\Delta u_0](x, 0) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|x-y|} \Delta u_0(y) dy = u_0(x), \quad (8.110)$$

$$\frac{\partial V^1[\Delta u_1]}{\partial t}(x, 0) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|x-y|} \Delta u_1(y) dy = u_1(x) \quad (8.111)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^3$. Кроме того, для всех $\mu_1(x), \sigma_1(x) \in \mathbb{C}_b((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3)$ при $\beta > 3/2$ справедливы следующие равенства:

$$V^1[\mu_1](x, 0) = 0, \quad \frac{\partial W^1[\sigma_1]}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^3. \quad (8.112)$$

Доказательство. Равенства (8.110) и (8.111) доказаны в [10]. Равенства (8.112) являются следствиями свойств фундаментального решения (3.16). $\square$

Введем обозначение

$$L(x, t) := U^1[\rho_1](x, t) + V^1[\Delta u_1](x, t) + W^1[\Delta u_0](x, t). \quad (8.113)$$

Из теоремы 8.4 и лемм 8.4–8.6 вытекает следующее утверждение.

Теорема 8.5. Пусть $\rho_1(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3))$, $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^{\beta_1}; \mathbb{R}^3)$ и $u_1(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^{\beta_2}; \mathbb{R}^3)$ при $\beta > 3/2$, $\beta_1 > 3/2$ и $\beta_2 > 3/2$. Тогда

$$L(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3)), \quad (8.114)$$

справедливо равенство

$$\langle \mathfrak{M}_{x,t}[L](x, t), \phi(x) \rangle = \langle \rho_1(x, t), \phi(x) \rangle \quad \text{для всех } t \in [0, T] \quad (8.115)$$

и для любых $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, а оператор $\mathfrak{M}_{x,t}$ определен равенством

$$\mathfrak{M}_{x,t}[w](x, t) := \Delta_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 w_{x_j x_j}(x, t), \quad (8.116)$$

в котором производные по координатам понимаются в смысле обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Кроме того, выполнены следующие начальные условия:

$$L(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial L}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^3. \quad (8.117)$$

9. ЗАДАЧА КОШИ (7.1), (7.2): СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ
И ОТСУТСТВИЕ ЛОКАЛЬНЫХ И ГЛОБАЛЬНЫХ ВО ВРЕМЕНИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим следующее вспомогательное интегральное уравнение:

$$u(x, t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) |\nabla u(y, \tau)|^q dy d\tau + \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \Delta u_0(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \Delta u_1(y) dy. \quad (9.1)$$

Перейдем в этом интегральном уравнении к новой функции

$$v(x, t) = (1 + |x|^2)^{1/2} u(x, t) \quad (9.2)$$

и учтем следующее равенство в классе дифференцируемых функций:

$$|\nabla u(x, t)|^q = \left| \nabla \frac{v(x, t)}{(1 + |x|^2)^{1/2}} \right|^q = \left| \frac{1}{(1 + |x|^2)^{1/2}} \nabla v(x, t) - \frac{x}{(1 + |x|^2)^{3/2}} v(x, t) \right|^q = \\ = \frac{1}{(1 + |x|^2)^q} \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \nabla v(x, t) - \frac{x}{(1 + |x|^2)^{1/2}} v(x, t) \right|^q. \quad (9.3)$$

После подстановки выражений (9.2) и (9.3) в интегральное уравнение (9.1) получим следующее интегральное уравнение относительно новой функции $v(x, t)$:

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_\gamma(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_\alpha(x, y, t)}{\partial t} \mu_\alpha(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} G_\beta(x, y, t) \sigma_\beta(y) dy, \quad (9.4)$$

где

$$G_\gamma(x, y, t) := \frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^\gamma} \mathcal{E}(x - y, t), \quad (9.5)$$

$$\rho(x, t) := - \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \nabla v(x, t) - \frac{x}{(1 + |x|^2)^{1/2}} v(x, t) \right|^q, \quad (9.6)$$

$$\mu_\alpha(x) := (1 + |x|^2)^\alpha \Delta u_0(x), \quad \sigma_\beta(x) := (1 + |x|^2)^\beta \Delta u_1(x). \quad (9.7)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 9.1. Пусть $q > 1$ и $v(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$. Тогда функция $\rho(x, t)$ принадлежит классу $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$ и справедлива следующая оценка:

$$\sup_{t \in [0, T]} |\rho^1(x, t) - \rho^2(x, t)|_0 \leq q \max \left\{ \|v_1\|_{0, T}^{q-1}, \|v_2\|_{0, T}^{q-1} \right\} \|v_1 - v_2\|_{0, T}, \quad (9.8)$$

$$\rho^k(x, t) := \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \nabla v_k(x, t) - \frac{x}{(1 + |x|^2)^{1/2}} v_k(x, t) \right|^q, \quad k = 1, 2, \quad (9.9)$$

$$\|v\|_{0, T} := \sup_{t \in [0, T]} \|v(x, t)\|_1. \quad (9.10)$$

Доказательство. Прежде всего докажем, что в условиях леммы $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$. С одной стороны, справедлива цепочка неравенств

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(x, t)| \leq c_1(q) \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} \left[(1 + |x|^2)^q |\nabla v(x, t)|^q + |v(x, t)|^q \right] = A(q, T) < +\infty. \quad (9.11)$$

Пусть $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]$. Тогда справедливо поточечное неравенство

$$\begin{aligned} & |\rho(x_1, t_1) - \rho(x_2, t_2)| \leq \\ & \leq q \max \{J_1^{q-1}, J_2^{q-1}\} \left[\left| (1 + |x_1|^2)^{1/2} \nabla v(x_1, t_1) - (1 + |x_2|^2)^{1/2} \nabla v(x_2, t_2) \right| + |v(x_1, t_1) - v(x_2, t_2)| \right], \end{aligned} \quad (9.12)$$

где

$$J_k := \left| (1 + |x_k|^2)^{1/2} \nabla v(x_k, t_k) - \frac{x_k}{(1 + |x_k|^2)^{1/2}} v(x_k, t_k) \right|, \quad k = 1, 2. \quad (9.13)$$

Поскольку $v(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$, то при $|(x_1, t_1) - (x_2, t_2)| \rightarrow +0$ правая часть (9.12) стремится к нулю. В сочетании с (9.11) это приводит к выводу о том, что $\rho(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$.

Теперь положим в неравенстве (9.12) $x_1 = x_2 = x$ и возьмем supremum по $x \in \mathbb{R}^3$. В результате получим следующее неравенство:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} |\rho(x, t_1) - \rho(x, t_2)| \leq q A^{(q-1)/q}(q, T) \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |v(x, t_1) - v(x, t_2)| \rightarrow +0 \quad (9.14)$$

при $|t_1 - t_2| \rightarrow +0$. Таким образом, $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$. Неравенство (9.8) вытекает из оценки вида (9.12). $\square$

Перепишем интегральное уравнение (9.4) в следующем операторном виде:

$$v(x, t) = Q(v)(x, t) = h_0(x, t) + H(v)(x, t), \quad (9.15)$$

где

$$H(v)(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_q(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad (9.16)$$

$$h_0(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_\alpha(x, y, t)}{\partial t} \mu_\alpha(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} G_\beta(x, y, t) \sigma_\beta(y) dy. \quad (9.17)$$

Отметим, что из теорем 8.1, 8.3 и леммы 9.1 при условиях $q > 3/2$, $\alpha > 3/2$ и $\beta > 3/2$ вытекает, что

$$H(\cdot) : \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)) \rightarrow \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)), \quad (9.18)$$

$$h_0(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)). \quad (9.19)$$

Следовательно,

$$Q(\cdot) : \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)) \rightarrow \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)). \quad (9.20)$$

Рассмотрим в банаховом пространстве $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$ относительно нормы $\|\cdot\|_{0,T}$ замкнутый шар

$$D_{R,T} := \left\{ v(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)) : \|v(x, t)\|_{0,T} \leq R \right\}, \quad R > 0. \quad (9.21)$$

Пусть $R > 0$ настолько велико, что справедливо неравенство

$$\|h_0(x, t)\|_{0,T} \leq \frac{R}{2}. \quad (9.22)$$

С учетом оценок (3.29) и (3.30) при $k = 0$ и оценки (9.8) леммы 9.1 справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|H(v)(x, t)\|_{0,T} & \leq B_1(q, T) T \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]} |\rho(x, t)|_0 \leq \\ & \leq q B_1(q, T) T \|v(x, t)\|_{0,T}^q \leq q B_1(q, T) T R^q \leq \frac{R}{2} \end{aligned} \quad (9.23)$$

при условии, что $T > 0$ настолько мало, что

$$B_1(q, T) T R^{q-1} \leq \frac{1}{2}. \quad (9.24)$$

Таким образом, из (9.22) и (9.23) вытекает, что при достаточно малом $T > 0$ оператор

$$Q(\cdot) : D_{R,T} \rightarrow D_{R,T}. \quad (9.25)$$

Осталось воспользоваться оценкой (9.8) и получить следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \|Q(v_1) - Q(v_2)\|_{0,T} &\leq qTB_1(q, T) \max \left\{ \|v_1\|_{0,T}^{q-1}, \|v_2\|_{0,T}^{q-1} \right\} \|v_1 - v_2\|_{0,T} \leq \\ &\leq qTB_1(q, T)R^{q-1} \|v_1 - v_2\|_{0,T} \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_{0,T} \end{aligned} \quad (9.26)$$

при выполнении условия (9.24) малости $T > 0$. В силу принципа сжимающих отображений в шаре $D_{R,T}$ существует единственное решение интегрального уравнения (9.4). Далее нужно воспользоваться методом продолжения решения интегральных уравнений в классе $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B})$, где $\mathbb{B}$ — банахово пространство (см. [12]).

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 9.2. Пусть $q > 3/2$ и $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\alpha; \mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3)$ при условиях $\alpha > 3/2$, $\beta > 3/2$. Тогда найдется такое $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для каждого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение $v(x, t)$ интегрального уравнения (9.4) в классе $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае выполнено следующее предельное свойство:

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|v\|_{0,T} = +\infty. \quad (9.27)$$

Из этой леммы вытекает следующее утверждение относительно разрешимости интегрального уравнения (9.1).

Лемма 9.3. Пусть $q > 3/2$ и $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\alpha; \mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3)$ при условиях $\alpha > 3/2$, $\beta > 3/2$. Тогда найдется такое $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для каждого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение $u(x, t)$ интегрального уравнения (9.4) в классе $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае выполнено следующее предельное свойство:

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|(1 + |x|^2)^{1/2} u(x, t)\|_{0,T} = +\infty. \quad (9.28)$$

Кроме того, из лемм 9.1 и 9.2 получаем, что при $q > 3/2$

$$\rho_1(x, t) = -|\nabla u(x, t)|^q \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b((1 + |x|^2)^q; \mathbb{R}^3)) \quad (9.29)$$

для каждого $T \in (0, T_0)$, где время $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$ определено в лемме 9.2. Из теоремы 8.5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 9.1. Пусть $q > 3/2$ и

$$u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\alpha; \mathbb{R}^3), \quad u_1(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3)$$

при $\alpha > 3/2$ и $\beta > 3/2$. Тогда существует единственное слабое локальное во времени решение $u(x, t)$ задачи Коши (7.1), (7.2) в смысле определения 7.1 в классе $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3))$, которое для каждого $T \in (0, T_0)$ принадлежит классу

$$u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3))$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^3, \quad (9.30)$$

а момент времени $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$ определен в лемме 9.3.

Доказательство. Шаг 1. Существование. Заметим, что интегральное уравнение (9.4) можно записать в следующем виде:

$$u(x, t) = L(x, t), \quad (9.31)$$

где функция $L(x, t)$ определена равенством (8.113), в котором функция $\rho_1(x, t)$ определена равенством (9.29). Выполнены все условия теоремы 8.5. Осталось заметить, что тогда для каждого $t \in [0, T]$ справедливо равенство (8.115). В частности, в качестве пробной функции $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ можно взять произвольную функцию $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$, и мы получим равенство

$$\langle \mathfrak{M}_{x,t}[u](x, t), \phi(x, t) \rangle = - \langle |\nabla u(x, t)|^q, \phi(x, t) \rangle \quad \text{для всех } t \in [0, T], \quad (9.32)$$

где оператор $\mathfrak{M}_{x,t}$ определен равенством (8.116) и производные по координатам понимаются в смысле обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Поскольку, как мы уже доказали, $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3))$, левую часть равенства (9.32) можно преобразовать к виду

$$\langle \mathfrak{M}_{x,t}[u](x, t), \phi(x, t) \rangle = - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \nabla \phi(x, t) \right) dx - \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 u_{x_j}(x, t) \phi_{x_j}(x, t) dx. \quad (9.33)$$

Из равенств (9.32) и (9.33) вытекает равенство

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \nabla \phi(x, t) \right) dx + \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 u_{x_j}(x, t) \phi_{x_j}(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x, t)|^q \phi(x, t) dx, \quad (9.34)$$

справедливое для любой пробной функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$. В рассматриваемом классе гладкости мы можем проинтегрировать обе части равенства (9.34) по $t \in (0, T)$ для каждого $T \in (0, T_0)$; после интегрирования по частям получим равенство (7.7) из определения 7.1 локального во времени слабого решения задачи Коши (7.1), (7.2).

Шаг 2. Единственность. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) = & - \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) |\nabla \tilde{u}(y, \tau)|^q dy d\tau + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \Delta u_0(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \Delta u_1(y) dy. \end{aligned} \quad (9.35)$$

В силу леммы 9.3 это интегральное уравнение имеет единственное решение в классе функций $\tilde{u}(x, t)$, которые обращаются в нуль при $t < 0$ и принадлежат классу $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3))$ при $t \in [0, T]$. Напомним, что $\mathcal{E}(x, t) = 0$ при $t < 0$. Осталось воспользоваться теоремой 7.1, из которой вытекает, что всякое локальное во времени слабое решение $u(x, t)$ задачи Коши (7.1), (7.2) является решением интегрального уравнения (9.35), в котором $\tilde{u}(x, t) = 0$ при $t < 0$. $\square$

Теперь задача заключается в том, чтобы доказать отсутствие локальных во времени слабых решений задачи Коши (7.1), (7.2) в смысле определения 7.1 при $q \in (1, 3/2]$. Прежде всего заметим, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 9.4. Пусть $u(x, t)$ — слабое локальное во времени решение задачи Коши (7.1), (7.2) в смысле определения 7.1. Тогда равенство (7.7) справедливо для любой функции $\phi(x, t) = \phi_1(x)\phi_2(t)$, где $\phi_1(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ и $\phi_2(t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$.

Доказательство основано на плотности вложения

$$\mathcal{D}(-\infty, T) \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{C}_0^{(2)}[0, T],$$

которое доказано в приложении, а также на определении пространства $W_{q,\text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$ и очевидном вложении $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{D}(-\infty, T) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$. $\square$

Определение 9.1. Будем говорить, что пара функций $u_0(x)$, $u_1(x) \in W_q^1(\mathbb{R}^3)$ принадлежит классу начальных функций M^1 (обозначение $(u_0, u_1) \in M^1$), если найдется такой шар $O(x_0, R_0) \subset \mathbb{R}^3$ положительного радиуса, что

$$(\Delta u_0(x))^2 + (\Delta u_1(x))^2 > 0$$

на множестве из $O(x_0, R_0)$ положительной меры Лебега.

Теорема 9.2. Пусть $1 < q \leq 3/2$. Тогда в классе начальных функций $(u_0, u_1) \in M^1$ локальное во времени слабое решение задачи Коши (7.1), (7.2) в смысле определения 7.1 отсутствует для любого $T > 0$.

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — локальное во времени слабое решение задачи Коши (7.1), (7.2) в смысле определения 7.1 для некоторого $T = T_1 > 0$. С учетом леммы 9.4 в качестве пробной функции $\phi(x, t) = \phi_1(x)\phi_2(t)$ в равенстве (7.7) возьмем произведение

$$\phi(x, t) = \phi_1(x)\phi_2(t), \quad (9.36)$$

где

$$\phi_1(x) = \phi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \quad \phi_0(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq s \leq 1, \\ 0, & \text{если } s \geq 2, \end{cases} \quad (9.37)$$

причем функция $\phi_0(s) \in \mathbb{C}_0^\infty[0, +\infty)$ монотонно невозрастающая, а функция $\phi_2(t)$ имеет следующий явный вид:

$$\phi_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda \in \mathbb{C}_0^{(2)}[0, T] \quad \lambda > 2q', \quad q' = \frac{q}{q-1}. \quad (9.38)$$

Справедливы следующие оценки:

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla u(x, t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right) dx dt \right| \leq I^{1/q} c_1(R, T), \quad (9.39)$$

$$\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_j}(x, t) \phi_{x_j}(x, t) dx dt \right| \leq \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 c_{2j}(R, T) I^{1/q}, \quad (9.40)$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) dx \right| \leq c_3(R) \|\nabla u_1\|_q, \quad (9.41)$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) dx \right| \leq \frac{\lambda}{T} c_3(R) \|\nabla u_0\|_q, \quad (9.42)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} c_1(R, T) &:= \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \nabla \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x, t)} dx dt \right)^{1/q'} = c_{11}(T) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\nabla \phi_1(x)|^{q'}}{\phi_1^{q'/q}(x)} dx \right)^{1/q'} = \\ &= c_{11}(T) c_{10} R^{(3-q')/q'}, \end{aligned} \quad (9.43)$$

$$\begin{aligned} c_{2j}(R, T) &:= \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\phi_{x_j}(x, t)|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x, t)} dx dt \right)^{1/q'} \leq \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\nabla \phi(x, t)|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x, t)} dx dt \right)^{1/q'} = \\ &= c_{20}(T) R^{(3-q')/q'}, \end{aligned} \quad (9.44)$$

$$c_3(R) := \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_1(x)|^{q'} dx \right)^{1/q'} = c_{30} R^{(3-q')/q'}, \quad (9.45)$$

$$I := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi(x, t) |\nabla u(x, t)|^q dx dt. \quad (9.46)$$

Воспользуемся оценками (9.39)–(9.45); с учетом обозначения (9.46) из равенства (7.7) получим неравенство

$$R^{(3-q')/q'} (c_{11}(T)c_{10} + 3\omega^2 c_{20}(T)) I^{1/q} + R^{(3-q')/q'} \left(c_{30} \|\nabla u_1\|_q + c_{30} \frac{\lambda}{T} \|\nabla u_0\|_q \right) \geq I, \quad \omega^2 := \max \{\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2\}. \quad (9.47)$$

Используя арифметическое неравенство Гельдера

$$a^{1/q'} b^{1/q} \leq \frac{a}{q'} + \frac{b}{q}, \quad a, b \geq 0, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

из неравенства (9.47) получим

$$R^{3-q'} (c_{11}(T)c_{10} + 3\omega^2 c_{20}(T))^{q'} + q' R^{(3-q')/q'} \left(c_{30} \|\nabla u_1\|_q + c_{30} \frac{\lambda}{T} \|\nabla u_0\|_q \right) \geq I. \quad (9.48)$$

Рассмотрим случай, когда $1 < q$ и $q' \leq 3$. В этом случае

$$1 < q \leq \frac{3}{2}. \quad (9.49)$$

Теперь нужно отдельно рассмотреть случай $1 < q < 3/2$ и критический случай $q = 3/2$. В целом рассуждения повторяют соответствующие рассуждения из [10]. В частности, используя классическую теорему Бенно Леви, в случае $1 < q < 3/2$ в пределе при $R \rightarrow +\infty$ из неравенства (9.48) получим равенство

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda |\nabla u(x, t)|^q dx dt = 0. \quad (9.50)$$

Это же равенство получается чуть сложнее и в критическом случае $q = 3/2$. Из (9.50) вытекает, что

$$u(x, t) = F(t) \quad \text{для почти всех } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]. \quad (9.51)$$

Из (7.7) и (9.51) получим равенство

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) \right] dx = 0 \quad (9.52)$$

для произвольной функции $\phi(x, t) = \phi_1(x)\phi_2(t)$, где $\phi_2(t)$ определена равенством (9.38), а $\phi_1(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Поскольку $(u_0, u_1) \in M^1$, то из равенства (9.52) получим

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\lambda}{T} \Delta u_0(x) + \Delta u_1(x) \right] \phi_1(x) dx = 0 \quad (9.53)$$

для любой функции $\phi_1(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ с носителем $\text{supp } \phi_1(x) \subset O(x_0, R_0)$. В силу основной леммы вариационного исчисления приходим к равенству

$$\frac{\lambda}{T} \Delta u_0(x) + \Delta u_1(x) = 0 \quad \text{для почти всех } x \in O(x_0, R_0). \quad (9.54)$$

Отметим, что если $u(x, t)$ — слабое решение задачи Коши для некоторого $T = T_1 > 0$, то оно же является слабым решением и для любого $T \in (0, T_1]$, но тогда равенство (9.54) должно быть выполнено и для всех $T \in (0, T_1]$. Следовательно,

$$\Delta u_0(x) = 0, \quad \Delta u_1(x) = 0 \quad \text{для почти всех } x \in O(x_0, R_0), \quad (9.55)$$

что противоречит определению класса функций M^1 . $\square$

Теперь наша задача доказать, что в некотором классе N^1 начальных функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ при $q > 3/2$ локальное во времени слабое решение задачи Коши (7.1), (7.2) в смысле определения 7.1 разрушается за конечное время $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, определенное в лемме 9.3.

Определение 9.2. Будем говорить, что начальные функции u_0 , u_1 принадлежат классу N^1 (обозначение $(u_0, u_1) \in N^1$), если найдется такая неотрицательная пробная функция $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, +\infty))$, что конечна нелинейная емкость

$$E_1(\phi) := \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \nabla \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x, t)} dx dt + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\phi_{x_j}(x, t)|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x, t)} dx dt < +\infty \quad (9.56)$$

и при этом выполнено неравенство

$$\frac{1}{q'} \left(\frac{2}{q} \right)^{q'/q} E_1(\phi) + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) \right] dx < 0. \quad (9.57)$$

Замечание 9.1. Заметим, что в [14] доказано существование такой пробной функции, что нелинейная емкость (9.56) конечна. Фиксируем эту пробную функцию $\phi(x, t)$. Пусть выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) \right] dx < 0. \quad (9.58)$$

Если вместо начальных функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$ рассмотреть функции $ru_0(x)$ и $ru_1(x)$ при $r > 0$, то при достаточно большом $r > 0$ будет выполнено неравенство (9.57). Пусть теперь выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) \right] dx > 0. \quad (9.59)$$

Если вместо начальных функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$ рассмотреть функции $ru_0(x)$ и $ru_1(x)$ при $r < 0$, то при достаточно большом $r < 0$ будет выполнено неравенство (9.57). Таким образом, определение 9.2 корректно.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 9.3. Пусть $q > 3/2$ и $(u_0, u_1) \in N^1$. Тогда существует единственное локальное во времени слабое решение задачи Коши (7.1), (7.2) в смысле определения 7.1 в классе $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1+|x|^2); \mathbb{R}^3))$ для всех $T \in (0, T_0)$ класса гладкости $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1+|x|^2); \mathbb{R}^3))$, причем $0 < T_0 < +\infty$ и слабое решение разрушается в момент времени T_0 в следующем смысле:

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|(1+|x|^2)^{1/2} u(x, t)\|_{0,T} = +\infty. \quad (9.60)$$

Доказательство. Предположим, что $T_0 = +\infty$, где T_0 определено в лемме 9.3. Тогда точно так же, как при доказательстве теоремы 9.1, можно убедиться, что для любого $T > 0$ существует единственное в классе $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1+|x|^2); \mathbb{R}^3))$ слабое глобальное во времени решение $u(x, t)$ задачи Коши (7.1), (7.2) в смысле определения 7.2 класса гладкости $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1+|x|^2); \mathbb{R}^3))$

для любого $T > 0$. Докажем, что для начальных функций $(u_0, u_1) \in N^1$ мы получим противоречивое неравенство. Действительно, используя неравенство Гельдера и трехпараметрическое неравенство Юнга

$$ab \leq \varepsilon a^q + \frac{1}{q'(\varepsilon q)^{q'/q}}, \quad a, b \geq 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad (9.61)$$

из равенства (7.8) можно получить (стандартной техникой работы [14]) следующую оценку:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q'} \frac{1}{(\varepsilon q)^{q'/q}} E_1(\phi) + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) \right] dx \geq \\ \geq (1 - 2\varepsilon) \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \phi(x, t) |\nabla u(x, t)|^q dx dt \end{aligned} \quad (9.62)$$

для любой функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, +\infty))$. Положим $\varepsilon = 1/2$ в неравенстве (9.62). Тогда получим

$$\frac{1}{q'} \left(\frac{2}{q} \right)^{q'/q} E_1(\phi) + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) \right] dx \geq 0 \quad (9.63)$$

для любой неотрицательной функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, +\infty))$. Поскольку $(u_0, u_1) \in N^1$, то найдется такая неотрицательная пробная функция $\phi(x, t)$, что будет выполнено неравенство (9.57), которое входит в противоречие с неравенством (9.63). Таким образом, доказано, что время T_0 из леммы 9.3 конечно. Но тогда выполнено неравенство (9.28). Разрушение локального во времени слабого решения задачи Коши (7.1), (7.2) в смысле определения 7.1 доказано. $\square$

10. ЗАДАЧА КОШИ (7.3), (7.4): СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ И ОТСУТСТВИЕ ЛОКАЛЬНЫХ И ГЛОБАЛЬНЫХ ВО ВРЕМЕНИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим следующее вспомогательное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\partial |\nabla u(y, \tau)|^q}{\partial \tau} dy d\tau + \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \Delta u_0(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \Delta u_1(y) dy. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Перейдя в уравнении (10.1) к новой функции (9.2), получим следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} v(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_q(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_\alpha(x, y, t)}{\partial t} \mu_\alpha(y) dy + \\ + \int_{\mathbb{R}^3} G_\beta(x, y, t) \sigma_\beta(y) dy := U(x, t) + W(x, t) + V(x, t), \end{aligned} \quad (10.2)$$

где

$$G_\gamma(x, y, t) := \frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^\gamma} \mathcal{E}(x - y, t), \quad (10.3)$$

$$\rho(x, t) := \frac{\partial}{\partial t} \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \nabla v(x, t) - \frac{x}{(1 + |x|^2)^{1/2}} v(x, t) \right|^q, \quad (10.4)$$

$$\mu_\alpha(x) := (1 + |x|^2)^\alpha \Delta u_0(x), \quad \sigma_\beta(x) := (1 + |x|^2)^\beta \Delta u_1(x). \quad (10.5)$$

Лемма 10.1. Если $q \geq 2$ и $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$, то функция $\rho(x, t)$ принадлежит классу $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$, причем для любых $v_k(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$ при $k = 1, 2$ справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{t \in [0, T]} |\rho_1(x, t) - \rho_2(x, t)|_0 \leq d(q) \max \left\{ \|v_1\|_{1,T}^{q-1}, \|v_2\|_{1,T}^{q-1} \right\} \|v_1 - v_2\|_{1,T}, \quad (10.6)$$

$$\rho_k(x, t) := \frac{\partial}{\partial t} \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \nabla v_k(x, t) - \frac{x}{(1 + |x|^2)^{1/2}} v_k(x, t) \right|^q, \quad k = 1, 2, \quad (10.7)$$

где

$$\|v\|_{1,T} := \|v\|_{0,T} + \left\| \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right\|_{0,T}, \quad \|w\|_{0,T} := \sup_{t \in [0, T]} |w(x, t)|_1. \quad (10.8)$$

Доказательство. Пусть

$$\rho(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} |z(x, t)|^q, \quad z = z(x, t) = (z_1(x, t), z_2(x, t), z_3(x, t)), \quad q \geq 2. \quad (10.9)$$

Справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial t} |z(x, t)|^q = q(z_t(x, t), |z(z, t)|^{q-2} z(x, t)), \quad (10.10)$$

$$\rho_k(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} |z_k(x, t)|^q, \quad k = 1, 2, \quad (10.11)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 - \rho_2 &= q(z_{1t}, |z_1|^{q-2} z_1) - q(z_{2t}, |z_2|^{q-2} z_2) = \\ &= q(z_{1t} - z_{2t}, |z_1|^{q-2} z_1) + q(z_{2t}, |z_1|^{q-2} z_1 - |z_2|^{q-2} z_2), \end{aligned} \quad (10.12)$$

$$\begin{aligned} |z_1|^{q-2} z_1 - |z_2|^{q-2} z_2 &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \left[|sz_1 + (1-s)z_2|^{q-2} (sz_1 + (1-s)z_2) \right] ds = \\ &= \int_0^1 |sz_1 + (1-s)z_2|^{q-2} (z_1 - z_2) ds + \\ &\quad + (q-2) \int_0^1 |sz_1 + (1-s)z_2|^{q-4} (sz_1 + (1-s)z_2, z_2 - z_1) (sz_1 + (1-s)z_2) ds, \end{aligned} \quad (10.13)$$

из которого вытекает следующая оценка:

$$\begin{aligned} ||z_1|^{q-2} z_1 - |z_2|^{q-2} z_2| &\leq (q-1) \int_0^1 |sz_1 + (1-s)z_2|^{q-2} |z_1 - z_2| ds \leq \\ &\leq (q-1) \max \{ |z_1|^{q-2}, |z_2|^{q-2} \} |z_1 - z_2|. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Из оценки (10.14) и равенства (10.12) вытекает искомая оценка

$$|\rho_1 - \rho_2| \leq q |z_1|^{q-1} |z_{1t} - z_{2t}| + q(q-1) |z_{2t}| \max \{ |z_1|^{q-2}, |z_2|^{q-2} \} |z_1 - z_2| \quad (10.15)$$

при $q \geq 2$. Сначала положим

$$z_k = (1 + |x^k|^2)^{1/2} \nabla v(x^k, t^k) - \frac{x^k}{(1 + |x^k|^2)^{1/2}} v(x^k, t^k), \quad k = 1, 2, \quad (10.16)$$

и из неравенства (10.15) получим, что в условиях леммы $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$. Теперь в неравенстве (10.15) положим

$$z_k = (1 + |x|^2)^{1/2} \nabla v_k(x, t) - \frac{x}{(1 + |x|^2)^{1/2}} v_k(x, t), \quad k = 1, 2, \quad (10.17)$$

и получим неравенство (10.6). $\square$

Относительно разрешимости интегрального уравнения (10.2) справедливо следующее утверждение.

Лемма 10.2. Пусть $q \geq 2$, $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\alpha; \mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3)$ при условиях $\alpha > 3/2$, $\beta > 3/2$. Тогда найдется такое $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для каждого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение $v(x, t)$ интегрального уравнения (10.2) в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае выполнено следующее предельное свойство:

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|v\|_{1,T} = +\infty. \quad (10.18)$$

Доказательство этой леммы в целом повторяет доказательство леммы 9.1. Заметим, только, что в рассматриваемом классе гладкости функций $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$ справедливы поточечные равенства

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_q(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy, d\tau, \quad (10.19)$$

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_q(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \mu_\alpha(y) dy, d\tau, \quad (10.20)$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_q(x, y, t - \tau)}{\partial t} \sigma_\alpha(y) dy, d\tau. \quad (10.21)$$

Осталось воспользоваться методом сжимающих отображений с учетом теоремы 8.2, леммы 10.1 и техникой работы [12] для продолжения решения решения интегрального уравнения (10.2) во времени. $\square$

Замечание 10.1. В [12] рассматривалось абстрактное интегральное уравнение вида

$$u(t) = f_0(t) + \int_0^t K(t, \tau) A(\tau, u(\tau)) d\tau, \quad (10.22)$$

для которого применялся алгоритм продолжения решений во времени в банаховом пространстве $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B})$. Для наших же целей нужно рассмотреть алгоритм продолжения решения интегрального уравнения в банаховом пространстве $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{B})$. Он заключается в следующем. Пусть мы доказали принципом сжимающих отображений существование единственного решения $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T^*]; \mathbb{B})$ при некотором $T = T^* > 0$. Тогда уравнение (10.22) при $t > T^*$ можно переписать в виде

$$u(t) = u(T^*) + f^*(t) + \int_{T^*}^t K(t, \tau) A(\tau, u(\tau)) d\tau, \quad (10.23)$$

где функция $f^*(t)$ известна:

$$f^*(t) = f_0(t) - f_0(T^*) + \int_0^{T^*} [K(t, \tau) - K(T^*, \tau)] A(\tau, u(\tau)) d\tau. \quad (10.24)$$

Из (10.22) и из (10.23) с учетом явного вида (10.24) функции $f^*(t)$ можно заметить, что

$$u(T^* - 0) = u(T^* + 0), \quad \frac{du}{dt}(T^* - 0) = \frac{du}{dt}(T^* + 0). \quad (10.25)$$

Осталось воспользоваться снова методом сжимающих отображений для интегрального уравнения (10.23) и с учетом гладкого сшивания (10.25) доказать существование решения в классе $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T^{**}]; \mathbb{B})$ при $T^{**} > T^*$. Дальнейшие рассуждения приводят нас к существованию такого максимального $T_0 = T_0(u_0) > 0$, для которого выполнена альтернатива в формулировке теоремы.

Из леммы 10.2 вытекает следующее утверждение относительно разрешимости интегрального уравнения (10.1).

Лемма 10.3. Пусть $q \geq 2$ и $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\alpha; \mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3)$ при условиях $\alpha > 3/2$, $\beta > 3/2$. Тогда найдется такое $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для каждого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение $u(x, t)$ интегрального уравнения (10.1) в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае выполнено следующее предельное свойство:

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|(1 + |x|^2)^{1/2} u(x, t)\|_{1,T} = +\infty. \quad (10.26)$$

Из лемм 10.1 и 10.2 вытекает, что

$$|\nabla u(x, t)|^q \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_b((1 + |x|^2)^q; \mathbb{R}^3)) \subset \mathbb{C}_{x,t}^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]), \quad (10.27)$$

$$\rho_1(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u(x, t)|^q \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b((1 + |x|^2)^q; \mathbb{R}^3)). \quad (10.28)$$

Теорема 10.1. Пусть $q \geq 2$, $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\alpha; \mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3)$ при $\alpha > 3/2$ и $\beta > 3/2$. Тогда существует единственное слабое локальное во времени решение $u(x, t)$ задачи Коши (7.3), (7.4) в смысле определения 7.3 в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3))$, которое для каждого $T \in (0, T_0)$ принадлежит классу $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3))$ и удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^3, \quad (10.29)$$

а момент времени $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$ определен в лемме 10.3.

Доказательство. Шаг 1. Существование локального решения слабого решения $u(x, t)$ задачи Коши (7.3), (7.4) в смысле определения 7.3 вытекает из (10.28), вида интегрального уравнения (10.1) и теоремы 8.5. Кроме того, нужно провести такие же рассуждения, как на шаге 1 доказательства теоремы 9.1.

Шаг 2. Единственность слабого решения в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3))$ вытекает из доказанного свойства (10.27), определения слабого решения 7.3, теоремы 7.2 и аналогично шагу 2 доказательства теоремы 9.1. $\square$

Лемма 10.4. Пусть $u(x, t)$ — слабое локальное во времени решение задачи Коши (7.3), (7.4) в смысле определения 7.3. Тогда равенство (7.9) справедливо для любой функции $\phi(x, t) = \phi_1(x)\phi_2(t)$, где $\phi_1(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ и $\phi_2(t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$.

Доказательство в точности повторяет доказательство леммы 9.4. $\square$

Определение 10.1. Будем говорить, что функции u_0 и u_1 принадлежат классу начальных функций M^2 (обозначение $(u_0, u_1) \in M^2$), если $u_0(x), u_1(x) \in W_q^1(\mathbb{R}^3)$, $|\nabla u_0(x)| = 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^3$ и найдется такой шар $O(x_0, R_0) \subset \mathbb{R}^3$ положительного радиуса, что $(\Delta u_1(x))^2 > 0$ на множестве из $O(x_0, R_0)$ положительной меры Лебега.

Теорема 10.2. Пусть $1 < q \leq 3/2$ и $(u_0, u_1) \in M^2$. Тогда локальное во времени слабое решение задачи Коши (7.3), (7.4) в смысле определения 7.3 отсутствует для любого $T > 0$.

Доказательство. Шаг 1. Вывод априорной оценки. Пусть $u(x, t)$ — слабое решение задачи Коши (7.3), (7.4) в смысле определения 7.3 при некотором $T = T_1 > 0$. В равенстве (7.9) в качестве пробной функции $\phi(x, t)$ возьмем функцию, определенную равенствами (9.36)–(9.38), где $\lambda > q'$. Справедливы следующие оценки:

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla u(x, t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right) dx dt \right| \leq b_1(R, T) I^{1/q}, \quad (10.30)$$

$$\left| \sum_{j=1}^3 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \omega_j^2 u_{x_j}(x, t) \phi_{x_j}(x, t) dx dt \right| \leq \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 b_{2j}(R, T) I^{1/q}, \quad (10.31)$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) dx \right| \leq \frac{\lambda}{T} b_3(R) \|\nabla u_0\|_q = \frac{\lambda}{T} b_{30} R^{(3-q')/q'} \|\nabla u_0\|_q, \quad (10.32)$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) dx \right| \leq b_3(R) \|\nabla u_1\|_q = b_{30} R^{(3-q')/q'} \|\nabla u_1\|_q, \quad (10.33)$$

$$b_1(R, T) := \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \nabla \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right|^{q'}}{\left(-\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right)^{q'/q}} dx dt \right)^{1/q'} = b_{10}(T) R^{(3-q')/q'}, \quad (10.34)$$

$$b_{2j}(R, T) := \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\phi_{x_j}(x, t)|^{q'}}{\left(-\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right)^{q'/q}} dx dt \right)^{1/q'} = b_{20j}(T) R^{(3-q')/q'}, \quad (10.35)$$

$$I := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(-\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right) |\nabla u(x, t)|^q dx dt. \quad (10.36)$$

Теперь рассмотрим случай, когда $1 < q$ и $q' \geq 3$. Это равносильно неравенствам $1 < q \leq 3/2$. Из равенства (7.9) с учетом оценок (10.30)–(10.35) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} & b_{10}(T) R^{(3-q')/q'} I^{1/q} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 b_{20j}(T) R^{(3-q')/q'} I^{1/q} + \\ & + \left(\frac{\lambda}{T} b_{30} \|\nabla u_0\|_q + \|\nabla u_1\|_q \right) R^{(3-q')/q'} + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) |\nabla u_0(x)|^q dx \geq I. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Теперь воспользуемся трехпараметрическим неравенством Юнга (9.61) при $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и получим из (10.37) следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & R^{3-q'} c_1(\varepsilon) \left(b_{10}^{q'}(T) + \left(\sum_{j=1}^3 \omega_j^2 b_{20j}(T) \right)^{q'} \right) + \left(\frac{\lambda}{T} b_{30} \|\nabla u_0\|_q + \|\nabla u_1\|_q \right) R^{(3-q')/q'} + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) |\nabla u_0(x)|^q dx \geq (1 - 2\varepsilon) I, \quad c_1(\varepsilon) := \frac{1}{q'} \frac{1}{(q\varepsilon)^{q'/q}}. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Отдельно необходимо (как и ранее) рассмотреть случай $1 < q < 3/2$ и критический случай $q = 3/2$. Например, в случае $1 < q < 3/2$ можно воспользоваться теоремой Бешпо Леви и в итоге

в пределе при $R \rightarrow +\infty$ из неравенства (10.38) получить следующую априорную оценку:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_0(x)|^q dx \geq \frac{\lambda}{T} (1 - 2\varepsilon) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda-1} |\nabla u(x, t)|^q dx dt, \quad \varepsilon \in (0, 1/2). \quad (10.39)$$

В пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ из (10.39) вытекает искомая априорная оценка:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_0(x)|^q dx \geq \frac{\lambda}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda-1} |\nabla u(x, t)|^q dx dt, \quad \lambda > q'. \quad (10.40)$$

Шаг 2. Отсутствие локальных решений. Поскольку $(u_0, u_1) \in M^2$, то из (10.40) следует, что

$$u(x, t) = F(t) \quad \text{для почти всех } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]. \quad (10.41)$$

После подстановки этого равенства в (7.9) получим равенство

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) \right] dx = 0, \quad (10.42)$$

справедливое для всех $T \in (0, T_1]$ и для всех функций $\phi(x, t) = \phi_1(x)\phi_2(t)$, определенных равенствами (9.36)–(9.38). Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 9.2. Получаем противоречие с тем фактом, что $(u_0, u_1) \in M^2$. $\square$

Теперь докажем, что при $q \geq 2$ в некотором классе начальных функций единственное слабое решение задачи Коши (7.3), (7.4) в смысле определения 7.3 разрушается за конечное время.

Определение 10.2. Будем говорить, что начальные функции u_0, u_1 принадлежат классу N^2 (обозначение $(u_0, u_1) \in N^2$), если найдется такая пробная функция $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, +\infty))$, что $\phi_t(x, t) \leq 0$ для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, +\infty)$, конечна нелинейная емкость

$$E_2(\phi) := \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \nabla \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right|^{q'}}{\left(-\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right)^{q'/q}} dx dt + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\phi_{x_j}(x, t)|^{q'}}{\left(-\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right)^{q'/q}} dx dt < +\infty \quad (10.43)$$

и при этом выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{q'} \left(\frac{2}{q} \right)^{q'/q} E_2(\phi) - \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0), \nabla u_0(x) \right) - \right. \\ \left. - (\nabla \phi(x, 0), \nabla u_1(x)) - \phi(x, 0) |\nabla u_0(x)|^q \right] dx < 0. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Замечание 10.2. Такая пробная функция $\phi(x, t)$, что конечна емкость (10.43) существует; это доказано в [14]. Фиксируем эту пробную функцию. Если вместо $u_1(x)$ рассмотреть функцию $ru_1(x)$, то за счет большой величины $|r| > 0$ при некоторой фиксированной функции $u_0(x)$ можно добиться выполнения неравенства (10.44).

Теорема 10.3. Пусть $q \geq 2$ и $(u_0, u_1) \in N^2$. Тогда существует единственное локальное во времени слабое решение задачи Коши (7.3), (7.4) в смысле определения 7.3 в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3))$ для всех $T \in (0, T_0)$ класса гладкости $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3))$, причем $0 < T_0 < +\infty$ и слабое решение разрушается в момент времени T_0 в следующем смысле:

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|(1 + |x|^2)^{1/2} u(x, t)\|_{1, T} = +\infty. \quad (10.45)$$

Доказательство повторяет доказательство теоремы 9.3 и основано на применении к слагаемым из равенства (7.10) из определения 7.4 глобального во времени слабого решения задачи Коши (7.3), (7.4). $\square$

11. ЗАДАЧА КОШИ (7.5), (7.6): СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ И ОТСУТСТВИЕ ЛОКАЛЬНЫХ И ГЛОБАЛЬНЫХ ВО ВРЕМЕНИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение

$$u(x, t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\partial^2 |\nabla u(y, \tau)|^q}{\partial \tau^2} dy d\tau + \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \Delta u_0(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \Delta u_1(y) dy. \quad (11.1)$$

Перейдя в уравнении (11.1) к новой функции (9.2), получим интегральное уравнение

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_q(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_\alpha(x, y, t)}{\partial t} \mu_\alpha(y) dy + \\ + \int_{\mathbb{R}^3} G_\beta(x, y, t) \sigma_\beta(y) dy := U(x, t) + W(x, t) + V(x, t), \quad (11.2)$$

где

$$G_\gamma(x, y, t) := \frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^\gamma} \mathcal{E}(x - y, t), \quad (11.3)$$

$$\rho(x, t) := - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \nabla v(x, t) - \frac{x}{(1 + |x|^2)^{1/2}} v(x, t) \right|^q, \quad (11.4)$$

$$\mu_\alpha(x) := (1 + |x|^2)^\alpha \Delta u_0(x), \quad \sigma_\beta(x) := (1 + |x|^2)^\beta \Delta u_1(x). \quad (11.5)$$

Лемма 11.1. Пусть $q = 2$ и $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$. Тогда функция $\rho(x, t)$ принадлежит классу $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$, причем для любых $v_k(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$ при $k = 1, 2$ справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{t \in [0, T]} |\rho_1(x, t) - \rho_2(x, t)|_0 \leq 6 \max \left\{ \|v_1\|_{2, T}, \|v_2\|_{2, T} \right\} \|v_1 - v_2\|_{2, T}, \quad (11.6)$$

$$\rho_k(x, t) := - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \nabla v_k(x, t) - \frac{x}{(1 + |x|^2)^{1/2}} v_k(x, t) \right|^2, \quad k = 1, 2, \quad (11.7)$$

где

$$\|v\|_{2, T} := \|v\|_{0, T} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{0, T} + \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right\|_{0, T}, \quad \|w\|_{0, T} := \sup_{t \in [0, T]} |w(x, t)|_1. \quad (11.8)$$

Доказательство. Справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} |z(x, t)|^2 = 2|z_t(x, t)|^2 + 2(z_{tt}(x, t), z(x, t)), \quad (11.9)$$

$$|z_{1t}|^2 - |z_{2t}|^2 \leq 2 \max \left\{ |z_{1t}|, |z_{2t}| \right\} |z_{1t} - z_{2t}|, \quad (11.10)$$

$$\left| (z_{1tt}, z_1) - (z_{2tt}, z_2) \right| \leq |z_{1tt}| |z_1 - z_2| + |z_2| |z_{1tt} - z_{2tt}|. \quad (11.11)$$

Из (11.9) с учетом (11.10) и (11.11) вытекает следующая оценка:

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} |z_1|^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} |z_2|^2 \right| \leq 6 \max \left\{ |z_1| + |z_{1t}| + |z_{1tt}|, |z_2| + |z_{2t}| + |z_{2tt}| \right\} \left[|z_1 - z_2| + |z_{1t} - z_{2t}| + |z_{1tt} - z_{2tt}| \right]. \quad (11.12)$$

Из этого неравенства вытекают все утверждения леммы. $\square$

Относительно разрешимости интегрального уравнения (11.2) справедливо следующее утверждение.

Лемма 11.2. Пусть $q = 2$. Тогда для любого $T > 0$ найдутся такие малые $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ и $R > 0$, что для любых функций $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\alpha; \mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3)$ при условиях $\alpha > 3/2$, $\beta > 3/2$, для которых справедливы неравенства

$$|u_0|_2 \leq R_1, \quad |u_1|_2 \leq R_2, \quad (11.13)$$

существует единственное решение $v(x, t)$ интегрального уравнения (11.2) в шаре

$$D_{R,T} := \left\{ v(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3)) : \|v(x, t)\|_{2,T} \leq R \right\}. \quad (11.14)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в отличие от уравнений (7.1) и (7.3), в уравнении (7.5) порядок производной по времени от нелинейности совпадает с порядком производной от функции $u(x, t)$ линейной части уравнения (7.5). Поэтому для соответствующих интегральных уравнений (9.4) и (10.2) удалось доказать леммы 9.2 и 10.2 о существовании непродолжаемых решений в соответствующих банаховых пространствах. Однако для интегрального уравнения (11.2) получить результат о существовании непродолжаемого решений нам не удалось. Связано с этим, что в классе $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,0}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^3))$ нам необходимо оценить вторую производную по времени от потенциала $U(x, t)$, которая имеет следующий явный вид:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^q} \frac{1}{4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_q(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad (11.15)$$

где плотность $\rho(x, t)$ определена равенством (11.4). Наличие «стационарного» потенциала

$$V_0(x, t) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |y|^2)^q} \frac{1}{4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy \quad (11.16)$$

не дает возможности воспользоваться стандартным алгоритмом продолжения решения во времени. С другой стороны, несложно воспользоваться леммой 11.1 и теоремами 8.1–8.3 и доказать утверждение настоящей леммы при помощи метода сжимающих отображений. $\square$

Из леммы 11.2 вытекает следующее утверждение относительно разрешимости интегрального уравнения (11.1).

Лемма 11.3. Пусть $q = 2$. Тогда для любого $T > 0$ найдутся такие малые $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ и $R > 0$, что для любых функций $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\alpha; \mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3)$ при условиях $\alpha > 3/2$, $\beta > 3/2$, для которых справедливы неравенства

$$|u_0|_2 \leq R_1, \quad |u_1|_2 \leq R_2, \quad (11.17)$$

существует единственное решение $u(x, t)$ интегрального уравнения (11.1) в шаре

$$B_{R,T} := \left\{ u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3)) : \|(1 + |x|^2)^{1/2} u(x, t)\|_{2,T} \leq R \right\}. \quad (11.18)$$

Из леммы 11.3 и равенства (9.3) вытекает, что

$$|\nabla u(x, t)|^2 \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b((1 + |x|^2)^2; \mathbb{R}^3)) \subset \mathbb{C}_{x,t}^{(0,2)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]), \quad (11.19)$$

$$\rho_1(x, t) = - \frac{\partial^2}{\partial t^2} |\nabla u(x, t)|^2 \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b((1 + |x|^2)^2; \mathbb{R}^3)). \quad (11.20)$$

Поэтому из леммы 11.3, свойств (11.19) и (11.20) и теорем 7.3 и 8.5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 11.1. Пусть $q = 2$. Тогда для любого $T > 0$ найдутся такие малые $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $R > 0$, что для любых функций $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\alpha; \mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1 + |x|^2)^\beta; \mathbb{R}^3)$, $\alpha > 3/2$, $\beta > 3/2$, для которых выполнены неравенства

$$|u_0|_2 \leq R_1, \quad |u_1|_2 \leq R_2, \quad (11.21)$$

существует единственное слабое локальное во времени решение $u(x, t)$ задачи Коши (7.5), (7.6) в смысле определения 7.5 в классе $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3)) \cap B_{R,T}$, где

$$B_{R,T} := \left\{ u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}_b^{1,1/2}((1 + |x|^2); \mathbb{R}^3)) : \|(1 + |x|^2)^{1/2} u(x, t)\|_{2,T} \leq R \right\}, \quad (11.22)$$

причем $u(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^3. \quad (11.23)$$

Лемма 11.4. Пусть $u(x, t)$ — слабое локальное во времени решение задачи Коши (7.5), (7.6) в смысле определения 7.5. Тогда равенство (7.18) справедливо для любой функции $\phi(x, t) = \phi_1(x)\phi_2(t)$, где $\phi_1(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ и $\phi_2(t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$.

Доказательство в точности повторяет доказательство леммы 9.4. $\square$

Лемма 11.5. Если $1 < q \leq 3/2$ и $u(x, t)$ — локальное во времени слабое решение задачи Коши (7.5), (7.6) в смысле определения 7.5, с начальными функциями $u_0(x)$, $u_1(x) \in W_q^1(\mathbb{R}^3)$. Тогда справедлива следующая априорная оценка:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\lambda}{T} |\nabla u_0(x)|^q + q (\nabla u_1(x), |\nabla u_0(x)|^{q-2} \nabla u_0(x)) \right] dx &\geq \\ &\geq \frac{\lambda(\lambda - 1)}{T^2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 - \frac{t}{T} \right)^{\lambda-2} |\nabla u(x, t)|^q dx dt, \quad \lambda > 2. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Доказательство. С учетом леммы 11.4 возьмем в равенстве (7.18) пробную функцию вида (9.36)–(9.38). Далее, используя неравенства Гельдера, точно так же, как при доказательстве теоремы 9.2 приходим после предельного перехода при $R \rightarrow +\infty$ к неравенству (11.24). $\square$

Теорема 11.2. Если $1 < q \leq 3/2$ и $u_0(x)$, $u_1(x) \in W_q^1(\mathbb{R}^3)$, то при условии

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u_1(x), |\nabla u_0(x)|^{q-2} \nabla u_0(x)) dx < 0 \quad (11.25)$$

глобальное во времени слабое решение $u(x, t)$ задачи Коши (7.5), (7.6) в смысле определения 7.6 отсутствует. Более того, для времени существования локального во времени слабого решения задачи Коши (7.5), (7.6) в смысле определения 7.5 справедлива следующая оценка:

$$T \leq -\frac{2 I_1}{q I_2}, \quad I_1 := \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_0(x)|^q dx, \quad I_2 := \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u_1(x), |\nabla u_0(x)|^{q-2} \nabla u_0(x)) dx. \quad (11.26)$$

Если же начальные функции $(u_0, u_1) \in M^2$, то локальные во времени слабые решения задачи Коши (7.5), (7.6) в смысле определения 7.5 отсутствуют для любого $T > 0$.

Доказательство основано на несложном анализе априорной оценки (11.24). При этом вторая часть утверждения теоремы доказывается точно так же, как соответствующая часть теоремы 9.2. $\square$

12. ПРИЛОЖЕНИЕ

Изучим вопрос о плотности вложения $\mathcal{D}(-\infty, T)$ в банахово пространство $\mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$.

Пусть $\phi(t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}[0, T] := \{\phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T] : \phi(T) = \phi'(T) = \phi''(T) = 0\}$; это пространство, очевидно, является банаховым пространством относительно стандартной нормы

$$\|\phi\| := \sup_{t \in [0, T]} |\phi(t)| + \sup_{t \in [0, T]} |\phi'(t)| + \sup_{t \in [0, T]} |\phi''(t)|. \quad (12.1)$$

Теорема 12.1. *Имеет место плотное вложение $\mathcal{D}(-\infty, T) \overset{ds}{\subset} \mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$.*

Доказательство. Продолжим произвольно фиксированную функцию $\phi(t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$ на всю прямую $\mathbb{R}^1$ следующим образом:

$$\bar{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t \geq T, \quad t \leq -T_1, \quad T_1 > 0, \end{cases} \quad (12.2)$$

и при этом $\bar{\phi}(t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^1)$. Такое продолжение существует в силу определения пространства $\mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$. Пусть $\varepsilon \in (0, T/2)$. Рассмотрим функцию

$$\bar{\phi}_\varepsilon(t) := \int_{-\infty}^{T-2\varepsilon} \omega_\varepsilon(|t-s|) \bar{\phi}(s) ds, \quad (12.3)$$

где

$$\omega_\varepsilon(|t|) := \frac{a}{\varepsilon} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - t^2}\right), & |t| \leq \varepsilon, \\ 0, & |t| > \varepsilon, \end{cases} \quad (12.4)$$

а постоянная $a > 0$ определяется из условия нормировки

$$\int_{\mathbb{R}^1} \omega_\varepsilon(|t|) dt = 1. \quad (12.5)$$

Заметим, что $\bar{\phi}_\varepsilon(t) \in \mathcal{D}(-\infty, T)$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(t) - \bar{\phi}_\varepsilon(t) &= \bar{\phi}(t) - \int_{-\infty}^{T+2\varepsilon} \omega_\varepsilon(|t-s|) \bar{\phi}(s) ds + \int_{T-2\varepsilon}^{T+2\varepsilon} \omega_\varepsilon(|t-s|) \bar{\phi}(s) ds = \\ &= \bar{\phi}(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(|t-s|) \bar{\phi}(s) ds + \int_{T-2\varepsilon}^T \omega_\varepsilon(|t-s|) \phi(s) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(|t-s|) [\bar{\phi}(t) - \bar{\phi}(s)] ds + \int_{T-2\varepsilon}^T \omega_\varepsilon(|t-s|) \phi(s) ds := I_1(\varepsilon, t) + I_2(\varepsilon, t). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Справедливы следующие оценки:

$$\sup_{t \in [0, T]} |I_1(\varepsilon, t)| \leq \sup_{t \in [0, T]} \sup_{|t-s| \leq \varepsilon} |\bar{\phi}(t) - \bar{\phi}(s)|, \quad (12.7)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} |I_2(\varepsilon, t)| \leq \sup_{s \in [T-2\varepsilon, T]} |\phi(s) - \phi(T)|. \quad (12.8)$$

Имеем $\bar{\phi}(t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^1) \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}^1)$, $\phi(t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$. Поэтому из (12.6)–(12.8) вытекает, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, что

$$\sup_{t \in [0, T]} |\phi(t) - \bar{\phi}_\varepsilon(t)| = \sup_{t \in [0, T]} |\bar{\phi}(t) - \bar{\phi}_\varepsilon(t)| < \delta. \quad (12.9)$$

Теперь заметим, что справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned}\overline{\phi}'(t) - \overline{\phi}'_\varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(|t-s|) [\overline{\phi}'(t) - \overline{\phi}'(s)] ds + \int_{T-2\varepsilon}^{T+2\varepsilon} \frac{d\omega_\varepsilon(|t-s|)}{dt} \overline{\phi}(s) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(|t-s|) [\overline{\phi}'(t) - \overline{\phi}'(s)] ds + \int_{T-2\varepsilon}^T \omega_\varepsilon(|t-s|) \phi'(s) ds + \\ &\quad + \omega_\varepsilon(|t+2\varepsilon-T|) \phi(T-2\varepsilon) := I_3(\varepsilon, t) + I_4(\varepsilon, t) + I_5(\varepsilon, t).\end{aligned}\quad (12.10)$$

Справедливы следующие оценки:

$$\sup_{t \in [0, T]} |I_3(\varepsilon, t)| \leq \sup_{t \in [0, T]} \sup_{|t-s| \leq \varepsilon} |\overline{\phi}'(t) - \overline{\phi}'(s)|, \quad (12.11)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} |I_4(\varepsilon, t)| \leq \sup_{t \in [T-2\varepsilon, T]} |\phi'(s) - \phi'(T)|, \quad (12.12)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} |I_5(\varepsilon, t)| \leq \frac{a}{\varepsilon} \sup_{t \in [0, T]} \omega\left(\frac{|t+2\varepsilon-T|}{\varepsilon}\right) 2\varepsilon^2 \sup_{\eta \in [T-2\varepsilon, T]} |\phi''(\eta)|; \quad (12.13)$$

в (12.13) мы воспользовались разложением

$$\phi(T-2\varepsilon) = \phi(T) - 2\varepsilon\phi'(T) + 2\varepsilon^2\phi''(\eta), \quad \eta \in [T-2\varepsilon, T], \quad (12.14)$$

причем $\phi(T) = \phi'(T) = \phi''(T) = 0$. Таким образом, для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, что из (12.10)–(12.14) вытекает оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} |\phi'(t) - \overline{\phi}'_\varepsilon(t)| = \sup_{t \in [0, T]} |\overline{\phi}'(t) - \overline{\phi}'_\varepsilon(t)| < \delta. \quad (12.15)$$

Справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\overline{\phi}''(t) - \overline{\phi}''_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(|t-s|) [\overline{\phi}''(t) - \overline{\phi}''(s)] ds + \int_{T-2\varepsilon}^{T+2\varepsilon} \frac{d^2\omega_\varepsilon(|t-s|)}{dt^2} \overline{\phi}(s) ds, \quad (12.16)$$

$$\begin{aligned}\int_{T-2\varepsilon}^{T+2\varepsilon} \frac{d^2\omega_\varepsilon(|t-s|)}{dt^2} \overline{\phi}(s) ds &= \int_{T-2\varepsilon}^T \frac{d^2\omega_\varepsilon(|t-s|)}{ds^2} \phi(s) ds = \\ &= -\frac{d\omega_\varepsilon(|t-s|)}{ds} \Big|_{s=T-2\varepsilon} \phi(T-2\varepsilon) + \omega_\varepsilon(|t-T+2\varepsilon|) \phi'(T-2\varepsilon) + \int_{T-2\varepsilon}^T \omega_\varepsilon(|t-2|) \phi''(s) ds.\end{aligned}\quad (12.17)$$

Из равенств (12.16) и (12.17) вытекает следующее равенство:

$$\overline{\phi}''(t) - \overline{\phi}''_\varepsilon(t) = I_6(\varepsilon, t) + I_7(\varepsilon, t) + I_8(\varepsilon, t) + I_9(\varepsilon, t), \quad (12.18)$$

где

$$I_6(\varepsilon, t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(|t-s|) [\overline{\phi}''(t) - \overline{\phi}''(s)] ds, \quad (12.19)$$

$$I_7(\varepsilon, t) := -\frac{d\omega_\varepsilon(|t-s|)}{ds} \Big|_{s=T-2\varepsilon} \phi(T-2\varepsilon), \quad (12.20)$$

$$I_8(\varepsilon, t) := \omega_\varepsilon(|t-T+2\varepsilon|) \phi'(T-2\varepsilon), \quad (12.21)$$

$$I_9(\varepsilon, t) := \int_{T-2\varepsilon}^T \omega_\varepsilon(|t-2|) \phi''(s) ds. \quad (12.22)$$

Справедливы следующие оценки:

$$\sup_{t \in [0, T]} |I_6(\varepsilon, t)| \leq \sup_{t \in [0, T]} \sup_{|t-s| \leq \varepsilon} |\overline{\phi}''(t) - \overline{\phi}''(s)|, \quad (12.23)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} |I_7(\varepsilon, t)| \leq \frac{A}{\varepsilon^2} 2\varepsilon^2 \sup_{\eta \in [T-2\varepsilon, T]} |\phi''(\eta)|, \quad (12.24)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} |I_8(\varepsilon, t)| \leq \frac{A}{\varepsilon} 2\varepsilon \sup_{\eta \in [T-2\varepsilon, T]} |\phi''(\eta)|, \quad (12.25)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} |I_9(\varepsilon, t)| \leq \sup_{\eta \in [T-2\varepsilon, T]} |\phi''(\eta)|, \quad (12.26)$$

где мы воспользовались разложением (12.14). Осталось заметить, что $\phi(t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$ и поэтому

$$\sup_{\eta \in [T-2\varepsilon, T]} |\phi''(\eta)| \rightarrow +0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (12.27)$$

Таким образом, из соотношений (12.18)–(12.27) вытекает, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, что справедливо следующее соотношение:

$$\sup_{t \in [0, T]} |\phi''(t) - \overline{\phi}_\varepsilon''(t)| = \sup_{t \in [0, T]} |\overline{\phi}''(t) - \overline{\phi}_\varepsilon''(t)| < \delta. \quad (12.28)$$

Из неравенств (12.9), (12.15) и (12.28) вытекает, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, что справедливо неравенство

$$\|\phi(t) - \overline{\phi}_\varepsilon(t)\| < 3\delta.$$

Таким образом, теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988.
2. *Габов С. А.* Новые задачи математической теории волн. — М.: Физматлит, 1998.
3. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. — М.: Наука, 1990.
4. *Галахов Е. И., Салиева О. А.* Об отсутствии неотрицательных монотонных решений для некоторых коэрцитивных неравенств в полупространстве // Совр. мат. Фундам. напр. — 2017. — 63, № 4. — С. 573–585.
5. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1964.
6. *Загребина С. А.* Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно (L, p) -радиальным оператором // Мат. заметки ЯГУ. — 2012. — 19, № 2. — С. 39–48.
7. *Капитонов Б. В.* Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Мат. сб. — 1979. — 109 (151), № 4 (8). — С. 607–628.
8. *Корпусов М. О.* Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа // Изв. РАН. Сер. мат. — 2015. — 79, № 5. — С. 103–162.
9. *Корпусов М. О.* О разрушении решений нелинейных уравнений типа уравнения Хохлова–Заболотской // Теор. мат. физ. — 2018. — 194, № 3. — С. 403–417.
10. *Корпусов М. О., Панин А. А., Шишков А. Е.* О критическом показателе «мгновенное разрушение» versus «локальная разрешимость» в задаче Коши для модельного уравнения соболевского типа // Изв. РАН. Сер. мат. — 2021. — 85, № 1. — С. 118–153.
11. *Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г.* О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1999. — 39, № 6. — С. 1006–1022.
12. *Панин А. А.* О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра // Мат. заметки. — 2015. — 97, № 6. — С. 884–903.
13. *Плетнер Ю. Д.* Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1992. — 32, № 12. — С. 1885–1899.
14. *Похожяев С. И., Митидиери Э.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2001. — 234. — С. 3–383.
15. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов // Усп. мат. наук. — 1994. — 49, № 4. — С. 47–74.

16. *Galakhov E. I.* Some nonexistence results for quasilinear elliptic problems// J. Math. Anal. Appl. — 2000. — 252, № 1. — P. 256–277.
17. *Korpusov M. O., Ovchinnikov A. V., Panin A. A.* Instantaneous blow-up versus local solvability of solutions to the Cauchy problem for the equation of a semiconductor in a magnetic field// Math. Methods Appl. Sci. — 2018. — 41, № 17. — P. 8070–8099.
18. *Zamyshlyayeva A. A., Sviridyuk G. A.* Nonclassical equations of mathematical physics. Linear Sobolev-type equations of higher order// Вестн. ЮУрГУ. Сер. мат. мех. физ. — 2016. — 8, № 4. — С. 5–16.

Корпусов Максим Олегович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: korpusov@gmail.com

Шляпугин Григорий Игоревич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: g.shlypugin@yandex.ru