Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Овчинников, О двойственности в теории гладких многообразий, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 185, 132–136

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-185-132-136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 05:09:05

О ДВОЙСТВЕННОСТИ В ТЕОРИИ ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2020 г. А. В. ОВЧИННИКОВ

Аннотация. В настоящей заметке обсуждается важное и нетривиальное утверждение анализа о «гомоморфизмах вычисления». Утверждение сформулировано как каноническая двойственность между семейством всех гладких отображений $f \in \text{Hom}(M, M')$ гладкого вещественного конечномерного многообразия M в аналогичное многообразие M' и семейством гомоморфизмов φ алгебры $C^\infty(M')$ гладких скалярных функций на M' в аналогичную алгебру $C^\infty(M)$ на M , $\varphi \in \text{Hom}(C^\infty(M'), C^\infty(M))$. Такая формулировка обладает максимальной естественной общностью и одновременно позволяет использовать ее в приложениях в стандартной канонической форме.

Ключевые слова: гладкое многообразие, гладкая функция, гомоморфизм, двойственность.

ON THE DUALITY IN THE THEORY OF SMOOTH MANIFOLDS

© 2020 А. V. OVCHINNIKOV

ABSTRACT. In this paper, we discuss an important and nontrivial theorem on evaluation homomorphisms. We state this theorem as a canonical duality between the family of all smooth mappings $f \in \text{Hom}(M, M')$ of a smooth real finite-dimensional manifold M into a similar manifold M' and the family of homomorphisms φ of the algebra $C^\infty(M')$ of smooth scalar-valued functions on M' into the analogous algebra $C^\infty(M)$ on M , $\varphi \in \text{Hom}(C^\infty(M'), C^\infty(M))$. This formulation possesses the maximum natural generality and, at the same time, allows it to be used in applications in the standard canonical form.

Keywords and phrases: smooth manifold, smooth function, homomorphism, duality.

AMS Subject Classification: 13C99, 53C15

Будем придерживаться стандартных теоретико-множественных обозначений, за одним описанным ниже важным исключением, которое позволит в двойственной формулировке полностью и явно сохранить содержащуюся в условиях симметрию.

Пусть M — гладкое многообразие, $C^\infty(M)$ — алгебра всех гладких вещественнозначных функций $a : M \rightarrow \mathbb{R}$. Будем обозначать значение функции $a \in C^\infty(M)$ в точке $t \in M$ символом ta . Операции в алгебре $C^\infty(M)$ заданы поточечно: если $a, b \in C^\infty(M)$, $t \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$m(a + b) = ta + tb, \quad m(a \cdot b) = ta \cdot tb, \quad m(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot ta.$$

Каждая точка $t \in M$ определяет на $C^\infty(M)$ вещественнозначный линейный мультипликативный функционал

$$\hat{m} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{m}a = ta,$$

называемый *функционалом вычисления* (или *функционалом подстановки*); выражение $\hat{m}a$ в левой части последнего равенства обозначает значение функционала $\hat{m}$ на элементе $a \in C^\infty(M)$, а выражение ta в правой части — значение функции $a \in C^\infty(M)$ в точке $t \in M$. Согласно

определению имеем

$$\begin{aligned}\widehat{m}(a+b) &= m(a+b) = ta + tb = \widehat{ta} + \widehat{tb}, \\ \widehat{m}(a \cdot b) &= m(a \cdot b) = ta \cdot tb = \widehat{ta} \cdot \widehat{tb}, \\ \widehat{m}(\alpha \cdot a) &= m(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot ta = \alpha \cdot \widehat{ta}.\end{aligned}$$

Очевидно, функционалы вычисления являются гомоморфизмами из алгебры $C^\infty(M)$ в $\mathbb{R}$; в дальнейшем будем использовать термин *гомоморфизм вычисления*. Принятая нотация позволяет опускать знак $\widehat{}$ в обозначении функционала $\widehat{m}$; таким образом, запись ta можно трактовать — в зависимости от контекста — либо как значение функции $a \in C^\infty(M)$ в точке $t \in M$, либо как значение функционала $\widehat{m}$ (в обозначении которого мы условились опускать символ $\widehat{}$) на элементе $a \in C^\infty(M)$.

Лемма 1. *Ядро $\ker \varphi$ нетривиального гомоморфизма алгебр $\varphi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ является максимальным идеалом в алгебре $C^\infty(M)$.*

Доказательство. Поскольку для любой функции $a \in \ker \varphi$ (для нее $\varphi a = 0$) и любой функции $b \in C^\infty(M)$ имеем

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi a \cdot \varphi b = 0,$$

закключаем, что $\ker \varphi$ является идеалом в $C^\infty(M)$. Предположим, что $\ker \varphi$ содержится в некотором идеале I : $\ker \varphi \subset I$. Рассмотрим функцию $c \in I \setminus \ker \varphi$; для нее $\varphi c \neq 0$. Для функции $b = c - \varphi c$ имеем

$$\varphi b = \varphi(c - \varphi c) = \varphi c - \varphi \varphi c = 0,$$

так что $c \in \ker \varphi \subset I$. Но тогда ненулевая постоянная функция $\varphi c = c - b$ лежит в идеале I , который, таким образом, обязан совпадать с $C^\infty(M)$, поскольку содержит обратимый элемент φa . $\square$

В частности, ядро $\ker \widehat{m} = \{a \in C^\infty(M) : \widehat{ta} = 0\}$ гомоморфизма вычисления является максимальным идеалом в алгебре $C^\infty(M)$.

Для компактных многообразий справедливо и обратное утверждение.

Лемма 2. *Если M — компактное многообразие, то любой максимальный идеал I в $C^\infty(M)$ является ядром некоторого гомоморфизма вычисления $\widehat{m}$, т.е. существует такая точка $t \in M$, что $I = \{a \in C^\infty(M) : ta = 0\}$.*

Доказательство. Предположим, что максимальный идеал I содержит такую функцию $b \in C^\infty(M)$, что $tb \neq 0$ для всех точек $t \in M$. Тогда определена функция $\frac{1}{b} \in C^\infty(M)$, принимающая в точке $t \in M$ значение $m_b^1 = (tb)^{-1}$, т.е. идеал I содержит обратимый элемент b , а потому совпадает с $C^\infty(M)$; противоречие. Таким образом, любая функция $b \in I$ обращается в нуль в некоторой точке.

Предположим далее, что существует такая точка $t \in M$, в которой обращаются в нуль все функции идеала I . Тогда получаем требуемое:

$$I = \{a \in C^\infty(M) : ta = 0\} = \ker \widehat{m}.$$

Если же предположить, что такой точки не существует, то для каждой точки $t \in M$ найдется такая функция $b_t \in C^\infty(M)$, что $tb_t \neq 0$. В силу непрерывности функция b_t^2 строго положительна в некоторой окрестности U_t точки t и неотрицательна в остальных точках. В силу компактности многообразия M из каждого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, поэтому найдется конечное число функций $b_1, \dots, b_k \in I$, удовлетворяющих условию $m(b_1^2 + \dots + b_k^2) > 0$ для любой точки $t \in M$. Следовательно, элемент $(b_1^2 + \dots + b_k^2) \in I$ обратим и потому $I = C^\infty(M)$. $\square$

Таким образом, любой точке $t \in M$ соответствует нетривиальный гомоморфизм алгебр $\widehat{m} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. возникает отображение

$$\widehat{} : M \rightarrow \text{Hom}(M, \mathbb{R}), \quad t \mapsto \widehat{m}.$$

Указанное соответствие обратимо, т.е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\varphi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ — нетривиальный гомоморфизм алгебр. Тогда существует такая точка $t \in M$, что $\varphi = \hat{t}$.

Известно несколько доказательств этого утверждения и различных его модификаций (см, например, [2, Аграчев Сачков], [3, Бухштабер Рис], [1, Аграчев Гамкрелидзе Вахрамеев], [5, Кириллов]). Для компактных многообразий доказательство вытекает из лемм 1 и 2.

Доказательство для компактных многообразий Пусть M — компактное многообразие, $\varphi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ — нетривиальный гомоморфизм алгебр $C^\infty(M)$ и $\mathbb{R}$. В силу леммы 1 ядро $\ker \varphi = \{a \in C^\infty(M) : \varphi a = 0\}$ гомоморфизма φ является максимальным идеалом в $C^\infty(M)$, который, в силу леммы 2 имеет вид $\ker \hat{t}$ для некоторой точки $t \in M$. Поскольку для любой функции $a \in C^\infty(M)$ имеем $a - \hat{t}a \in \ker \hat{t} = \ker \varphi$, заключаем, что $\varphi(a - \hat{t}a) = 0$, откуда следует, что $\varphi a = \hat{t}a$, что и требовалось. $\square$

Доказательство для некомпактных многообразий В случае некомпактных многообразий ситуация осложняется существованием неограниченных функций.

Лемма 3. На любом некомпактном гладком многообразии M существует функция $a \in C^\infty(M)$, принимающая произвольно большие значения вне некоторого компакта, т.е. для произвольного $N > 0$ найдется такой компакт $K \Subset M$, что $ta > N$ для всех точек $t \in M \setminus K$.

Доказательство. Рассмотрим разбиение единицы $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ на M : функции $e_k \in C^\infty(M)$ имеют компактные носители $\text{supp } e_k \Subset M$, которые образуют локально конечное покрытие многообразия M , и $\sum_{k=1}^{\infty} e_k = 1$. Тогда в качестве a можно взять функцию $\sum_{k=1}^{\infty} k e_k$. $\square$

Возвращаясь к доказательству теоремы 1, отметим, что и в некомпактном случае $\ker \varphi = \{a \in C^\infty(M) : \varphi a = 0\}$ гомоморфизма φ является максимальным идеалом в $C^\infty(M)$, однако лемма 2 неприменима. Рассмотрим в $C^\infty(M)$ идеал

$$I_m = \{f \in C^\infty(M) : mf = 0\}.$$

Покажем, что $\ker \varphi \subset I_m$ для некоторой точки $t \in M$; тогда в силу максимальности идеала $\ker \varphi$ можно будет заключить, что $\ker \varphi = I_m$ и $\varphi = \hat{t}$.

Предположим, что $\ker \varphi \not\subset I_m$ для любой точки $t \in M$; это означает, что для любой точки $t \in M$ найдется такая функция $b_m \in \ker \varphi$, что $tb_m \neq 0$. Изменяя при необходимости знак функции b_m , получаем, что эта функция принимает положительные значения в некоторой окрестности O_m точки t .

Выберем неограниченную функцию, существование которой установлено в лемме 3, и положим $\alpha = \varphi a$. Тогда $\varphi(a - \alpha) = 0$, т.е. $(a - \alpha) \in \ker \varphi$. Кроме того, существует такой компакт $K \Subset M$, что для всех точек $t \in M \setminus K$ имеет место неравенство $ta - \alpha > 0$. Выберем конечное покрытие компакта K окрестностями O_{m_i} : $K = \bigcup_{i=1}^n$, и рассмотрим разбиение единицы $(e_0, e_1, \dots, e_n)$, подчиненное следующему покрытию многообразия M :

$$M \setminus K, O_{m_1}, O_{m_2}, \dots, O_{m_n}.$$

Определим глобально на M функцию

$$c = e_0 \cdot (a - \alpha) + \sum_{i=1}^n e_i \cdot b_{m_i} \in \ker \varphi;$$

очевидно, $tc > 0$ для любой точки $t \in M$. Поскольку

$$1 = \varphi \left(c \cdot \frac{1}{c} \right) = \varphi c \cdot \varphi \left(\frac{1}{c} \right),$$

заключаем, что $\varphi c \neq 0$, но $c \in \ker \varphi$; противоречие. Таким образом, предположение $\ker \varphi \not\subset I_m$ неверно, т.е. найдется такая точка $t \in M$, что $\ker \varphi = I_m$ и $\varphi = \hat{t}$. $\square$

В отличие от компактных многообразий, для которых *любой* максимальный идеал в алгебре гладких функций на многообразии является ядром некоторого гомоморфизма вычисления,

для некомпактных многообразий это уже не так: для каждого некомпактного многообразия M в алгебре $C^\infty(M)$ существуют максимальные идеалы, не представимые указанным способом, например, максимальный идеал, содержащий идеал функций с компактным носителем. Таким образом, в то время как точки компактного многообразия находятся во взаимно однозначном соответствии с максимальными идеалами алгебры гладких функций, в случае многообразия некомпактного некоторым максимальным идеалам указанной алгебры никакие точки многообразия M не соответствуют; такие максимальные идеалы названы в [?, гл. 8] призраками. Тем не менее теорема 1 устанавливает, что точки любого многообразия M (компактного или некомпактного) находятся во взаимно однозначном соответствии с нетривиальными гомоморфизмами алгебр $\varphi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$.

Пусть M и M' — два гладких многообразия, $C^\infty(M)$ и $C^\infty(M')$ — алгебры гладких функций на них. Каждое гладкое отображение

$$f : M \rightarrow M'$$

индуцирует гомоморфизм алгебр

$$f^\sharp : C^\infty(M) \leftarrow C^\infty(M'),$$

по следующему правилу: каждой функции $a' \in C^\infty(M')$ ставится в соответствие функция $a = f^\sharp a' \in C^\infty(M)$, принимающая в каждой точке $t \in M$ значение $ta = t(f^\sharp a)$, равное значению функции a' в точке $t' = tf \in M'$:

$$t(f^\sharp a') = (tf)a' \quad (1)$$

Таким образом, возникает отображение

$$\sharp : \text{Hom}(M, M') \rightarrow \text{Hom}(C^\infty(M'), C^\infty(M)), \quad f \mapsto f^\sharp,$$

из множества $\text{Hom}(M, M')$ всех гладких отображений $f : M \rightarrow M'$ в множество всех гомоморфизмов алгебр $\text{Hom}(C^\infty(M'), C^\infty(M))$. При этом, очевидно,

$$\text{id}_M^\sharp = \text{id}_{C^\infty(M)};$$

действительно, согласно (1),

$$t(\text{id}_M^\sharp a') = (t \text{id}_M) a' = ta' = t(\text{id}_{C^\infty(M)} a).$$

Верно и обратное.

Теорема 2. *Произвольный гомоморфизм алгебр $\varphi \in \text{Hom}(C^\infty(M'), C^\infty(M))$ однозначно определяет такое гладкое отображение $f = \varphi^\flat \in \text{Hom}(M, M')$, что $f^\sharp = \varphi$. Таким образом, определено отображение*

$$\flat : \text{Hom}(C^\infty(M'), C^\infty(M)) \rightarrow \text{Hom}(M, M')$$

из множества $\text{Hom}(C^\infty(M'), C^\infty(M))$ всех гомоморфизмов алгебр в множество $\text{Hom}(M, M')$ всех гладких отображений $f : M \rightarrow M'$, причем

$$\text{id}_{C^\infty(M)}^\flat = \text{id}_M.$$

Доказательство. Пусть $\hat{t} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ — гомоморфизм вычисления, соответствующий точке $t \in M$: $\hat{t}a = ta$ для любой функции $a \in C^\infty(M)$. Тогда композиция $\hat{t}\varphi : C^\infty(M') \rightarrow \mathbb{R}$ — гомоморфизм алгебр. Поэтому, согласно теореме 1, однозначно определена такая точка t' , что $\hat{t}' = \hat{t}\varphi$. Обозначим отображение $t \mapsto t'$ через f ; тогда для любой функции $a' \in C^\infty(M')$ имеем

$$t(f^\sharp a') = (tf)a' = t'a' = \hat{t}'a' = \hat{t}\varphi a' = t(\varphi a'),$$

т.е. $f^\sharp = \varphi$. Отображение $f : M \rightarrow M'$ является гладким, поскольку для любой функции $a' \in C^\infty(M')$ имеем по условию $f^\sharp a' = \varphi a' \in C^\infty(M)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аграчев А. А., ГамкRELидзе Р. В., Вахрамеев С. А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения на векторных расслоениях и хронологическое исчисление// Итоги науки техн. Современ. пробл. мат. Нов. достиж. — 1989. — 35. — С. 3–107.
2. *Аграчев А. А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления. — М.: Физматлит, 2005.
3. *Бухштабер В. М., Рис Э. Г.* Кольца непрерывных функций, симметрические произведения и алгебры Фробениуса// Усп. мат. наук. — 2004. — 59, № 1 (355). — С. 125–144.
4. *Кириллов А. А.* Лекции по методу орбит. — Новосибирск: Научная книга, 2002.
5. *Неструев Дж.* Гладкие многообразия и наблюдаемые. — М: МЦНМО, 2000.

Овчинников Алексей Витальевич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва

E-mail: ovchinnikov@viniti.ru