Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Гетманова, С. В. Корнев, О некоторых применениях теории случайной степени совпадения в периодической задаче для функционально-дифференциальных включений, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 186, 21–31

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-21-31>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 09:55:11

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 186 (2020). С. 21–31
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-186-21-31

УДК 517.911.5

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНОЙ СТЕПЕНИ СОВПАДЕНИЯ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© 2020 г. Е. Н. ГЕТМАНОВА, С. В. КОРНЕВ

Аннотация. Метод случайных интегральных направляющих функций, разработанный на основе теории случайной топологической степени совпадения, применен к исследованию периодической задачи для случайных функционально-дифференциальных включений в конечномерных пространствах.

Ключевые слова: случайная интегральная направляющая функция, случайный потенциал, случайный мультиоператор, случайная степень совпадения, случайный топологический индекс.

SOME APPLICATIONS OF THE THEORY OF RANDOM DEGREE OF COINCIDENCE IN PERIODIC PROBLEMS FOR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS

© 2020 E. N. GETMANOVA, S. V. KORNEV

ABSTRACT. The method of random integral direction functions developed on the basis of the theory of a random topological degree of coincidence is applied to the study of the periodic problem for random functional differential inclusions in finite-dimensional spaces.

Keywords and phrases: random integral directing function, random potential, random multioperator, random degree of coincidence, random topological index.

AMS Subject Classification: 34F05, 34A60, 34C25

1. Введение. Одним из наиболее эффективных и геометрически наглядных способов решения задачи о существовании периодических колебаний дифференциальных уравнений является метод направляющих функций, общие принципы которого сформулировали еще в середине XX века М. А. Красносельский и А. И. Перов (см. [14, 15]). В конце XX — начале XXI веков в связи с открывшимися новыми возможностями приложений к актуальным задачам математики, механики и теории управления, возникла необходимость в существенном расширении классов рассматриваемых направляющих функций (см., например, [2, 8, 10, 12, 18, 21, 22, 26, 26, 34, 37]).

Одними из активно изучаемых в последние годы динамических систем являются системы, описываемые случайными дифференциальными включениями (см., например, [2, 3, 8–10, 12, 14, 15, 18, 18, 19, 21, 23, 26, 27, 30, 31, 34]). В настоящей работе для исследования задачи о существовании периодических колебаний случайных функционально-дифференциальных включений предлагается применить метод случайных интегральных направляющих функций.

2. Предварительные сведения. Напомним основные понятия теории многозначных отображений (см., например, [1, 2, 17, 19, 20, 23, 25]) и теории степени совпадения (см., например, [9, 31, 35, 36, 38]).

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) являются метрическими пространствами и $I = [0, T]$. Символами $P(Y)$, $C(Y)$, $K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y . Если Y — нормированное пространство, то символами $Cv(Y)$, $Kv(Y)$ обозначаются совокупности всех непустых выпуклых, соответственно, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y .

Определение 1. Мультиотображение $F: X \rightarrow P(Y)$ называется *полунепрерывным сверху* (пн. св.) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $d_X(x_0, x) < \delta$ следует, что $F(x) \subset U_\varepsilon(F(x_0))$, где символ U_ε обозначает ε -окрестность множества.

Мультиотображение $F: X \rightarrow P(Y)$ называется *полунепрерывным сверху* (пн. св.), если оно пн. св. в каждой точке $x \in X$.

Определение 2. Множество $A \subset X$ называется *стягиваемым*, если существует непрерывное отображение (гомотопия) $h: A \times [0, 1] \rightarrow A$ такое, что $h(x, 0) = x$, $h(x, 1) = x_0$ для всех $x \in A$.

Определение 3. Множество $A \subset X$ называется R_δ -множеством, если существует убывающая последовательность $\{A_n\}$ компактных стягиваемых множеств таких, что

$$A = \bigcap \{A_n : n = 1, 2, \dots\}.$$

Определение 4. Полунепрерывное сверху мультиотображение $G: X \rightarrow K(Y)$ называется $\mathcal{J}$ -отображением, или $G \in \mathcal{J}(X, Y)$, если для любого $x \in X$ множество $G(x)$ является R_δ -множеством.

Определение 5. ${}^c\mathcal{J}$ -мультиотображением называется конечная композиция полунепрерывных сверху мультиотображений с R_δ -значениями.

Определение 6. Мультиотображение $F: X \rightarrow P(Y)$ называется *компактным*, если область значений $F(X)$ относительно компактна в Y , т. е. $\overline{F(X)}$ компактно в Y .

В дальнейшем пн. св. и компактное мультиотображение $F: X \rightarrow P(Y)$ будем называть просто компактным.

Мультиотображение будем называть *мультифункцией*, если оно определено на подмножестве числовой прямой.

Пусть I — замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, снабженное мерой Лебега.

Определение 7. Мультифункция $F: I \rightarrow K(Y)$ называется *измеримой*, если для любого открытого подмножества $W \subset Y$ его прообраз

$$F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\} —$$

измеримое подмножество I .

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $l: \text{dom } l \subseteq E_1 \rightarrow E_2$ — линейный (необязательно непрерывный) оператор.

Напомним о следующих известных фактах (см., например, [31]).

Теорема 1. Пусть $p: E_1 \rightarrow E_1$ — линейный оператор проектирования такой, что $\text{Im } p = \text{Ker } l$. Тогда:

1. оператор $l_p: \text{dom } l \cap \text{Ker } p \rightarrow \text{Im } l$, заданный как

$$l_p(x) = l(x) \text{ для всех } x \in \text{dom } l \cap \text{Ker } p$$

является линейным изоморфизмом;

2. оператор $k_p: \text{Im } l \rightarrow \text{dom } l \cap \text{Ker } p$, заданный как

$$k_p = l_p^{-1},$$

удовлетворяет соотношению

$$k_p \circ l(x) = x - p(x) \text{ для всех } x \in \text{dom } l.$$

Определение 8. Линейный оператор $l: \text{dom } l \subseteq E_1 \rightarrow E_2$ называется *линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса*, если $\text{Ker } l$ и $\text{Coker } l = E_2 / \text{Im } l$ имеют конечную размерность и

$$\dim \text{Ker } l = \dim \text{Coker } l.$$

Теорема 2. Пусть $l: \text{dom } l \rightarrow E_2$ — линейный фредгольмов оператор нулевого индекса такой, что $\text{Im } l \subset E_2$ — замкнутое множество. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) существуют линейные непрерывные операторы проектирования $p: E_1 \rightarrow E_2$, $q: E_2 \rightarrow E_2$ такие, что $\text{Im } p = \text{Ker } l$ и $\text{Im } l = \text{Ker } q$;
- (2) канонический оператор проектирования $\pi: E_2 \rightarrow E_2 / \text{Im } l$, заданный как

$$\pi(y) = y + \text{Im } l,$$

является непрерывным линейным оператором;

- (3) существует непрерывный линейный изоморфизм $\phi: \text{Coker } l \rightarrow \text{Ker } l$;
- (4) уравнение $l(x) = y$, $y \in E_2$, является эквивалентным уравнению $(i - p)x = (\phi \circ \pi + k_{p,q})(y)$, где i — тождественный оператор в E_1 , а оператор $k_{p,q}: E_2 \rightarrow E_1$ задан соотношением

$$k_{p,q}(y) = k_p(y - q(y)).$$

Пусть U — открытое ограниченное подмножество E_1 .

Определение 9. Мультиотображение $F \in {}^c J(\bar{U}, E_2)$ называется *l -компактным*, если композиция

$$(\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ F: \bar{U} \rightarrow K(E_1)$$

является компактным мультиотображением.

Замечание 1 (см., например, [31]). Приведенное выше определение l -компактного мультиотображения не зависит от выбора линейных операторов проектирования $p: E_1 \rightarrow E_2$ и $q: E_1 \rightarrow E_2$, а также изоморфизма $\phi: \text{Coker } l \rightarrow \text{Ker } l$.

Приведем теперь некоторые сведения из теории случайных многозначных отображений и случайной топологической степени (см., например, [3, 18, 39]).

Пусть (Ω, Σ, μ) — полное вероятностное пространство.

Определение 10. Мультиотображение $\mathcal{F}: \Omega \times X \rightarrow C(Y)$ называется *случайным мультиоператором*, если он измерим относительно $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$, где $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ — наименьшая σ -алгебра на $\Omega \times X$, включающая все множества $A \times B$, где $A \in \Sigma$, $B \in \mathbb{B}(X)$ и $\mathbb{B}(X)$ обозначает борелевскую σ -алгебру на X . Если, кроме того, $\mathcal{F}(\omega, \cdot): X \rightarrow C(Y)$ полунепрерывно сверху для всех $\omega \in \Omega$, то $\mathcal{F}$ называется *случайным u -мультиоператором*.

Определение 11. Пусть $A \subset Y$ — замкнутое подмножество и $\mathcal{F}: \Omega \times A \rightarrow P(Y)$ — случайный мультиоператор. Случайной неподвижной точкой ξ мультиоператора $\mathcal{F}$ называется измеримая функция $\xi: \Omega \rightarrow A$ такая, что

$$\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega)) \text{ для всех } \omega \in \Omega.$$

Теорема 3 (см. [18]). Пусть Y — сепарабельное банахово пространство, $\mathcal{F}: \Omega \times Y \rightarrow C(Y)$ — случайный u -мультиоператор. Если для каждого $\omega \in \Omega$ множество

$$\text{Fix } \mathcal{F}_\omega := \{x \in Y : x \in \mathcal{F}(\omega, x)\}$$

неподвижных точек мультиоператора $\mathcal{F}_\omega = \mathcal{F}(\omega, \cdot)$ непусто и замкнуто, то $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку.

Определение 12. Мультиоператор $\mathcal{F}: \Omega \times X \rightarrow K(Y)$ называется *случайным компактным u -мультиоператором*, если он является случайным u -мультиоператором и для каждого $\omega \in \Omega$ мультиоператор $\mathcal{F}(\omega, \cdot): X \rightarrow K(Y)$ является компактным.

Пусть Y — сепарабельное банахово пространство, $U \subset Y$ — открытое ограниченное подмножество и $\mathcal{F}: \Omega \times \overline{U} \rightarrow Kv(Y)$ — случайный компактный u -мультиоператор такой, что $x \notin \mathcal{F}(\omega, x)$ для всех $x \in \partial U$ и для всех $\omega \in \Omega$, где ∂U обозначает границу множества U . Тогда для каждого $\omega \in \Omega$ топологическая степень соответствующего многозначного векторного поля $\deg(i - \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U})$ корректно определена (см., например, [2, 19, 20, 23]). Случайная топологическая степень многозначного векторного поля $i - \mathcal{F}$ на $\overline{U}$ определяется следующим образом (см. [18]):

$$D(i - \mathcal{F}, \overline{U}) := \{\deg(i - \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U}) \mid \omega \in \Omega\}.$$

Из того, что топологическая степень $\deg(i - \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U}) \neq 0$ для всех $\omega \in \Omega$ следует, что случайная топологическая степень $D(i - \mathcal{F}, \overline{U}) \neq 0$.

Теорема 4 (см. [18]). *Если случайная топологическая степень $D(i - \mathcal{F}, \overline{U}) \neq 0$, то мультиоператор $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку в U , т. е. существует измеримая функция $\xi: \Omega \rightarrow U$ такая, что $\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.*

Пусть X, Y — сепарабельные банаховы пространства, $U \subset Y$ — открытое ограниченное подмножество, $l: \text{dom } l \subseteq X \rightarrow Y$ — линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и случайный мультиоператор $\mathcal{F}: \Omega \times \overline{U} \rightarrow Cv(Y)$ удовлетворяет следующим условиям:

- (1) для каждого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ является l -компактным мультиотображением;
- (2) для каждого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ является cJ -мультиотображением;
- (3) для всех $x \in \partial U \cap \text{dom } l$ и $\omega \in \Omega$

$$lx \notin \mathcal{F}(\omega, x).$$

Тогда для каждого $\omega \in \Omega$ топологическая степень совпадения пары $(l, \mathcal{F}(\omega, \cdot))$ определяется как (см., например, [35, 38])

$$\deg(l, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U}) := \deg(\Phi(\omega, \cdot), \overline{U}),$$

где

$$\Phi(\omega, x) = p(x) + (\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ \mathcal{F}(\omega, x).$$

Случайная топологическая степень совпадения пары $(l, \mathcal{F})$ определяется следующим образом (см., например, [39]):

$$\text{Deg}(l, \mathcal{F}, \overline{U}) := \{\deg(l, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U}) \mid \omega \in \Omega\}.$$

Говорят, что случайная топологическая степень совпадения $\text{Deg}(l, \mathcal{F}, \overline{U})$ пары $(l, \mathcal{F})$ отлична от нуля, если топологическая степень совпадения $\deg(l, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U}) \neq 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Определенная таким образом случайная топологическая степень совпадения обладает всеми основными свойствами степени совпадения. В частности, справедлив следующий общий принцип (см., например, [39]).

Теорема 5. *Если случайная топологическая степень совпадения $\text{Deg}(l, \mathcal{F}, \overline{U}) \neq 0$, то существует случайная точка совпадения пары для данной пары $(l, \mathcal{F})$, т. е. измеримая функция $\xi: \Omega \rightarrow U$ такая, что $l\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.*

Примером реализации приведенного общего принципа является следующее утверждение (см., например, [39]).

Теорема 6. *Пусть случайное мультиотображение $\mathcal{F}: \Omega \times \overline{U} \rightarrow K(E_2)$ является l -компактным cJ -мультиотображением при каждом $\omega \in \Omega$ и выполнены следующие условия:*

- (1) $lx \notin \lambda \mathcal{F}(\omega, x)$ для каждого $\omega \in \Omega$, для всех $0 < \lambda < 1$, $x \in \text{dom } l \cap \partial U$;
- (2) $0 \notin \pi \mathcal{F}(\omega, x)$ для каждого $\omega \in \Omega$, для всех $x \in \text{Ker } l \cap \partial U$;
- (3) $\deg_{\text{Ker } l}(\phi \pi \mathcal{F}(\omega, \cdot)|_{\overline{\pi \text{Ker } l}}, \overline{\pi \text{Ker } l}) \neq 0$ для каждого $\omega \in \Omega$, где символ $\deg_{\text{Ker } l}$ обозначает топологическую степень cJ -мультиотображения $\phi \pi \mathcal{F}(\omega, \cdot)$, вычисляемую в конечномерном пространстве $\text{Ker } l$, а $\overline{\pi \text{Ker } l} = \overline{U} \cap \text{Ker } l$.

Тогда случайная топологическая степень совпадения $\text{Deg}(l, \mathcal{F}, U) \neq 0$, и, следовательно, существует случайная точка совпадения пары $(l, \mathcal{F})$.

3. Основной результат. Для $\tau > 0$ обозначим символом $\mathcal{C}$ пространство $C([- \tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $x: [- \tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \sup_{t \in [- \tau, 0]} \|x(t)\|$, и пусть $I = [0, T]$, $T > 0$.

Для функции $x(\cdot) \in C([- \tau, T]; \mathbb{R}^n)$ символом $x_t \in \mathcal{C}$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [- \tau, 0]$.

Будем рассматривать периодическую задачу для случайного функционально-дифференциального включения следующего вида:

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{F}(\omega, t, x_t), \quad (1)$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega, T), \quad (2)$$

для всех $\omega \in \Omega$, где мультиотображение $\mathcal{F}: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующим условиям:

($\mathcal{F}_t$) мультифункция $\mathcal{F}$ по второму аргументу T -периодична:

$$\mathcal{F}(\omega, t, \phi) = \mathcal{F}(\omega, t + T, \phi) \text{ для всех } \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \phi \in \mathcal{C}$$

(очевидно, это условие позволяет рассматривать мультиотображение $\mathcal{F}$ заданным на $I \times \mathcal{C}$);

($\mathcal{F}1$) $\mathcal{F}: \Omega \times I \times \mathcal{C} \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ является случайным u -мультиоператором;

($\mathcal{F}2$) существует отображение $c: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что $c(\omega, \cdot)$ — локально интегрируемо на $\mathbb{R}$ для каждого $\omega \in \Omega$, $c(\cdot, t)$ — измеримо п. в. $t \in I$, и

$$\|\mathcal{F}(\omega, t, \phi)\| := \sup\{|z| : z \in \mathcal{F}(\omega, t, \phi)\} \leq c(\omega, t)(1 + |\phi|).$$

Под случайным решением задачи (1), (2) понимается функция $\xi: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что

- (i) оператор $\omega \in \Omega \rightarrow \xi(\omega, \cdot) \in C([- \tau, T]; \mathbb{R}^n)$ измерим;
- (ii) для каждого $\omega \in \Omega$ абсолютно непрерывная функция $\xi(\omega, \cdot) \in C([- \tau, T]; \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет (1), (2).

Из условий ($\mathcal{F}1$), ($\mathcal{F}2$) следует, что мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}: \Omega \times C([- \tau, T], \mathbb{R}^n) \rightrightarrows P(L^2(I, \mathbb{R}^n)),$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_t) = \{f \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : f(s) \in \mathcal{F}(\omega, s, x_s)\} \text{ п. в. } s \in I$$

корректно определен. Кроме того, для каждого $\omega \in \Omega$ мультиоператор $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, \cdot)$ замкнут (см., например, [2]).

Для изучения задачи (1), (2) мы будем использовать теорию случайной топологической степени совпадения пары отображений, изложенную в предыдущем параграфе.

Обозначим C_T пространство непрерывных T -периодических функций $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$. Через $\|x\|_2$ обозначим норму функции x в пространстве L^2 ,

$$\|x\|_2 = \left(\int_0^T \|x(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 13 (см. [18]). Отображение $V: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется случайным потенциалом, если выполнены следующие условия:

- (i) $V(\cdot, x): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ является измеримым для каждого $x \in \mathbb{R}^n$;
- (ii) $V(\omega, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является C^1 -отображением для каждого $\omega \in \Omega$.

Определение 14 (см. [18]). Случайный потенциал V называется случайным невырожденным потенциалом, если найдется $R_0 > 0$ такое, что

$$\nabla V(\omega, z) = \left(\frac{\partial V(\omega, z)}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial V(\omega, z)}{\partial z_n} \right) \neq 0$$

для всех $(\omega, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^n : |z| \geq R_0$.

Из определения 14 следует, что для фиксированного $\omega \in \Omega$ топологическая степень

$$\deg(\nabla V(\omega, \cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0, R))$$

корректно определена для всех $R \geq R_0$ и совпадает с $\deg(\nabla V(\omega, \cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0, R_0))$.

Под случайным топологическим индексом $\text{ind } V$ случайного невырожденного потенциала V понимается случайная топологическая степень $\text{Deg}(\nabla V, B_{\mathbb{R}^n}(0, R_0))$.

Определение 15. Случайный потенциал $V: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *случайной строгой интегральной направляющей функцией* для включения (1), если найдется $N > 0$ такое, что для всех $\omega \in \Omega$ из $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$ с $\|x\|_2 \geq N$ следует, что

$$\int_0^T \langle \nabla V(\omega, x(s)), f(s) \rangle ds > 0 \text{ для всех } f \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_s).$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. Если $V: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является случайной строгой интегральной направляющей функцией для включения (1), то она является случайным невырожденным потенциалом, и, следовательно, существует ее случайный топологический индекс $\text{ind } V$.

Теорема 7. Пусть выполнены условия $(\mathcal{F}_t)$, $(\mathcal{F}1)$, $(\mathcal{F}2)$. Если $V: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является строгой случайной интегральной направляющей функцией для включения (1) такой, что $\text{ind } V \neq 0$, то задача (1), (2) имеет случайное решение.

Замечание 2. Отметим, что условия теоремы выполнены, если, например, для каждого $\omega \in \Omega$ функция V четна, или $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(\omega, x) = \pm\infty$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся Теоремой 6. Рассмотрим следующие операторы:

$$l: \text{dom } l := \{x \in C_T : x \text{ — абсолютно непрерывна}\} \subset C_T \rightarrow L_T^1, \\ l(x) = x'$$

и мультиоператор суперпозиции $\mathcal{G} = \mathcal{P}_{\mathcal{F}}: \Omega \times C_T \multimap P(L_T^1)$.

Легко видеть, что l — линейный фредгольмов оператор нулевого индекса, $\text{Ker } l = \mathbb{R}^n$. Проекция $\pi: L_T^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ может быть задана формулой

$$\pi f = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds.$$

Отметим, что для произвольного фиксированного $\omega \in \Omega$ решение $x_\omega \in \text{dom } l$ включения $l(x) \in \lambda \mathcal{G}(\omega, x_t)$, $\lambda \in (0, 1)$, удовлетворяет задаче

$$x'_\omega(t) = \lambda f_\omega(t) \text{ п. в. } t \in [0, T], \quad (3)$$

$$x_\omega(0) = x_\omega(T), \quad (4)$$

где $f_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_t)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \nabla V(\omega, x_\omega(s)), f_\omega(s) \rangle ds &= \frac{1}{\lambda} \int_0^T \langle \nabla V(\omega, x_\omega(s)), x'_\omega(s) \rangle ds = \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^T V'(\omega, x_\omega(s)) ds = \frac{1}{\lambda} (V(\omega, x_\omega(T)) - V(\omega, x_\omega(0))) = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\|x_\omega\|_2 < N.$$

С другой стороны, из условия $(\mathcal{F}_2)$ вытекает, что $\|x'\|_2 < M$, где $M > 0$. Но тогда найдется и $M' > 0$ такое, что

$$\|x\|_C < M'.$$

В качестве U возьмем шар $B_r \subset C_T$ радиуса $r = \max\{N, M', NT^{-1/2}\}$. Тогда имеем для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$

$$l(x) \notin \lambda \mathcal{G}(\omega, x_t)$$

для всех $x \in \partial U, \lambda \in (0, 1)$.

Пусть теперь $u \in \partial U \cap \text{Ker } l$ произвольно. Поскольку $\|u\| \geq NT^{-1/2}$, из определения случайной строгой интегральной направляющей функции получаем, что

$$\int_0^T \langle \nabla V(\omega, u), f_\omega(s) \rangle ds > 0$$

для любого измеримого сечения $f_\omega(s) \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(\omega, u)$, для всех $\omega \in \Omega$. Но для каждого $\omega \in \Omega$

$$\int_0^T \langle \nabla V(\omega, u), f_\omega(s) \rangle ds = \langle \nabla V(\omega, u), \int_0^T f_\omega(s) ds \rangle = T \langle \nabla V(\omega, u), \pi f_\omega \rangle > 0,$$

и, таким образом,

$$\langle \nabla V(\omega, u), y \rangle > 0$$

для любого $y \in \pi \mathcal{G}(\omega, u), \omega \in \Omega$.

Это значит, что $0 \notin \pi \mathcal{G}(\omega, u)$ для $u \in \partial U \cap \text{Ker } l, \omega \in \Omega$ и

$$\deg(\pi \mathcal{G}|_{\overline{U}_{\text{Ker } l}}, \overline{U}_{\text{Ker } l}) = \deg(\nabla V, \overline{U}_{\text{Ker } l}) \neq 0,$$

где $\overline{U}_{\text{Ker } l} = \overline{U} \cap \text{Ker } l$. Таким образом, все условия Теоремы 6 выполнены и задача (1), (2) имеет решение. $\square$

4. Примеры.

4.1. Случайное дифференциальное включение с запаздыванием. Рассмотрим периодическую задачу для случайного дифференциального включения с запаздыванием

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{F}(\omega, t, x(t - \tau)) \text{ п. в. } t \in [0, T], \quad (5)$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega, T), \quad (6)$$

где мультиотображение $\mathcal{F}: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{F}_t)$, $(\mathcal{F}_1)$, $(\mathcal{F}_2)$.

Теорема 8. Пусть найдутся $\overline{N} > 0$ и $C > 0$ такие, что $\langle x, y \rangle \geq C$ для всех $x, \|x\| \geq \overline{N}, \omega \in \Omega$ и $y \in \mathcal{F}(\omega, t, x)$. Если мультиотображение $\mathcal{F}$ ограничено:

$$\|\mathcal{F}(\omega, t, x)\| := \max_{y \in \mathcal{F}(\omega, t, x)} \|y\| \leq M$$

и

$$C - \tau M^2 > 0,$$

то задача (5), (6) имеет решение.

Доказательство. Покажем, что $V(\omega, x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ является случайной строгой интегральной направляющей функцией для включения (5). Зафиксируем произвольное $\omega \in \Omega$. Тогда для достаточно большого $N > 0$ условия

$$\|x'(\omega, t)\| \leq M \text{ п. в. } t \in [0, T] \text{ и } \|x\|_2 \geq N$$

будут влечь

$$\|x(\omega, t)\| \geq \overline{N} \text{ при всех } t \in [0, T]$$

для любой абсолютно непрерывной функции

$$x(\omega, \cdot) \in C_T.$$

Но тогда для такой функции $x(\omega, \cdot)$ мы имеем для произвольного сечения $f_\omega \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(\omega, x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \nabla V(\omega, x(s)), f_\omega(s) \rangle ds &= \\ &= \int_0^T \langle x(s), f_\omega(s) \rangle ds = \int_0^T \langle x(s - \tau), f_\omega(s) \rangle ds + \int_0^T \langle x(s) - x(s - \tau), f_\omega(s) \rangle ds = \\ &= \int_0^T \langle x(s - \tau), f_\omega(s) \rangle ds + \int_0^T \left\langle \int_{s-\tau}^s x'(s) ds, f_\omega(s) \right\rangle ds \geq CT - \tau M^2 T = (C - \tau M^2) T > 0. \quad \square \end{aligned}$$

4.2. *Случайное полулинейное функционально-дифференциальное включение.* Рассмотрим следующую периодическую задачу

$$x'(\omega, t) \in Ax(\omega, t) + \mathcal{F}(\omega, t, x_t), \quad (7)$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega, T). \quad (8)$$

Здесь мультиотображение $\mathcal{F}: \Omega \times \mathbb{R} \times C \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{F}_t)$, $(\mathcal{F}1)$, $(\mathcal{F}2)$, а $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор.

Теорема 9. Пусть квадратичная форма $\langle Ax, x \rangle$ удовлетворяет для некоторого $\varepsilon > 0$ условию

$$\langle Ax, x \rangle \geq \varepsilon \|x\|^2$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Если

$$\overline{\lim}_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} \frac{\|\mathcal{P}_\mathcal{F}(\omega, x)\|_2}{\|x\|_2} < \varepsilon,$$

для всех $\omega \in \Omega$, для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$, где $\mathcal{P}_\mathcal{F}$ — мультиоператор суперпозиции, порожденный $\mathcal{F}$, а

$$\|\mathcal{P}_\mathcal{F}(\omega, x)\|_2 = \sup_{f \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(\omega, x)} \|f\|_2,$$

то задача (7), (8) имеет решение.

Доказательство. Покажем, что $V(\omega, x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ является случайной строгой интегральной направляющей функцией для включения (7). Зафиксируем произвольное $\omega \in \Omega$. Тогда для произвольного $f_\omega \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(\omega, x)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \nabla V(\omega, x(s)), Ax(s) + f_\omega(s) \rangle ds &= \int_0^T \langle Ax(s), x(s) \rangle ds + \int_0^T \langle x(s), f_\omega(s) \rangle ds \geq \\ &\geq \varepsilon \|x\|_2^2 - \|x\|_2 \|\mathcal{P}_\mathcal{F}(\omega, x)\|_2 > 0 \end{aligned}$$

для достаточно больших значений $\|x\|_2$. □

4.3. *Случайное градиентное функционально-дифференциальное включение.* Рассмотрим периодическую задачу вида

$$x'(\omega, t) \in \nabla \mathcal{G}(\omega, x(t)) + \mathcal{F}(\omega, t, x_t), \quad (9)$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega, T), \quad (10)$$

где мультиотображение $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{F}_t)$, $(\mathcal{F}1)$, $(\mathcal{F}2)$, а $\nabla \mathcal{G}$ — градиент случайного потенциала $\mathcal{G}: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Теорема 10. Пусть выполнены условия:

1. найдутся константы $\varepsilon > 0$, $K > 0$ и $\beta \geq 1$ такие, что

$$\|\nabla \mathcal{G}(\omega, x)\| \geq \varepsilon \|x\|^\beta - K$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n, \omega \in \Omega$;

2. $\lim_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} \frac{\|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2}{\|x\|_2^\beta} < \varepsilon T^{(1-\beta)/2}$ для всех $\omega \in \Omega$, для любой абсолютно непрерывной функции $x(\omega, \cdot) \in C_T$;

3. градиент $\nabla \mathcal{G}$ имеет ненулевой случайный топологический индекс:

$$\text{Deg}(\nabla \mathcal{G}, \partial B_N) \neq 0$$

для достаточно больших $N > 0$.

Тогда задача (9), (10) имеет решение.

Доказательство. Покажем, что $\mathcal{G}$ является случайной строгой интегральной направляющей функцией для включения (9). Отметим, что вложение $L^{2\beta} \subset L^2$ дает для любой абсолютно непрерывной функции $x(\omega, \cdot) \in C_T$ оценку

$$\|\nabla \mathcal{G}(\omega, x(\omega, \cdot))\|_2 \geq \varepsilon \|x\|_{2\beta}^\beta - K\sqrt{T} \geq \varepsilon T^{(1-\beta)/2} \|x\|_2^\beta - K\sqrt{T}.$$

Зафиксируем произвольное $\omega \in \Omega$. Тогда для любого $f\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \nabla \mathcal{G}(\omega, x(s)), \nabla \mathcal{G}(\omega, x(s)) + f_\omega(s) \rangle ds &\geq \|\nabla \mathcal{G}(\omega, x(\omega, \cdot))\|_2 (\|\nabla \mathcal{G}(\omega, x(\omega, \cdot))\|_2 - \|f_\omega\|_2) \geq \\ &\geq \|\nabla \mathcal{G}(\omega, x(\omega, \cdot))\|_2 (\|\nabla \mathcal{G}(\omega, x(\omega, \cdot))\|_2 - \|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2) \geq \\ &\geq \|\nabla \mathcal{G}(\omega, x(\omega, \cdot))\|_2 \left(\varepsilon T^{(1-\beta)/2} - \frac{K\sqrt{T}}{\|x\|_2^\beta} - \frac{\|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2}{\|x\|_2^\beta} \right) \|x\|_2^\beta > 0 \end{aligned}$$

для достаточно больших значений $\|x\|_2$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1985. — 169. — С. 194–252.
2. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: Либликом, 2011.
3. *Гетьманова Е. Н.* О степени совпадения для некоторых классов случайных мультиотображений и линейных фредгольмовых операторов // Материалы Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения—XXX» (3–9 мая 2019 г.). — Воронеж, 2019.
4. *Корнев С. В.* Негладкие интегральные направляющие функции в задачах о вынужденных колебаниях // Автомат. телемех. — 2015. — 9. — С. 31–43.
5. *Корнев С. В.* Многолистные направляющие функции в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью // Изв. вузов. Мат. — 2016. — 11. — С. 14–26.

6. Корнев С. В. Направляющие функции на заданном множестве в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2016. — 2. — С. 107–122.
7. Корнев С. В. Метод негладких интегральных направляющих функций в задаче о существовании периодических решений включений с каузальными операторами// Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. модел. Программ. — 2016. — 9, № 2. — С. 46–59.
8. Корнев С. В., Обуховский В. В. Об интегральных направляющих функциях для функционально-дифференциальных включений// в кн.: Топологические методы нелинейного анализа. — Воронеж, 2000. — С. 87–107.
9. Корнев С. В., Обуховский В. В. О некоторых вариантах теории топологической степени для выпуклозначных мультиотображений// в кн.: Труды математического факультета ВГУ. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2004. — С. 56–74.
10. Корнев С. В., Обуховский В. В. О локализации метода направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений// Изв. вузов. Мат. — 2009. — 5. — С. 23–32.
11. Корнев С. В., Обуховский В. В. Интегральные направляющие функции и периодические решения включений с каузальными операторами// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2016. — 21, № 1. — С. 55–65.
12. Корнев С. В., Обуховский В. В., Дзекка П. Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений функционально-дифференциальных включений// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 10. — С. 1335–1344.
13. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
14. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975.
15. Красносельский М. А., Перов А. И. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Докл. АН СССР. — 1958. — 123, № 2. — С. 235–238.
16. Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П. Векторные поля на плоскости. — М.: Физматгиз, 1963.
17. Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Новосибирск: Наука, 1986.
18. Andres J., Gorniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions// Topol. Meth. Nonlin. Anal. — 2012. — 40. — P. 337–358.
19. Arutyunov A. V., Obukhovskii V. Convex and Set-Valued Analysis. Selected Topics. — Berlin–Boston: de Gruyter, 2017.
20. Deimling K. Multivalued Differential Equations. — Berlin–New York: de Gruyter, 1992.
21. Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations// Proc. Am. Math. Soc. — 1987. — 99, № 1. — P. 79–85.
22. Gliklikh Yu., Kornev S., Obukhovskii V. Guiding potentials and periodic solutions of differential equations on manifolds// Glob. Stochast. Anal. — 2019. — 6, № 1. — P. 1–7.
23. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. — Berlin: Springer-Verlag, 2006.
24. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. — Berlin–New York: de Gruyter, 2001.
25. Kisielewicz M. Differential Inclusions and Optimal Control. — Dordrecht: PWN, 1991.
26. Kornev S., Obukhovskii V. On some developments of the method of integral guiding functions// Funct. Differ. Equ. — 2005. — 12, № 3–4. — P. 303–310.
27. Kornev S. V., Liou Y. C., Loi N. V., Obukhovskii V. V. On periodic solutions of random differential inclusions// Appl. Anal. Optim. — 2017. — 1, № 2. — P. 245–258.
28. Kornev S. V., Loi N. V., Obukhovskii V. V., Wen C. F. Random nonsmooth integral guiding functions and asymptotic behavior of trajectories for random differential inclusions// J. Nonlin. Convex Anal. — 2018. — 19, № 3. — P. 493–500.
29. Kornev S., Obukhovskii V., Zecca P. Guiding functions and periodic solutions for inclusions with causal multioperators// Appl. Anal. — 2017. — 96, № 3. — P. 418–428.
30. Kornev S., Obukhovskii V., Zecca P. On multivalent guiding functions method in the periodic problem for random differential equations// J. Dynam. Differ. Equ. — 2019. — 31, № 2. — P. 1017–1028.

31. *Mawhin J. L.* Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1979.
32. *Mawhin J., Thompson H. B.* Periodic or bounded solutions of Carathéodory systems of ordinary differential equations// J. Dynam. Differ. Equ. — 2003. — 15, № 2–3. — P. 327–334.
33. *Mawhin J., Ward J. R. Jr.* Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations// Discr. Contin. Dynam. Syst. — 2002. — 8, № 1. — P. 39–54.
34. *Obukhovskii V., Zecca P., Loi N. V., Kornev S.* Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis. — Berlin: Springer-Verlag, 2013.
35. *Pruszko T.* A coincidence degree for L -compact convex-valued mappings and its application to the Picard problem for orientor fields// Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. — 1979. — 27, № 11–12. — P. 895–902.
36. *Pruszko T.* Topological degree methods in multi-valued boundary value problems// Nonlin. Anal. Theory Meth. Appl. — 1981. — 5, № 9. — P. 959–970.
37. *Rachinski D. I.* Multivalent guiding functions in forced oscillation problems// Nonlin. Anal. Theory Meth. Appl. — 1996. — 26. — P. 631–639.
38. *Tarafdar E., Teo S. K.* On the existence of solutions of the equation $Lx \in Nx$ and a coincidence degree theory// J. Austr. Math. Soc. — 1979. — A. 28, № 2. — P. 139–173.
39. *Tarafdar E., Watson P., Yuan X. Z.* Random coincidence degree theory with applications to random differential inclusions// Comment. Math. Univ. Carol. — 1996. — P. 725–748.

Гетманова Екатерина Николаевна
Воронежский государственный педагогический университет
E-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru

Корнев Сергей Викторович
Воронежский государственный педагогический университет
E-mail: kornev_vrn@rambler.ru