Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Конёнков, Первая краевая задача для уравнения Фоккера—Планка с одной пространственной переменной, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 186, 52–56

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-52-56>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 08:30:11

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 186 (2020). С. 52–56
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-186-52-56

УДК 517.95

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА—ПЛАНКА С ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

© 2020 г. А. Н. КОНЕНКОВ

Аннотация. Рассматривается уравнение Фоккера—Планка с одной пространственной переменной без младшего члена. Коэффициент диффузии полагается измеримым, ограниченным и отделенным от нуля. Доказывается существование слабого фундаментального решения уравнения Фоккера—Планка и устанавливаются некоторые его свойства. При дополнительном предположении о гольдеровости старшего коэффициента рассматривается первая краевая задача в полуграниченной области. Правая часть уравнения и начальная функция полагаются нулевыми, а граничная функция непрерывной. Устанавливается разрешимость этой задачи в классе ограниченных функций.

Ключевые слова: уравнения параболического типа, уравнение Фоккера—Планка, фундаментальное решение, первая краевая задача.

THE FIRST BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE FOKKER–PLANCK EQUATION WITH ONE SPATIAL VARIABLE

© 2020 А. N. KONENKOV

ABSTRACT. The Fokker–Planck equation with one spatial variable without the lowest term is considered. The diffusion coefficient is assumed to be measurable, bounded, and separated from zero. The existence of a weak fundamental solution of the Fokker–Planck equation is proved and some properties of this solution are established. Under the additional assumption that the leading coefficient is a Hölder function, we consider the first boundary-value problem in a semi-bounded domain. We assume that the right-hand side of the equation and the initial function are zero and the boundary function is continuous. We prove the solvability of this problem in the class of bounded functions.

Keywords and phrases: parabolic equation, Fokker–Planck equation, fundamental solution, first boundary-value problem.

AMS Subject Classification: 35A08, 35K10, 35D30

Мы рассматриваем простейшее уравнение Фоккера—Планка с одной пространственной переменной без сноса и коэффициентом диффузии, не зависящим от времени. Относительно гладкости коэффициента никаких предположений не делается. В случае, когда коэффициент обладает большей гладкостью, а именно, его вторая производная удовлетворяет условию Гельдера, существование фундаментального решения уравнения Фоккера—Планка следует из хорошо известных результатов для параболических уравнений не дивергентного вида [1, гл. 4]. Также отметим, что если вторая производная коэффициента только непрерывна, заменой можно свести уравнение

к случаю, когда старший коэффициент является постоянным [3, § 5.1]. В случае, когда коэффициент диффузии является разрывным, решения уже не будут, вообще говоря, классическими. Мы вводим понятие слабого фундаментального решения этого уравнения и доказываем его существование и единственность. Также мы получаем оценку для фундаментального решения. Кроме того, доказывается, что слабое фундаментальное решение по второй паре переменных удовлетворяет сопряженному уравнению (обратному уравнению Колмогорова—Чепмена).

Далее мы рассматриваем первую краевую задачу для уравнения Фоккера—Планка при дополнительной предположении, что старший коэффициента удовлетворяет условию Гельдера. Тогда фундаментальное решение сопряженного уравнения имеет, в частности, классическую производную первого порядка по пространственной переменной. Это дает возможность рассмотреть потенциал двойного слоя для уравнения Фоккера—Планка. Устанавливается разрешимость первой краевой задачи в классе ограниченных функций. Решение представляется в виде потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью.

Обозначим $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$. Через $C^\alpha(\mathbb{R})$, $0 < \alpha < 1$, обозначаем пространство Гельдера функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$|f|_{C^\alpha(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x, x+\Delta x \in X, \Delta x \neq 0} \frac{|f(x+\Delta x) - f(x)|}{|\Delta x|^\alpha}.$$

Мы будем рассматривать уравнение Фоккера—Планка с одной пространственной переменной

$$Lu = \partial_t u - \partial_x^2(a(x)u) = 0, \quad (1)$$

где коэффициент a является измеримой и ограниченной функцией, а оператор L удовлетворяет условию равномерной параболичности

$$(\exists \delta > 0) \quad \delta \leq a(x, t) \leq \delta^{-1} \quad \forall (x, t) \in \bar{D}. \quad (2)$$

Для области $\Omega \in \mathbb{R}^2$ через $C_0^\infty(\Omega)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^2$ с компактным носителем в Ω . Будем говорить, что функция u является слабым решением уравнения $Lu = f$ в области Ω , если для любой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо равенство

$$\iint_{\Omega} f \varphi dx dt = \iint_{\Omega} u (-\partial_t \varphi - a \partial_x^2 \varphi) dx dt.$$

Определим слабое фундаментальное решение уравнения (1) как функцию $\Gamma(x, \xi, t - \tau)$, где $a(x)\Gamma(x, \xi, t)a^{-1}(\xi)$ непрерывна при $t > 0$ по совокупности аргументов, для фиксированного $\xi \in \mathbb{R}$ $\Gamma(x, \xi, t)$ является слабым решением уравнения (1) в $\mathbb{R}_+^2$ и для любой непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ функции ψ

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x, y, t) a^{-1}(y) \psi(y) dy = a^{-1}(x) \psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Уравнение (1) заменой $v(x, t) = a(x)u(x, t)$ сводится к уравнению

$$\tilde{L}u = a^{-1}(x) \partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \quad (4)$$

которое является частным случаем параболических уравнений дивергентного вида, рассматривавшихся в [2]. Слабым решением уравнения (4) в области Ω в этой работе называется непрерывная функция u , для которой справедливо равенство

$$\iint_{\Omega} u (-a^{-1} \partial_t \varphi - \partial_x^2 \varphi) dx dt = 0$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Слабым фундаментальным решением уравнения (4) называется в [2] функция $\tilde{\Gamma}(x, \xi, t - \tau)$, непрерывная по совокупности аргументов при $t > \tau$, удовлетворяющая, для фиксированного $\xi \in \mathbb{R}$, равенству

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2} \tilde{\Gamma}(y, \xi, t) (-a^{-1}(y) \partial_t \varphi - \partial_y^2 \varphi) dy dt = 0, \quad (5)$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ (т. е. является слабым решением (4) в $\mathbb{R}_+^2$) и для любой непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ функции ψ

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x, y, t) \psi(y) dy = \psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Равенство (5) можно переписать в виде

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2} a(x) \tilde{\Gamma}(y, \xi, t) a^{-1}(y) (-\partial_t \varphi - a^{-1}(y) \partial_y^2 \varphi) dy dt = 0.$$

С учетом (3) и (6) заключаем, что если функция $\tilde{\Gamma}(x, \xi, t - \tau)$ является слабым фундаментальным решением уравнения (4), то функция

$$\Gamma(x, \xi, t - \tau) = a(x) \tilde{\Gamma}(x, \xi, t - \tau) a^{-1}(y) \quad (7)$$

будет слабым фундаментальным решением уравнения Фоккера—Планка (4) и наоборот. В [2] показано, что слабое фундаментальное решение уравнения (4) существует и единственно. Следовательно, существует и единственно слабое фундаментальное решение уравнения (4). Кроме того, в указанной работе исследовались свойства слабых фундаментальных решений. Из установленных в ней оценок вытекает

Теорема 1. Пусть для уравнения (1) выполнено условие (2). Тогда для фундаментального решения справедливы оценки

$$C_1 t^{-1/2} \exp \left\{ -c_1 \frac{(x - \xi)^2}{t} \right\} \leq \Gamma(x, \xi, t) \leq C_2 t^{-1/2} \exp \left\{ -c_2 \frac{(x - \xi)^2}{t} \right\},$$

где положительные постоянные C_1, C_2, c_1, c_2 зависят только от постоянной параболичности δ из (2).

Рассмотрим уравнение

$$L'u = \partial_t u - a(x) \partial_x^2 u = 0. \quad (8)$$

Оператор L' только знаком при производной по t отличается от формально сопряженного оператора к L . Слабым решением уравнения $L'u = f$ в области Ω будем называть непрерывную функцию u такую, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо равенство

$$\iint_{\Omega} f a^{-1} \varphi dx dt = \iint_{\Omega} u (a^{-1} \partial_t \varphi - \partial_x^2 \varphi) dx dt.$$

Определим слабое фундаментальное решение уравнения (8) как функцию $\Gamma'(x, \xi, t - \tau)$, где $\Gamma'(x, \xi, t)$ непрерывна при $t > 0$ по совокупности аргументов, для фиксированного $\xi \in \mathbb{R}$ $\Gamma'(x, \xi, t)$ является слабым решением уравнения (8) в $\mathbb{R}_+^2$, и для любой непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ функции ψ

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}} \Gamma'(x, y, t) \psi(y) dy = \psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Из установленных в [2] результатов для Γ' и равенства (7) вытекает следующая

Теорема 2. Пусть для уравнения (8) выполнено условие (2). Тогда существует и единственно слабое фундаментальное решение $\Gamma'(x, \xi, t)$ для уравнения (8), причем

$$\Gamma'(x, \xi, t) = \Gamma(\xi, x, t). \quad (10)$$

Пусть теперь коэффициент a удовлетворяет условию Гельдера:

$$a \in C^\alpha(\mathbb{R}). \quad (11)$$

В этом случае существует классическое фундаментальное решение уравнения (8).

Обозначим через

$$Z(x, t; c) = \frac{1}{(4\pi ct)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4ct}}, \quad t > 0,$$

фундаментальное решение уравнения теплопроводности $\partial_t - c\partial_x^2 u = 0$.

Используя известные оценки для него [1, гл. 4] и равенство (7), получаем, что справедлива

Теорема 3. Пусть для уравнения (1) выполнены условия (2) и (11). Тогда фундаментальное решение для уравнения (1) удовлетворяет в полосе $D = \mathbb{R} \times (0, T)$, $T > 0$, оценкам

$$|\partial_\xi^k d_t^l \Gamma(x, \xi, t)| \leq Ct^{-(k+2l+1)/2} \exp \left\{ -c \frac{(x-\xi)^2}{t} \right\}, \quad k+2l \leq 2 \quad (12)$$

где константы C , c зависят от $\|a\|_{C^\alpha(\mathbb{R})}$ и T . Кроме того, имеет место представление

$$\partial_\xi \Gamma(x, \xi, t) = \partial_x Z(x - \xi, t; a(\xi)) + Q(x, \xi, t), \quad (13)$$

где для функции Q справедлива оценка

$$|Q(x, \xi, t)| \leq Ct^{(\alpha-2)/2} e^{-c \frac{(x-\xi)^2}{t}}. \quad (14)$$

Доказательство. Для фундаментального решения уравнения (8) [1, гл. 4]

$$|\partial_x^k d_t^l \Gamma'(x, \xi, t)| \leq Ct^{-(k+2l+1)/2} \exp \left\{ -c \frac{(x-\xi)^2}{t} \right\}, \quad k+2l \leq 2,$$

откуда с учетом (10) вытекает (12). Также при построении фундаментального решения уравнения (8) методом параметрикса [1, гл. 4] устанавливается представление

$$\Gamma'(x, \xi, t) = Z(x - \xi, t; a(\xi)) + Q'(x, \xi, t),$$

причем

$$|\partial_x Q'(x, \xi, t)| \leq Ct^{(\alpha-2)/2} e^{-c \frac{(x-\xi)^2}{t}}.$$

Отсюда заключаем, что

$$\partial_\xi Q(x, \xi, t) = \partial_\xi Q'(\xi, x, t) + \partial_x [Z(x - \xi, t; a(\xi)) - Z(x - \xi, t; a(y))]_{y=x}$$

и по теореме о среднем для последнего слагаемого

$$\begin{aligned} |\partial_x [Z(x - \xi, t; a(\xi)) - Z(x - \xi, t; a(y))]_{y=x}| &\leq C|a(x) - a(\xi)|t^{-1} e^{-c \frac{(x-\xi)^2}{t}} \leq \\ &\leq C|x - \xi|^\alpha t^{-1} e^{-c \frac{(x-\xi)^2}{t}} \leq Ct^{(\alpha-2)/2} e^{-c \frac{(x-\xi)^2}{t}}. \end{aligned}$$

□

Рассмотрим в полосе D полуограниченную область

$$\Omega = \{(x, t) \in D \mid x > g(t)\},$$

с боковой границей $\Sigma = \{(x, t) \in \bar{D} \mid x = g(t)\}$, удовлетворяющей условию Жевре

$$|g(t) - g(\tau)| \leq C|t - \tau|^{(1+\alpha)/2}, \quad t, \tau \in [0, T]. \quad (15)$$

В области Ω рассматриваем первую краевую задачу для уравнения Фоккера—Планка

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega, \quad u|_\Sigma = \psi, \quad u|_{t=0} = 0. \quad (16)$$

Ее решение будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$W\varphi(x, t) = \int_0^t \partial_\xi \Gamma(x, g(\tau), t - \tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Теорема 4. Пусть $\varphi \in C([0, T])$. Тогда для потенциала двойного слоя имеет место формула скачка

$$\lim_{x \rightarrow g(t) \pm 0} W\varphi(x, t) = \pm \frac{\varphi(t)}{2a(g(t), t)} + W\varphi(g(t), t), \quad t \in (0, T].$$

Доказательство. Используя (13), представим $W\varphi$ как $W_1\varphi + W_2\varphi$, где

$$W_1\varphi(x, t) = \int_0^t \partial_x Z(x - g(\tau), t - \tau; a(g(\tau))) \varphi(\tau) d\tau,$$

$$W_2\varphi(x, t) = \int_0^t \partial_\xi Q(x, g(\tau), t - \tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Для первого слагаемого формула скачка

$$\lim_{x \rightarrow g(t) \pm 0} W_1\varphi(x, t) = \pm \frac{\varphi(t)}{a(g(t), t)} + W_1\varphi(g(t), t)$$

хорошо известна, а для второго

$$\lim_{x \rightarrow g(t) \pm 0} W_2\varphi(x, t) = W_2\varphi(g(t), t),$$

так как в силу (14) функция Q имеет слабую особенность, и интеграл для W_2 сходится равномерно по x в некоторой окрестности точки $g(t)$. $\square$

Теорема 5. Пусть для уравнения (1) выполнены условия (2) и (11), для боковой границы условие (15), $\psi \in C([0, T])$ и $\psi(0) = 0$. Тогда существует ограниченное в Ω решение первой краевой задачи (16). Это решение может быть представлено в виде потенциала двойного слоя $W\varphi$ с некоторой плотностью $\varphi \in C([0, T])$, $\varphi(0) = 0$.

Доказательство. Для $\varphi \in C([0, T])$ потенциал двойного слоя $W\varphi$ является слабым решением уравнения (1) и удовлетворяет начальному условию. Чтобы этот потенциал удовлетворял еще и граничному условию, достаточно, чтобы плотность φ удовлетворяла уравнению

$$\frac{\varphi(t)}{2a(g(t), t)} + W\varphi(g(t), t) = \psi(t), \quad t \in (0, T].$$

Оно является уравнением Вольтерра второго рода. Его ядро имеет слабую особенность, так как

$$|\partial_x Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; a(\tau))| \leq C \frac{|g(t) - g(\tau)|}{(t - \tau)^{3/2}} \leq C(t - \tau)^{(\alpha-2)/2},$$

а для второго слагаемого в представлении (13) справедлива оценка (14). Поэтому для любой функции ψ , удовлетворяющей условиям теоремы, существует единственное решение φ , непрерывное на $[0, T]$, причем $\varphi(0) = 0$. Его можно искать методом последовательных приближений. Используя оценки для Z и Q , легко проверить, что потенциал двойного слоя $W\varphi$ будет непрерывной и ограниченной функцией в $\bar{\Omega}$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О. А., Солонников С. Д., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1968.
2. Порпер Ф. О., Эйдельман С. Д. Двусторонние оценки фундаментальных решений параболических уравнений второго порядка и некоторые их приложения // Усп. мат. наук. — 1984. — 39, № 3 (237). — С. 107–156.
3. Risken H. The Fokker–Planck Equation: Methods of Solution and Applications. — Berlin: Springer-Verlag, 1984.

Коненков Андрей Николаевич

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина

E-mail: a.konenkov@365.rsu.edu.ru