Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Куликов, О локальных бифуркациях пространственно неоднородных решений в одном функционально-дифференциальном уравнении, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 186, 67–73

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-67-73>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 06:07:16

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 186 (2020). С. 67–73
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-186-67-73

УДК 517.929

О ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ В ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

© 2020 г. Д. А. КУЛИКОВ

Аннотация. В работе изучается один из вариантов нелокального уравнения эрозии, моделирующего процесс формирования нанорельефа. Для периодической краевой задачи рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения с частными производными изучен вопрос о локальных бифуркациях при смене устойчивости однородными состояниями равновесия. Показано, что для рассматриваемого варианта задачи характерны докритические бифуркации.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, краевая задача, локальная бифуркация, устойчивость.

ON LOCAL BIFURCATIONS OF SPATIALLY INHOMOGENEOUS SOLUTIONS FOR ONE FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION

© 2020 D. A. KULIKOV

ABSTRACT. In this work, we study a nonlocal erosion equation, which simulates the process of nanorelief formation. For a periodic boundary-value problem for the partial functional differential equation, we examine local bifurcations in the cases where homogeneous equilibrium states change their stability. We prove that in the problem considered, subcritical bifurcations occur.

Keywords and phrases: functional differential equation, boundary-value problem, local bifurcation, stability.

AMS Subject Classification: 37L10, 35R10, 35Q80

1. Введение. В работе рассматривается одна из версий нелокального уравнения эрозии, которое было предложено в работе [9] в качестве одной из альтернативных моделей процесса формирования неоднородного рельефа на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов. Более известный вариант математической модели формирования нанорельефа базируется на использовании уравнения Курамото—Сивашинского [13]. Изучаемая здесь математическая модель существенным образом дополняет модель, предложенную в работе Бредли—Харпера. Физические аспекты изучаемой здесь модели, а также анализ некоторых математических вопросов можно найти в монографии [10], а также статьях [5, 6, 10, 14, 15]. В данной работе изучается одна из модификаций уравнения эрозии, которая ранее не рассматривалась. Часто под названием «нелокальное уравнение эрозии» изучался его следующий вариант [6]

$$u_t = du_{xx} - cv_x + a_1(v_x)^2 + a_2(v_x)^3. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00672).

В уравнении (1) использовано обозначение $v = u(t, x - h)$. Обычно уравнение (1) изучалось вместе с периодическими краевыми условиями. В нем коэффициенты — положительные постоянные, зависящие от физических параметров процесса.

В данной работе будет рассмотрен иной вариант модели

$$u_t = du_{xx} + b_1(u - v) + b_2(u - v)^2 + b_3(u - v)^3, \quad (2)$$

где $d > 0$, $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$, который можно назвать «разностным» вариантом нелокального уравнения эрозии. На уровне физической строгости они эквивалентны. Действительно,

$$u(t, x) - v(t, x) = u(t, x) - u(t, x - h) = hu_x(t, x - h) + o(h),$$

т. е. разность $u(t, x) - v(t, x)$ пропорциональна производной, по крайней мере, если h — достаточно малая положительная постоянная.

Ниже будет показано, что содержателен вариант $b_1 > 0$ и поэтому без нарушения общности (после перенормировок) можно считать $b_1 = 1$.

Как уже отмечалось, уравнение (1) и уравнение (2) будем, как это принято, рассматривать вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (3)$$

Равенство периода величине 2π достигается нормировкой пространственной переменной x .

Сразу отметим, что для краевой задачи (КЗ) (2), (3) будет рассмотрен вопрос о возможности появления пространственно неоднородных решений, т. е. таких решений, для которых $u_x(t, x) \neq 0$. Для этого будет рассмотрен вопрос о локальных бифуркациях в окрестности однородных состояний равновесия ($u(t, x) = \text{const}$). Подчеркнем, что аналогичная задача рассматривалась для КЗ (1), (3). Несмотря на внешнюю схожесть уравнений, результаты анализа КЗ (1), (3) и (2), (3) во многом различны. Отметим также, что уравнение (2), как и уравнение (1), входит в класс функционально-дифференциальных уравнений с частными производными. Далее будет показано, что его можно интерпретировать как абстрактное уравнение параболического типа [2, 12].

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую версию уравнения эрозии

$$u_t = du_{xx} + (u - v) + b_2(u - v)^2 + b_3(u - v)^3, \quad (4)$$

где $u = u(t, x)$, $v = u(t, x - h)$, $h, d > 0$, $b_2, b_3 \in \mathbb{R}$. Уравнение (4) записано уже в перенормированном виде. Это уравнение дополним традиционными для него краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (5)$$

С прикладной точки зрения особый интерес представляют решения, которые описывают неоднородный нанорельеф, т. е. решения, существенно зависящие от x . Напомним, что особое значение имеет вопрос об их устойчивости, так как именно устойчивые решения описывают реализуемые в экспериментах формы рельефа [10].

Отметим некоторые особенности краевой задачи (4), (5). Она имеет семейство пространственно неоднородных состояний равновесия $u(t, x) = C$ где C — произвольная действительная постоянная. Более того, КЗ (4), (5) инвариантна относительно преобразований Галилея: $u \rightarrow u + C$, $t \rightarrow t + \alpha$, $x \rightarrow x + \beta$, α, β , как и C , также произвольные действительные постоянные. Последнее замечание позволяет считать, в частности, что без нарушения общности логично и удобно изучать решения, начальные условия для которых

$$u(0, x) = f(x)$$

принадлежат достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия. Вместе с нелинейной КЗ (4), (5) рассмотрим ее линеаризованный вариант

$$u_t = Au, \quad u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (6)$$

Здесь через A обозначен линейный дифференциальный оператор (ЛДО), определенный равенством

$$Ay(x) = dy''(x) + y(x) - y(x - h).$$

Его область определения D_A состоит из достаточно гладких функций $y(x)$ удовлетворяющих периодическим краевым условиям

$$y(t, x + 2\pi) = y(t, x).$$

Данный ЛДО A имеет счетный набор собственных значений $\lambda_n = -n^2d + (1 - \exp(-inh))$. Им отвечают собственные функции $\exp(inx)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, образующие в пространстве 2π -периодических функций $f(x) \in L_2(0, 2\pi)$ полную ортогональную систему. Стандартным образом можно убедиться, что решения линейной КЗ (6) могут быть записаны в форме ряда

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(inx + \lambda_n t),$$

где c_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, т. е.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(inx).$$

Нетрудно проверить, что $\alpha_n = \operatorname{Re} \lambda_n \rightarrow -\infty$, если $|n| \rightarrow \infty$, а также что $\beta_n = \operatorname{Im} \lambda_n$ формируют ограниченную последовательность ($\alpha_n = -n^2d + (1 - \cos nh)$, $\beta_n = \sin nh$). Следовательно, линейная КЗ (6) порождает аналитическую полугруппу $T(t)$ линейных ограниченных операторов (см, например, [2, 12]). Этот факт, а также гладкость нелинейных операторов в нелинейном уравнении (4) дает основание утверждать, что решения смешанной задачи (4), (5), если $u(0, x) = f(x)$, порождают в пространстве Соболева H_2^2 локальный полупоток (она локально корректно разрешима) [12]. Здесь использовано стандартное обозначение H_2^2 . Напомним, что $f(x) \in H_2^2$, если функция $f(x)$ обладает в нашем случае следующими свойствами:

- (1) $f(x)$ имеет период 2π ;
- (2) эта функция имеет обобщенные производные $f'(x), f''(x) \in L_2(0, 2\pi)$.

Отметим, что в силу теорем вложения Соболева $f(x) \in C^1[0, 2\pi]$.

3. Анализ устойчивости однородных состояний равновесия. Отметим, что всегда $\lambda_0 = 0$. Если при некоторых вариантах выбора коэффициентов оказалось, что для остальных λ_n справедливы неравенства $\operatorname{Re} \lambda_n \leq -\gamma_0 < 0$, то все решения линейной КЗ (6) будут устойчивыми. При выполнении неравенства $\operatorname{Re} \lambda_n \leq -\gamma_0 < 0$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ устойчивыми будут и однородные состояния равновесия $u(t, x) = C$ нелинейной КЗ (4), (5).

Перейдем к выводу условий устойчивости (неустойчивости) в терминах параметров ЛДО A . Очевидно, что при достаточно больших d справедливо неравенство $\operatorname{Re} \lambda_n \leq -\gamma_0 < 0$, если $n \neq 0$. Критическое значение $d = d_{\text{кр}}$ выделяет условие

$$d = d_{\text{кр}} = \max_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n, \quad \varphi_n = \frac{1 - \cos nh}{n^2}, \quad \varphi_{-n} = \varphi_n.$$

В рамках данной работы ограничимся анализом условий устойчивости в случае, если h — относительно малая положительная постоянная.

Лемма 1. Пусть $h \in (0, h_0)$, $0 < h_0 \ll 1$. Тогда $d_{\text{кр}} = 1 - \cos h$ ($\max \varphi_n = \varphi_1$).

Убедиться в справедливости последнего утверждения можно на базе численного анализа с использованием компьютера. Вместе с тем при $h < h_0$ этот вывод можно получить иначе. Здесь h_0 — достаточно малая положительная постоянная.

Положим $nh = y_n$, т. е. $\varphi_n = h^2(1 - \cos y_n)/y_n^2$ и вместо последовательности φ_n изучим вспомогательную функцию $\varphi(y) = h^2(1 - \cos y)/y^2$. Отметим некоторые ее свойства:

- (1) $0 \leq \varphi(y) \leq 2$ при всех $y \geq h$;
- (2) $\lim_{y \rightarrow \infty} \varphi(y) = 0$.

Элементарный анализ показал, что $\varphi(h) \geq \varphi(y)$ при всех $y \geq h$. Следовательно, в данной постановке задачи максимум реализуется на первой моде.

Итак, при $d \in (d_{\text{кр}}, \infty)$ решения линейной КЗ (6) устойчивы, а при $d \in (0, d_{\text{кр}})$ теряют устойчивость. Равенство $d = d_{\text{кр}}$ выделяет критический случай в задаче об устойчивости однородных состояний равновесия КЗ (4), (5). При $d = d_{\text{кр}}$ спектру устойчивости (спектру ЛДО A) принадлежит пара собственных значений $\pm i\sigma$ ($\sigma = \sin h$). Остальные точки спектра устойчивости, кроме $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_{\pm 1} = \pm i\sigma$ лежат в полуплоскости $\text{Re } \lambda_n \leq -\gamma_0 < 0$, $\gamma_0 = \gamma_0(h)$.

Рассмотрим КЗ (1), (2) из введения в случае, когда $b_1 \leq 0$. Очевидно, что она обладает большинством из свойств изучаемой здесь КЗ (4), (5). Например, имеет семейство однородных состояний равновесия $u(t, x) = \text{const}$. Анализ их устойчивости, как и для КЗ (4), (5), изучаемой в данном разделе, приводит к необходимости анализа ЛДО

$$By = dy''(x) + b_1(y(x) - y(x - h)),$$

определенного на достаточно гладких функциях, имеющих период 2π . Понятно, что если собственные числа $\lambda_n = -dn^2 + b_1(1 - \cos nh) + ib_1 \sin nh$.

Следовательно, при $b_1 \leq 0$ $\text{Re } \lambda_n \leq 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$ и, более того, $\text{Re } \lambda_n < 0$, если $n \neq 0$. Тем самым подтверждено, что содержательный вариант возникает лишь при $b_1 > 0$ ($b_1 = 1$ как в настоящем разделе и далее).

4. Анализ нелинейной краевой задачи. Возвратимся к более детальному анализу нелинейной КЗ (4), (5) при $d = d_{\text{кр}}(1 - \gamma\varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \leq 1$, $\gamma = \pm 1$ и соответствующий знак γ выберем позже.

При таком выборе d КЗ (4), (5) имеет трехмерное локально инвариантное многообразие $M_3(\varepsilon)$ (см, например, [3, 7]). Решения КЗ (4), (5), принадлежащие $M_3(\varepsilon)$ могут быть восстановлены после соответствующего анализа системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений, которую обычно называют нормальной формой (нормальной формой Пуанкаре). Наконец, решения из малой окрестности однородного состояния равновесия со скоростью экспоненты стремятся к данному многообразию или с течением времени покидают эту окрестность.

Положим $u(t, x) = y_0(t) + y_1(t) \exp(ix) + y_{-1}(t) \exp(-ix) + w(t, x)$. Здесь

$$y_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, x) \exp(-ix) dx, \quad y_{-1}(t) = \overline{y_1}(t), \quad y_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, x) dx.$$

В свою очередь, для функций $w(t, x)$ справедливы равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(t, x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(t, x) \exp(\pm ix) dx = 0.$$

Следовательно, функции $w(t, x) \in H_2^2$ — ортогональному дополнению к трехмерному подпространству $H_{2,3}^2$ функций из H_2^2 , которое сформировано как линейная оболочка функции $1, \exp(ix), \exp(-ix)$: $v(x) \in H_{2,3}^2$, если

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha \exp(ix) + \overline{\alpha} \exp(-ix),$$

где $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Напомним, что для функций $u(t, x) \in M_3(\varepsilon)$ справедливо представление

$$u(t, x) = y_0(t) + y_1(t) \exp(ix) + y_{-1}(t) \exp(-ix) + G(x, y_0, y_1, y_{-1}),$$

где $y_{-1}(t) = \overline{y_1}(t)$, G — достаточно гладкий оператор с областью значений из $H_{2,0}^2$. Функции y_0, y_1 удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_0 = F_0(y_0, y_1, \varepsilon), \quad \dot{y}_1 = F_1(y_0, y_1, \varepsilon). \quad (7)$$

Отметим некоторые особенности системы дифференциальных уравнений (7). Во-первых, она эквивалентна системе в $\mathbb{R}^3$, так как $y_1(t)$ — комплекснозначная функция. Во-вторых, правые части данной системы (7) не зависят от y_0 . Специфика правой части уравнения (4) позволяет сделать вывод, что она и, соответственно, F_0, F_1 не зависят от y_0 . Наконец, если положить

$$y_1(t) = z(s) \exp(i\sigma t), \quad s = \varepsilon t, \quad y_0 = y_0(t),$$

то можно показать, что нормальная форма (7) переписывается в следующем виде

$$y'_0 = \Phi(z, \bar{z}, \varepsilon), \quad z' = \Phi_1(z, \bar{z}, \varepsilon), \quad (8)$$

где штрихом обозначена производная по s — «медленному времени». Система (8) — «усредненный» вариант нормальной формы (7). Вариант нормальной формы (8) можно получить из анализа КЗ (4), (5) непосредственно, если использовать один из вариантов модифицированного алгоритма Крылова—Боголюбова (процедуры усреднения Крылова—Боголюбова, см, например, [4, 6]).

Решения КЗ (4), (5) $u(t, x) \in M_3(\varepsilon)$ будем искать в следующей форме

$$u(t, x, \varepsilon) = y_0(s) + \varepsilon^{1/2} u_1(t, z, \bar{z}, x) + \varepsilon u_2(t, z, \bar{z}, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, z, \bar{z}, x) + o(\varepsilon)^{3/2}, \quad (9)$$

где $u_1(t, x) = z(s)q + \bar{z}(s)\bar{q}$, $z = z(s)$, $q = q(t, x) = \exp(i\sigma t + ix)$, $\bar{q} = \exp(-i\sigma t - ix)$. Достаточно гладкие по совокупности переменных функции u_2 , u_3 принадлежат классу функций W . Для таких функций $u_j(t, z, \bar{z}, x)$, кроме предположения о их гладкости, выполнены дополнительно следующие свойства:

option при всех $t, z, \bar{z}$ как функций x они принадлежат H_2^2 ;

option по переменной t они имеют период $2\pi/\sigma$;

option справедливы равенства

$$M_0(u_j) = \frac{\sigma}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma} \int_0^{2\pi} u_j dx dt = 0, \quad M_{\pm}(u_j) = \frac{\sigma}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma} \int_0^{2\pi} u_j q_{\pm} dx dt = 0,$$

где $q_+ = q(t, x)$, $q_- = \bar{q}(t, x)$.

После подстановки суммы (9) в КЗ (4), (5) при $d = d_{\text{кр}}(1 - \gamma\varepsilon)$ с последующим выделением слагаемых, имеющих порядок малости ε , $\varepsilon^{3/2}$ соответственно, приходим к двум неоднородным КЗ для определения u_2 и u_3 соответственно. Эти КЗ имеют следующий вид

$$\begin{aligned} u_{2t} - A_0 u_2 &= \Psi_2(t, z, \bar{z}, x), \quad M_0(u_2) = 0, \\ u_2(t, z, \bar{z}, x + 2\pi) &= u_2(t, z, \bar{z}, x), \quad M_{\pm}(u_2) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

а также

$$\begin{aligned} u_{3t} - A_0 u_3 &= \Psi_3(t, z, \bar{z}, x), \quad M_0(u_3) = 0, \\ u_3(t, z, \bar{z}, x + 2\pi) &= u_3(t, z, \bar{z}, x), \quad M_{\pm}(u_3) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

При анализе КЗ (10), (11) следует считать z , $\bar{z}$ как параметры. Напомним, что условия их разрешимости в классе функций W приводят к проверке равенств

$$M_0(\Psi_p) = M_{\pm}(\Psi_p) = 0, \quad p = 2, 3.$$

В КЗ (10), (11)

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= b_2(u_1 - v_1)^2 - y_0(s), \quad v_1 = u_1(t, z, \bar{z}, x - h), \\ \Psi_3 &= 2b_2(u_1 - v_1)(u_2 - v_2) + b_3(u_1 - v_1)^3 + d_{\text{кр}}\gamma(u_1 - v_1) - (z'q + \bar{z}'\bar{q}), \\ v_2 &= u_2(t, z, \bar{z}, x - h), \quad v_3 = u_3(t, z, \bar{z}, x - h). \end{aligned} \quad (12)$$

Структура Ψ_2 , Ψ_3 и условия разрешимости КЗ (10), (11) позволяют получить правые части нормальной формы. Так, анализ КЗ (10) приводит к уравнению

$$y'_0 = \Psi_0(z, \bar{z}) + O(\varepsilon), \quad \Psi_0(z, \bar{z}) = 4b_2 d_{\text{кр}} |z|^2.$$

При этом решение, принадлежащее W , имеет вид

$$u_2(t, x) = u_2(t, x, z, \bar{z}) = \eta_2 z^2 q^2 + \bar{\eta}_2 \bar{z}^2 \bar{q}^2,$$

где $\eta_2 = (b_2(1 - Q))/(2d_{\text{кр}})$, $Q = \exp(-ih)$.

Условия разрешимости КЗ (11) приводят к следующему дифференциальному уравнению для комплекснозначной функции

$$z' = d_0 \gamma z + (l_1 + il_2)z|z|^2 + O(\varepsilon), \quad (l_1 + il_2) = 4b_2^2 \sigma [\sigma + i(1 - d_{\text{кр}})] + 6b_3 d_{\text{кр}} (d_{\text{кр}} + i\sigma).$$

Следовательно,

$$l_1 = 4b_2^2\sigma^2 + 6b_3d_{\text{кр}}^2, \quad l_2 = 4b_2^2\sigma(1 - d_{\text{кр}}) + 6b_3d_{\text{кр}}\sigma.$$

Пусть $l_1 \neq 0$, т. е. первая ляпуновская величина отлична от 0. В ситуации общего положения для дальнейшего анализа можно и целесообразно рассмотреть укороченный вариант нормальной формы (8). В рассматриваемом случае получаем, что

$$y'_0 = 4b_2d_{\text{кр}}|z|^2, \quad z' = d_{\text{кр}}\gamma z + (l_1 + il_2)z|z|^2. \quad (13)$$

В системе дифференциальных уравнений (13) отброшены слагаемые, имеющие порядок малости $O(\varepsilon)$. В ситуации общего положения вариант нормальной формы (13) позволяет далее получить ответ на поставленные во введении вопросы.

Для дальнейшего анализа задачи на первом этапе достаточно изучить второе из уравнений системы (13). Итак, изучим уравнение

$$z' = d_{\text{кр}}\gamma z + (l_1 + il_2)z|z|^2. \quad (14)$$

Лемма 2. *Дифференциальное уравнение (14) имеет автомодельное периодическое решение*

$$z(s) = \xi \exp(i\omega s),$$

где $\xi = \sqrt{d_{\text{кр}}\gamma/l_1}$, $\omega = l_2\xi^2$, если $\gamma l_1 < 0$, и таких решений нет, если $\gamma l_1 > 0$.

При $l_1 < 0$ ($\gamma > 0$) периодическое решение устойчиво (орбитально асимптотически устойчиво) и, напротив, неустойчиво, если $l_1 > 0$ ($\gamma < 0$).

Доказательство леммы — это фрагмент одного из вариантов доказательства теоремы Андронова—Хопфа [7].

Отметим, что для ситуации, связанной с анализом КЗ (4), (5), более характерен случай, когда $l_1 > 0$. Так будет заведомо, если $b_3 \geq 0$.

Из результатов работ [1, 3, 4, 7] следует, что справедливо утверждение.

Теорема 1. *Существует $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ КЗ (4), (5) имеет двупараметрическое семейство решений C_2 , наследующее устойчивость автомодельного периодического решения $z(s) = \xi \exp(i\omega s)$. Данное двумерное инвариантное многообразие C_2 заполнено решениями КЗ (4), (5), для которых справедлива асимптотическая формула*

$$u(t, x, \varepsilon) = \beta + (4d_{\text{кр}}b_2\varepsilon + o(\varepsilon)t) + 2\xi\varepsilon^{1/2} \cos((\sigma + \varepsilon\omega)t + x + \alpha) + \\ + 2\xi^2\varepsilon[(\operatorname{Re} \eta_2) \cos(2(\sigma + \varepsilon\omega)t + 2x + 2\alpha) - (\operatorname{Im} \eta_2) \sin(2(\sigma + \varepsilon\omega)t + 2x + 2\alpha)] + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (15)$$

где величины ξ , σ , ω , $d_{\text{кр}}$ были указаны ранее, α , β — произвольные действительные постоянные.

Отметим, что решения (15) могут быть названы периодическими решениями второго рода относительно эволюционной переменной t . Для таких решений t -периодической функцией будут производные от неизвестной функции $u(t, x)$, например, u_t , u_x . В нашем случае u_t , u_x — функции, имеющие период, близкий к $2\pi/(\sigma + \varepsilon\omega)$ по переменной t , и они существенным образом зависят от x (они, конечно, периодические функции по переменной x по постановке задачи).

Отметим также, что в ситуации общего положения $\sigma \neq 0$, $l_2 \neq 0$. Если $\sigma = 0$, то и $l_2 = 0$. В этом случае решение (15) не следует интерпретировать как периодическое решение второго рода. В таком случае следует говорить о пространственно неоднородных состояниях равновесия «второго» рода. Это означает, что $u_x(t, x)$ уже не зависит от t , а зависит только от x . Наконец, вспомним, что $\sigma = \sin h$, т. е. вариант $\sigma = 0$, $l_2 = 0$ реализуется, если $h = \pi k$, $k = 1, 2, \dots$. Относительно, быть может, содержателен вариант, когда $h = \pi$, так как обычно величина $h < 2\pi$, т. е. в нормированных переменных величина отклонения меньше, чем длина образца, подвергнутого бомбардировке.

Оба уравнения (1), (2) ((1), (4)) входят в класс функционально-дифференциальных уравнений с частными производными. Кроме различных версий нелокального уравнения эрозии, в настоящее время бифуркационные задачи изучались для одного уравнения из оптики [8, 11].

В заключение еще раз отметим, что более типичен вариант, когда $l_1 > 0$ и, следовательно, «чаще» реализуются докритические бифуркации, если $d > d_{\text{кр}}$. Для КЗ (1), (3) скорее характерны послекритические бифуркации [6].

5. Некоторые замечания. В предыдущих разделах была КЗ (4), (5). При анализе устойчивости однородных состояний равновесия было использовано предположение о том, что величина отклонения h достаточно мала. Последнее предположение вполне естественно для приложений в физике пограничных явлений. Уместно отметить, что основным моментом такого анализа следует считать определение максимального значения среди членов последовательности φ_n . При малых h таким ее элементом будет φ_1 , т. е. $\max_{n \neq 0} \varphi_n = \varphi_1$. Если h не мало, то соображения математического анализа в строгом смысле использовать нельзя. Но, с другой стороны, для такой задачи при относительно произвольном h можно использовать компьютерное моделирование и при различных h определять $\max_{n \neq 0} \varphi_n$ численно. Такие эксперименты показали, что основной, базовый вывод сохраняется, т. е. по-прежнему $\max_{n \neq 0} \varphi_n = \varphi_1$. Анализ уже нелинейной КЗ нигде не использовал предположение о малости h и основные его этапы сохраняются.

Проиллюстрируем это на примере. Пусть, например, $h = \pi/4$. Тогда $\varphi_1 \approx 0,293$, $\varphi_2 \approx 0,250$, $\varphi_3 \approx 0,190$, $\varphi_4 \approx 0,125$ и т. д. При таком выборе h нормальная форма (13) сохраняет прежний вид, в котором вместо $d_{кр}$ следует подставить 0,293, а $\sigma \approx 0,707$. Следовательно, сохраняются основные выводы теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение тора при возмущениях// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 6. — С. 738–753.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
3. Куликов А. Н. Инерциальные многообразия нелинейных автономных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве/ Препринт № 85 Ин-та прикл. мат. им. М. В. Келдыша. — М., 1991.
4. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — 52, № 5. — С. 930–945.
5. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Механизм формирования волновых диссипативных структур в одной из задач нанотехнологий// Вестн. РАЕН. — 2013. — 13, № 4. — С. 23–31.
6. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Нелокальная модель формирования рельефа под воздействием потока ионов. Неоднородные наноструктуры// Мат. модел. — 2016. — 28, № 3. — С. 33–50.
7. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркации рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980.
8. Разгулин А. В. Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1993. — 33, № 1. — С. 69–80.
9. Рудый А. С., Бачурин В. И. Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой// Изв. РАН. Сер. физ. — 2008. — 72, № 5. — С. 624–629.
10. Рудый А. С., Куликов А. Н., Метлицкая А. В. Самоорганизация наноструктур в рамках пространственно-нелокальной модели эрозии поверхности кремния ионной бомбардировкой// в кн.: Кремниевые наноструктуры. Физика. Технология. Моделирование. — Ярославль: Индиго, 2014. — С. 53–55.
11. Скубачевский А. Л. О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения// Диффер. уравн. — 1998. — 34, № 10. — С. 1394–1401.
12. Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1961. — 10. — С. 297–350.
13. Bradley R. M., Harper J. M. E. Theory of ripple topography induced by ion bombardment// J. Vac. Sci. Techn. A. — 1988. — 6. — P. 2390–2395.
14. Kulikov D. A. Spatially inhomogeneous dissipative structures in a periodic boundary-value problem for a nonlocal erosion equation// J. Math. Sci. — 2015. — 205, № 6. — P. 791–805.
15. Rudyi A. S., Kulikov A. N., Kulikov D. A., Metlitskaya A. V. High-mode wave relief in a spatially nonlocal erosion model// Russ. Microelectron. — 2014. — 43, № 4. — P. 277–283.

Куликов Дмитрий Анатольевич

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: kulikov_d_a@mail.ru