Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Мамонов, И. В. Ионова, А. О. Харламова, Кривизна циклов фазовых систем с мультистабильностью, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 186, 83–90

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-83-90>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:47:36

КРИВИЗНА ЦИКЛОВ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ С МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬЮ

© 2020 г. С. С. МАМОНОВ, И. В. ИОНОВА, А. О. ХАРЛАМОВА

Аннотация. В работе рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая математическую модель системы фазовой автоподстройки с запаздыванием. В работе вводится понятие кривизны цикла, которое применяется для проведения сравнительного анализа близости циклов нефазовой и фазовой систем.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, колебательный цикл, фазовая система, кривизна цикла, вращение векторного поля.

CURVATURE OF CYCLES OF PHASE SYSTEMS WITH MULTISTABILITY

© 2020 S. S. MAMONOV, I. V. IONOVA, A. O. KHARLAMOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider a system of differential equations describing a mathematical model of a phase-locked loop with a delay. We introduce the concept of the curvature of a cycle, which is applied to analyzing the proximity of cycles of nonphase and phase systems.

Keywords and phrases: system of differential equations, oscillatory cycle, phase system, curvature of cycle, rotation of a vector field.

AMS Subject Classification: 34K05, 34K13, 34K60

1. Введение. Рассматривается система дифференциальных уравнений [4, 6, 7]

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T x + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0(1 - u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma, \quad (1)$$

где $x, b, c \in \mathbb{R}^2$, $u \in [0; 1]$, $\alpha_1, \rho_1, \rho_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi(\sigma)$ — Δ -периодическая функция. При $u = 0$ система (1) становится фазовой системой

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T x + (\rho_1 + \rho_0)\varphi(\sigma). \quad (2)$$

Для систем дифференциальных уравнений актуальным является вопрос реализации бифуркационных процессов, определение нелинейных колебаний и их анализ [1–6]. Система уравнений (2) описывает динамику системы фазовой автоподстройки с запаздыванием в звене фильтра нижних частот в фазовой цепи управления [2, 4–6]. Запаздывание в системе автоподстройки определяет параметр $\rho = \rho_1 + \rho_0 > 0$, при отсутствии запаздывания выполняется равенство $\rho = 0$.

Пусть функция $z(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t), \sigma(t))$ определяет цикл системы (1), тогда под кривизной цикла будем понимать величину

$$K(t) = \frac{\sqrt{[z'(t) \times z''(t)]^2}}{(z'^2(t))^{3/2}}, \quad (3)$$

где $z'(t) = \text{colon}(x'_1(t), x'_2(t), \sigma'(t))$, $z'^2 = z'^T \cdot z'$, $z''(t) = \text{colon}(x''_1(t), x''_2(t), \sigma''(t))$, а символ « $\times$ » обозначает векторное произведение. В силу (3) кривизна цикла системы (1) удовлетворяет соотношению

$$K(t) = \frac{\sqrt{(x'_1 x''_2 - x''_1 x'_2)^2 + (x'^2_2 \sigma'' - x''_2 \sigma')^2 + (\sigma' x'_1 - \sigma'' x''_1)^2}}{(x'^2_1 + x'^2_2 + \sigma'^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

Системы (1) и (2) рассматривались в работах [4, 6, 7]. Для этих систем аналитическими методами были найдены начальные условия устойчивых и неустойчивых колебательных циклов, определены условия реализации в таких системах режимов мультстабильности, предложены численные методы определения близости циклов фазовой и нефазовой систем на основе их метрических характеристик, а также с использованием их кривизны.

В данной работе предлагается рассмотреть зависимость кривизны циклов от координат фазовой и нефазовой систем и использовать кривизну циклов для анализа мультстабильности.

2. Основные результаты. Сформулируем основные результаты работы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1), где

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\nu_1 \\ -\Gamma \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 > 0, \quad \beta_1 > 0, \quad \varphi(\sigma) = -\gamma + \sin(\sigma + \arcsin \gamma), \quad \varphi(0) = 0,$$

найдем $c^T b = -\Gamma$, $c^T A = l^T$, $l^T b = -\nu_1 < 0$, $\nu = -\nu_1$, $\text{rang } \|c, l\| = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $c^T A^{-1} b \neq 0$, $\rho = \rho_1 + \rho_0 > 0$. Систему (1) запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_2 + \nu \varphi(\sigma), \\ \dot{x}_2 = x_1 - \Gamma \varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = x_2 + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0 (1 - u) \varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma. \end{cases} \quad (5)$$

Найдем вторую производную в силу системы (5)

$$\begin{cases} x''_1 = -\alpha_1 x'_1 - \beta_1 x'_2 + \nu \varphi'_\sigma(\sigma) \sigma', \\ x''_2 = x'_1 - \Gamma \varphi'_\sigma(\sigma) \sigma', \\ \sigma'' = x'_2 + (\rho_1 + \rho_0 (1 - u)) \varphi'_\sigma(\sigma) \sigma' - \alpha_1 u \sigma'. \end{cases} \quad (6)$$

С использованием системы (6), для третьей производная получим равенства

$$\begin{cases} x'''_1 = -\alpha_1 x''_1 - \beta_1 x''_2 + \nu (\varphi''_\sigma(\sigma) \sigma'^2 + \varphi'_\sigma(\sigma) \sigma''), \\ x'''_2 = x''_1 - \Gamma (\varphi''_\sigma(\sigma) \sigma'^2 + \varphi'_\sigma(\sigma) \sigma''), \\ \sigma''' = x''_2 + (\rho_1 + \rho_0 (1 - u)) (\varphi''_\sigma(\sigma) \sigma'^2 + \varphi'_\sigma(\sigma) \sigma'') - \alpha_1 u \sigma''. \end{cases} \quad (7)$$

Для нахождения зависимости кривизны цикла системы (1) от ее координат рассмотрим расширенную систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = c^T x + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0 (1 - u) \varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma, \\ \dot{K}(t) = \psi(\sigma, x), \end{cases} \quad (8)$$

где $\dot{K}(t) = \frac{g'f - 3gf'}{2g^{1/2}f^{5/2}}$ — производная кривизны цикла системы (1), а функции $g(x; \sigma)$, $g'(x; \sigma)$, $f(x; \sigma)$ и $f'(x; \sigma)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} g(x; \sigma) &= (x'_1 x''_2 - x''_1 x'_2)^2 + (x'_2 \sigma'' - x''_2 \sigma')^2 + (\sigma' x'_1 - \sigma'' x''_1)^2, \\ g'(x; \sigma) &= 2(x'_1 x''_2 - x''_1 x'_2)(x'_1 x'''_2 - x'''_1 x'_2) + 2(x'_2 \sigma'' - x''_2 \sigma')(x'_2 \sigma''' - x'''_2 \sigma') + \\ &\quad + 2(x'_1 \sigma' - x''_1 \sigma'')(x'_1 \sigma''' - x'''_1 \sigma''), \\ f(x; \sigma) &= x'^2_1 + x'^2_2 + \sigma'^2, \quad f'(x; \sigma) = 2x'_1 x''_1 + 2x'_2 x''_2 + 2\sigma' \sigma''. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему (1) в случае $\varphi(\sigma) = -\gamma + \sin(\sigma + \arcsin \gamma)$, $\varphi(0) = 0$. Основываясь на исследованиях, проведенных в работе [7], показывается, что при $\alpha_1 = 0,01$, $\beta_1 = 1,98$, $\Gamma = 1,2$, $\nu = -2,26$, $\gamma = 0,1$, $u = 0,918$, $\rho_1 = \nu_1 \beta_1^{-1} = 1,14$, $\rho_0 = 0,02$ система (1) имеет пять колебательных циклов, где $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$ — устойчивые, а $z_4^-(t)$ и $z_5^-(t)$ — неустойчивые циклы. При $u = 0$ система (1) становится фазовой системой, у которой также существует пять колебательных циклов $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$, $z_{30}(t)$ — устойчивые, а $z_{40}^-(t)$ и $z_{50}^-(t)$ — неустойчивые циклы. Основные характеристики всех колебательных циклов систем (1) и (2) приведены в таблицах 1 и 2, где $z(t)$ — цикл системы, x_1 , x_2 , σ — начальные условия цикла, T_z — период цикла, $\langle K(t) \rangle$ — среднее значение кривизны цикла на периоде.

Циклы нефазовой системы (1) $u = 0,918$, $\sigma = 0$					
$z(t)$	$z_1(t)$	$z_2(t)$	$z_3(t)$	$z_4^-(t)$	$z_5^-(t)$
x_1	-0,047922	-0,04565	-0,0505	-0,02294	-0,03301
x_2	6,207151	14,5849	23,0726	10,02259	19,16191
T_z	4,5831	4,4728	4,4609	4,494987529	4,465325155
$\langle K(t) \rangle$	0,1552	0,0593	0,0369	0,0849	0,0441

Таблица 1. Циклы нефазовой системы.

Циклы фазовой системы (2) $u = 0$, $\sigma = 0$					
$z(t)$	$z_{10}(t)$	$z_{20}(t)$	$z_{30}(t)$	$z_{40}^-(t)$	$z_{50}^-(t)$
x_1	-0,866482	-1,2813	-1,6773	0,339472	0,52238
x_2	5,913351	14,3064	22,7464	9,911372	19,06786
T_z	4,5866	4,4741	4,4618	4,49677402	4,46586352
$\langle K(t) \rangle$	0,1513	0,0582	0,0363	0,0831	0,0432

Таблица 2. Циклы фазовой системы.

На рисунке 1 представлены проекции циклов $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$, $z_{30}(t)$ фазовой системы (2) на плоскость $(x_2; \sigma)$. На рисунке 2 в пространстве $(x_1; x_2; K(t))$ изображены линии L_1 , L_2 , L_3 , определяемые решениями системы (8), с начальными условиями циклов $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$, $z_{30}(t)$ системы (2).

На рисунке 3 изображены линии $L_{z_{10}}^1$ и $L_{z_{10}}^2$, показывающие зависимость кривизны $K(t)$ циклов $z_{10}(t)$ и $z_1(t)$ фазовой и нефазовой систем от координаты $x_1(t)$. На рисунках 4 и 5 представлены зависимости кривизны от координат $x_2(t)$ и $\sigma(t)$ (Линии: $L_{z_{10}}^2$, $L_{z_{10}}^3$ и $L_{z_{10}}^4$, $L_{z_{10}}^5$).

На рисунке 6 — зависимость кривизны $K(t)$ циклов $z_{10}(t)$ и $z_1(t)$ от времени на периоде.

На рисунках 7 и 8 определены зависимости кривизны от координаты $x_1(t)$ соответственно для циклов $z_{20}(t)$, $z_2(t)$ и $z_{30}(t)$, $z_3(t)$.

Корреляционный анализ метрических характеристик циклов систем (1), (2), (8) позволяет сделать вывод о том, что отличия характеристик кривизны циклов фазовой системы (2) и нефазовой системы (1) не являются значимыми [7]. Использование понятия кривизны цикла позволяет проводить анализ близости циклов фазовой и нефазовой систем и сравнительный анализ частотно-амплитудных характеристик кривизны полученных циклов [7].

Рассмотрим устойчивый цикл $z_{10}(t)$, для которого выполняются условия $z_{10}(0) = \text{colon}(x_{11}, x_{12}, 0)$, $x_{11} = -0,866$, $x_{12} = 5,913$, $T_1 = 4,5866$ — период цикла $z_{10}(t)$. Для цикла $z_{10}(t)$ определим окрестность $\Omega_{10} = \{(x, t) : (x_1 - x_{11})^2 + (x_2 - x_{12})^2 = R^2, t = 0, R = 1/2\}$. Используя оператор сдвига по траекториям системы (8), найдем отображение множества Ω_{10} через время T_1 в координатах (x_1, K, t) . С использованием Ω_{10} численными методами определим кривизну $K(x_1, x_2, \sigma)$ на границе множества Ω_{10} и построим множество

$$\Omega_{x_1, k, 0} = \{(x_1, K, t) : t = 0, K = K(x_1, x_2, \sigma_0), \sigma_0(0) = 0, x = \text{colon}(x_1, x_2) \in \Omega_{10}\}.$$

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Пусть $U_{x_1,k,0} = P_{T_1} \circ T_{x_1,k}$, где $T_{x_1,k}$ — оператор сдвига по траекториям системы (8), P_{T_1} — параллельный перенос,

$$P_{T_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ K \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ K \\ t - T_1 \end{pmatrix}, \quad U_{x_1,k,0}(\Omega_{x_1,k,0}) = \Omega_{x_1,k,T_1}.$$

Обозначим через $Q_{x_1,k,0}(x_1, K)$ векторное поле оператора $U_{x_1,k,0}$ на границе $\partial\Omega_{x_1,k,0}$ множества $\Omega_{x_1,k,0}$.

Численно показывается, что вращение векторного поля $Q_{x_1,k,0}$ на границе $\partial\Omega_{x_1,k,0}$ множества $\Omega_{x_1,k,0}$ отлично от нуля, $\gamma(Q_{x_1,k,0}, \partial\Omega_{x_1,k,0}) \neq 0$. Отображение $U_{x_1,k,0}$ содержит неподвижную точку оператора, определяющую начальные условия цикла первого рода фазовой системы (8).

Рис. 5

Рис. 6

Рис. 7

Рис. 8

Для дальнейших исследований кривизны цикла $z_{10}(t)$ переместим центр множества $\Omega_{x_1,k,0}$ в начало координат. Обозначим через $P_{z_{10}}$ параллельный перенос,

$$P_{z_{10}} \begin{pmatrix} x_1 \\ K \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_{11} \\ K - K_{10} \\ t \end{pmatrix},$$

$K_{10} = 0,1035$ — кривизна цикла $z_{10}(t)$ в момент времени $t = 0$, $P_{z_{10}}(\Omega_{x_1,k,0}) = \overline{\Omega}_{x_1,k,0}$, $P_{z_{10}}(\Omega_{x_1,k,T_1}) = \overline{\Omega}_{x_1,k,T_1}$. Аналогично $\Omega_{x_1,k,0}$ находится множество

$$\Omega_{x_2,k,0} = \{(x_2, K, t) : t = 0, K = K(x_1, x_2, \sigma_0), \sigma_0(0) = 0, x = \text{colon}(x_1, x_2) \in \Omega_{10}\},$$

Рис. 9

Рис. 10

которое является отображением множества Ω_{10} оператором сдвига по траекториям системы (8) через время T_1 .

Пусть $U_{x2,k,0} = P_{T_1} \circ T_{x2,k}$, где $T_{x2,k}$ — оператор сдвига по траекториям системы (8), P_{T_1} — параллельный перенос, тогда $U_{x2,k,0}(\Omega_{x2,k,0}) = \Omega_{x2,k,T_1}$, $\bar{P}_{z_{10}}(\Omega_{x2,k,0}) = \bar{\Omega}_{x2,k,0}$, $\bar{P}_{z_{10}}(\Omega_{x2,k,T_1}) = \bar{\Omega}_{x2,k,T_1}$, $\bar{P}_{z_{10}}$ — параллельный перенос,

$$\bar{P}_{z_{10}} \begin{pmatrix} x_2 \\ K \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_{12} \\ K - K_{10} \\ t \end{pmatrix}.$$

Для геометрической интерпретации полученных множеств выберем систему координат с совмещенными осями OX_1 , OX_2 и вертикальной осью OK_z для кривизны. На рис. 9 изображены множества $\bar{\Omega}_{x1,k,0}$, $\bar{\Omega}_{x1,k,T_1}$, $\bar{\Omega}_{x2,k,0}$, $\bar{\Omega}_{x2,k,T_1}$. Численными методами показывается, что $\bar{\Omega}_{x1,k,T_1} \cap \bar{\Omega}_{x2,k,T_1} \subset \bar{\Omega}_{x1,k,0}$. Предложенные отображения $U_{x1,k,0}$, $U_{x2,k,0}$ дают возможность их использования для численного определения начальных условий и периода цикла системы (8) [6].

На рис. 10 представлены множества $\bar{\Omega}_{x1,k,0}^-$, $\bar{\Omega}_{x1,k,T_4}^-$, $\bar{\Omega}_{x2,k,0}^-$, $\bar{\Omega}_{x2,k,T_4}^-$ полученные для неустойчивого цикла z_{40}^- , и множества $\Omega_{40} = \{(x, t) : (x_1 - x_{41})^2 + (x_2 - x_{42})^2 = R^2, t = 0\}$ где $R = 0,1$, а x_{41} , x_{42} — начальные условия неустойчивого цикла z_{40}^- . Численными методами показываются включения $\bar{\Omega}_{x1,k,T_4}^- \cap \bar{\Omega}_{x2,k,T_4}^- \subset \bar{\Omega}_{x1,k,0}^-$, $\bar{\Omega}_{x1,k,T_4}^- \cap \bar{\Omega}_{x2,k,T_4}^- \subset \bar{\Omega}_{x2,k,0}^-$, это дает возможность для неустойчивого цикла определить отображения переводящие окрестности цикла в себя, что позволяет предложить численный подход определения начальных условий неустойчивого цикла [4–6].

Включение в систему (2) уравнения, содержащего кривизну, дает возможность использовать характеристики устойчивости кривизны циклов в качестве критерия выбора режимов скрытой синхронизации для системы фазовой автоподстройки частоты [7]. Для определения характеристик устойчивости кривизны предлагается использовать показатели Ляпунова [8].

$$\lambda_N = \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{i=1}^N \log_2 \frac{d(\Omega_{x1,k,t_i})}{d(\Omega_{x1,k,t_{i-1}})}, \quad (9)$$

где $d(\Omega_{x1,k,t_i})$ — площадь множества Ω_{x1,k,t_i} , $d(\Omega_{x1,k,t_{i-1}})$ — площадь множества $\Omega_{x1,k,t_{i-1}}$, множество Ω_{x1,k,t_i} является отображением множества $\Omega_{x1,k,t_{i-1}}$ оператором сдвига $T_{x1,k}$ по траекториям системы (8) в координатах (x_1, K, t) через время $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Найдём для устойчивого цикла

$z_{10}(t)$ показатели Ляпунова в координатах (x_1, K, t) , в качестве t_i возьмем $t_i = (i-1)T_1$, $i = \overline{1, 7}$, $T_1 = 4,5866$ — период цикла $z_{10}(t)$. Численными методами найдем площади множеств Ω_{x_1, k, t_i} , $i = \overline{1, 7}$. Значения λ_N , полученные с использованием (9), содержатся в таблице 3. Аналогично для цикла $z_{10}(t)$, численными методами найдем площади множеств Ω_{x_2, k, t_i} , $i = \overline{1, 7}$ в координатах (x_2, K, t) , полученные значения содержатся в таблице 4.

В таблицах 3, 4 приведены значения показателей Ляпунова для всех устойчивых циклов фазовой системы (2), с использованием окрестностей циклов в координатах (x_1, K, t) , (x_2, K, t) .

$z_i(t)$	$x_1(t), K_{z_i}(t)$	λ_i					
		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$z_{10}(t)$	$x_1(t), K_{z_1}(t)$	-0,3211	-0,1128	-0,0747	-0,0577	-0,0476	-0,0410
$z_{20}(t)$	$x_1(t), K_{z_2}(t)$	-0,8026	-0,2871	-0,1554	-0,1113	-0,0885	-0,0742
$z_{30}(t)$	$x_1(t), K_{z_3}(t)$	-0,4754	-0,3934	-0,1647	-0,1062	-0,0296	-0,0657

Таблица 3

$z_i(t)$	$x_2(t), K_{z_i}(t)$	λ_i					
		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$z_{10}(t)$	$x_2(t), K_{z_1}(t)$	-0,3209	-0,1130	-0,0749	-0,0579	-0,0478	-0,0411
$z_{20}(t)$	$x_2(t), K_{z_2}(t)$	-0,8024	-0,2871	-0,1555	-0,1114	-0,0886	-0,0743
$z_{30}(t)$	$x_2(t), K_{z_3}(t)$	-0,4753	-0,3932	-0,1646	-0,1061	-0,0802	-0,0656

Таблица 4

Показатели Ляпунова для устойчивых циклов являются отрицательными величинами, при этом наименьшее значение $\lambda_6 = -0,0743$ определено для устойчивого цикла $z_{20}(t)$ в координатах (x_2, K, t) . Полученные результаты позволяют использовать показатели Ляпунова в качестве критерия качества режимов скрытой синхронизации для систем фазовой автоподстройки частоты.

3. Заключение. В работе предложено расширение исходной системы дифференциальных уравнений за счет включения в нее уравнения производной кривизны решения. Расширение исходной системы дифференциальных уравнений позволило в новом фазовом пространстве получить периодические решения одной из координат, которой является кривизна. С использованием понятия кривизны цикла проведен анализ близости циклов фазовой и нефазовой систем. Предложено использование вращения векторного поля расширенной системы для определения начальных значений и периодов устойчивых и неустойчивых циклов. Определены показатели Ляпунова для кривизны циклов в случае мультистабильности. Практическая значимость полученных результатов заключается в использовании кривизны при выборе режимов скрытой синхронизации в случае мультистабильности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов В. В. Условия существования периодического решения дифференциального уравнения второго порядка с квадратичной нелинейной частью // Вестн. РАЕН. — 2018. — 18, № 4. — С. 3–7.
2. Леонов Г. А., Буркин И. М., Шепелявый А. И. Частотные методы в теории колебаний. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
3. Лискина Е. Ю. Условия существования ненулевых периодических решений нелинейной автономной динамической системы второго порядка в случае пары нулевых собственных значений матрицы системы линейного приближения // Вестн. РАЕН. — 2017. — 17, № 4. — С. 38–43.
4. Мамонов С. С., Харламова А. О. Вынужденная синхронизация систем фазовой автоподстройки с запаздыванием // Вестн. Рязан. гос. радиотехн. ун-та. — 2017. — 62. — С. 26–35.

5. *Мамонов С. С., Харламова А. О.* Определение условий существования предельных циклов первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2017. — 19, № 1. — С. 67–76.
6. *Мамонов С. С., Харламова А. О., Ионов И. В.* Колебательно-вращательные циклы фазовой системы дифференциальных уравнений// Вестн. РАЕН. — 2018. — 18, № 4. — С. 51–57.
7. *Мамонов С. С., Харламова А. О., Ионов И. В.* Кривизна колебательных циклов фазовых систем// Вестн. РАЕН. — 2019. — 19, № 2. — С. 105–110.
8. *Мун Ф.* Хаотические колебания. — М.: Мир, 1990.

Мамонов Сергей Станиславович

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина

E-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Ионов Ирина Викторовна

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина

E-mail: i.ionova@365.rsu.edu.ru

Харламова Анастасия Олеговна

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина

E-mail: a.harlamova@365.rsu.edu.ru