Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Никитина, В. И. Ухоботов, Дискретная линейная задача управления с терминальным множеством в форме кольца при наличии помехи, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 186, 102–107

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-102-107>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:58:30

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 186 (2020). С. 102–107
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-186-102-107

УДК 517.977

ДИСКРЕТНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ В ФОРМЕ КОЛЬЦА ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХИ

© 2020 г. С. А. НИКИТИНА, В. И. УХОВОТОВ

Аннотация. В статье рассматривается дискретная динамическая управляемая система с помехой. Требуется, чтобы в момент окончания процесса управления фазовая точка содержалась в заданном множестве, имеющем форму кольца. Записан оператор программного поглощения, с помощью которого сформулированы условия на множество начальных положений, при которых гарантируется выполнение требуемого включения в заданный момент времени.

Ключевые слова: дискретная система, задача управления, терминальное множество в форме кольца.

DISCRETE LINEAR CONTROL PROBLEM WITH THE RING-SHAPED TERMINAL SET IN THE PRESENCE OF NOISE

© 2020 S. A. NIKITINA, V. I. UKHOVOTOV

ABSTRACT. In this paper, we consider a discrete dynamic control system with noise. It is required that at the terminal moment of process the phase point is contained in a given ring-shaped set. We find the operator of program absorption, which allows one to formulate conditions for the set of initial positions that guarantee the fulfillment of the required inclusion at a given moment of time.

Keywords and phrases: discrete system, control problem, ring-shaped terminal set.

AMS Subject Classification: 93C41, 93C55

1. Введение. В работе [5] рассмотрена однотипная дифференциальная игра с геометрическими ограничениями на управления игроков и с фиксированным моментом окончания, в которой терминальное множество имеет форму кольца. Были записаны правила выполнения операций суммы и геометрической разности кольца и шара в n -мерном пространстве.

В статье [6] для линейной дифференциальной игры импульсной встречи получен максимальный стабильный мост, ведущий в конечный момент времени на терминальное множество, заданное в форме кольца. Стабильный мост определяется функциями внешнего и внутреннего радиусов, которые вычислены в явном виде. В [7] для данной игры были построены оптимальные управления игроков. В [1] предложен новый подход к построению управления первого игрока, который позволяет сократить вычислительные процедуры.

В работе [8] рассмотрена дискретная линейная задача управления с помехой и одномерной целью. Условие одномерности означает, что модуль значения заданной линейной функции от

фазовых переменных в фиксированный момент окончания процесса управления не должен превосходить заданного числа. Для этой задачи получены необходимые и достаточные условия, выполнение которых гарантирует существование допустимого управления, которое обеспечивает достижение цели при любой допустимой реализации помехи.

В статье [2] рассмотрена задача управления дискретной линейной системой для случая, когда терминальное множество и вектограмма управления являются многогранниками специального вида, которые задаются с помощью системы линейных неравенств. Получены условия на множество начальных положений, при которых гарантируется достижение цели в момент окончания процесса управления.

В данной статье продолжается исследование, начатое в указанных работах. Рассмотрена дискретная модель управляемого процесса с фиксированным моментом окончания, в которой терминальное множество имеет форму кольца.

Дискретные процессы управления возникают, как правило, при решении прикладных задач [4, 9]. Это связано с тем, что зачастую информация о состоянии процесса поступает в дискретные моменты времени, а управление осуществляется по шагам.

2. Пример. Вначале рассмотрим в качестве примера задачу управления запасами [4]. Предположим, что некоторое производственное объединение может выпускать товары двух видов.

Пусть $x(k) = (x_1(k); x_2(k))$ — вектор количества выпускаемых товаров первого и второго вида, имеющихся в наличии на складе к концу k -го периода, $u(k) = (u_1(k); u_2(k))$ — вектор интенсивностей (скорость производства), $s(k) = (s_1(k); s_2(k))$ — вектор количества товаров, отгруженных со склада в k -й период (определяется спросом на товары).

Уравнение, описывающее дискретный процесс, имеет вид

$$x(k+1) = x(k) + u(k) - s(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1)$$

Считаем, что $N \geq 1$ — число шагов дискретного процесса задано.

Пусть к концу N -го периода требуется, чтобы на складе количество товара второго вида было не меньше заданной величины ϵ_1 и не больше заданной величины ϵ_2 , то есть

$$\epsilon_1 \leq x_2(N) \leq \epsilon_2.$$

В общем случае условие на вектор $x(N)$ может определяться спросом на производимые товары или быть планом производства.

Зададим вектор $\psi^* = (0; 1)$, тогда цель процесса управления запишется следующим образом

$$\epsilon_1 \leq \langle x(N), \psi^* \rangle \leq \epsilon_2. \quad (2)$$

Здесь с помощью $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$.

Окончательно задача управления запасами будет сформулирована следующим образом. Для управляемого дискретного процесса (1) определить условия на начальный запас товара $x(0)$, при которых будет выполнено (2).

3. Дискретная динамическая задача управления. Пусть задан дискретный конфликтно-управляемый процесс [4, 8, 9]

$$x(t+1) = A(t)x(t) - f(t) + \phi, \quad (3)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t = 0, 1, \dots, N$.

Здесь при каждом $t = 0, \dots, N$ $A(t)$ — матрица соответствующей размерности; $f \in F(t) \subset \mathbb{R}^n$ — управление, $\phi(t) \in \Phi(t) \subset \mathbb{R}^n$ — помеха; $F(t)$, $\Phi(t)$ являются связными компактами.

Заданы вектор ψ^* и числа $\alpha, \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}$, причем $0 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2$. Цель выбора управления f заключается в осуществлении неравенства

$$\epsilon_1 \leq |\langle \psi^*, x(N) \rangle - \alpha| \leq \epsilon_2. \quad (4)$$

Определим при $t = 0, \dots, N$ вектор $\psi(t)$ следующей рекуррентной формулой

$$\psi(t) = A^T(t)\psi(t+1), \quad \psi(N) = \psi^*.$$

Из (3) получим, что

$$\langle \psi(t+1), x(t+1) \rangle = \langle \psi(t), x(t) \rangle - \langle \psi(t+1), f \rangle + \langle \psi(t+1), \phi \rangle.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} a_-(t) &= \min_f \langle \psi(t+1), f \rangle, & a_+(t) &= \max_f \langle \psi(t+1), f \rangle, & f &\in F(t); \\ b_-(t) &= \min_f \langle \psi(t+1), \phi \rangle, & b_+(t) &= \max_f \langle \psi(t+1), \phi \rangle, & \phi &\in \Phi(t); \end{aligned}$$

Тогда получим, что

$$\begin{aligned} \langle \psi(t+1), f \rangle &= \frac{a_+(t) + a_-(t)}{2} + a(t)u, & |u| &\leq 1, & a(t) &= \frac{a_+(t) - a_-(t)}{2}, \\ \langle \psi(t+1), \phi \rangle &= \frac{b_+(t) + b_-(t)}{2} + b(t)v, & |v| &\leq 1, & b(t) &= \frac{b_+(t) - b_-(t)}{2}. \end{aligned}$$

Определим набор чисел $\delta(t) \in \mathbb{R}$, $t = 0, \dots, N$

$$\delta(t) = \delta(t+1) - \frac{a_+(t) + a_-(t)}{2} + \frac{b_+(t) + b_-(t)}{2}, \quad \delta(N) = 0$$

и перейдем к новой переменной

$$z(t) = \langle \psi(t), x(t) \rangle - \alpha + \delta(t).$$

Тогда управляемый процесс можно записать следующим образом

$$z(t+1) = z(t) - a(t)u + b(t)v, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 1.$$

При любых числах $0 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2$ введем в рассмотрение кольцо

$$S(\epsilon_1; \epsilon_2) = \{z \in \mathbb{R}^n : \epsilon_1 \leq |z| \leq \epsilon_2\}.$$

Тогда цель (4) процесса управления будет

$$z(N) \in S(\epsilon_1; \epsilon_2). \quad (5)$$

4. Постановка задачи. Рассмотрим дискретный процесс вида

$$z(t+1) = z(t) - a(t)u + b(t)v, \quad (6)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $|u(t)| \leq 1$, $|v(t)| \leq 1$, $a(t) \geq 0$, $b(t) \geq 0$, $t = 0, \dots, N$. Здесь $u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}^n$ — значения управления, $v(t) \in V(t) \subset \mathbb{R}^n$ — значения помехи. Считаем, что $N \geq 1$ — число шагов (длительность) процесса управления задано.

Заданы два числа $0 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2$. Цель управления процессом (6) заключается в осуществлении включения (5) в конечный момент времени.

Управление происходит следующим образом. В начальный момент времени задано начальное состояние $z(0)$. Исходя из начального положения, происходит реализация помехи $v(0)$ из множества $V(0)$. Затем выбирается управление $u(0)$ из множества $U(0)$. Для начального условия $z(0)$ и для выбранной допустимой пары $v(0), u(0)$ по формуле (6) реализуется состояние $z(1)$. Оно принимается за начальное. Далее управление строится по правилу, описанному выше.

Требуется определить множество начальных положений $z(0)$, откуда возможно осуществить (5) при любых допустимых реализациях помехи.

5. Оператор программного поглощения. Сначала введем в рассмотрение геометрическую разность двух множеств A и B из пространства $\mathbb{R}^n$ [3]

$$A -^* B = \{z \in \mathbb{R}^n : z + B \subset A\}.$$

Далее обозначим

$$S = \{z \in \mathbb{R}^n : |z| \leq 1\}.$$

Введем оператор T_k , который каждому числу $k = 0, 1, \dots, N$ и каждому множеству $Y \subset \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие множество $T_k(Y)$, определяемое следующим образом. Точка $z \in T_k(Y)$ тогда

и только тогда, когда для любого управления $v(k) \in V(k)$ существует управление $u(k) \in U(k)$ такое, что

$$z(k+1) = z(k) - a(k)u(k) + b(k)v(k) \in Y.$$

Отсюда получим, что

$$T_k(Y) = (Y + a(k)S) \overset{*}{-} b(k)S. \quad (7)$$

Положим, что $T_k(\emptyset) = \emptyset$.

Обозначим

$$\Omega_m = T_m(T_{m+1}(\dots(T_{N-1}(Y))\dots)), \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \quad (8)$$

Используя введенный оператор программного поглощения, получим, что множество начальных положений, откуда первый игрок сможет осуществить включение (5), запишется в виде Ω_0 .

Рассмотрим случай, когда множество $Y = S(\epsilon_1; \epsilon_2)$. Для определения оператора программного поглощения (7) в этом случае потребуются следующие леммы [5].

Лемма 1. Для любых чисел $0 \leq \delta \leq \epsilon$ и $\sigma \geq 0$ выполнено равенство

$$S(\delta; \epsilon) + \sigma S = S(\max(0; \delta - \sigma); \epsilon + \sigma).$$

Лемма 2. Для любых чисел $0 \leq \delta \leq \epsilon$ и $\sigma \geq 0$ выполнено равенство

$$S(\delta; \epsilon) \overset{*}{-} \sigma S = \begin{cases} S(f(\delta; \sigma); \epsilon - \sigma), & \text{при } f(\delta; \sigma) + \sigma \leq \epsilon, \\ \emptyset, & \text{при } f(\delta; \sigma) + \sigma > \epsilon. \end{cases}$$

где $f(0; \sigma) = 0$ при любом $\sigma \geq 0$; $f(\delta; \sigma) = \delta + \sigma$ при любых $\delta > 0$ и $\sigma \geq 0$.

Найдем (7) при $0 \leq k \leq N$, когда $Y = S(\epsilon_1; \epsilon_2)$.

Теорема 1. Для любых $0 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2$ и $0 \leq k \leq N$ верно

$$T_k(S(\epsilon_1; \epsilon_2)) = \begin{cases} S(h_k(\epsilon_1); \epsilon_2 + a(k) - b(k)), & \text{при } h_k(\epsilon_1) \leq \epsilon_2 + a(k) - b(k), \\ \emptyset, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где

$$h_k(\epsilon_1) = \begin{cases} \epsilon_1 - a(k) + b(k), & \text{при } \epsilon_1 - a(k) > 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Используем лемму 11, получим

$$T_k(S(\epsilon_1; \epsilon_2)) = (S(\epsilon_1; \epsilon_2) + a(k)S) \overset{*}{-} b(k)S = S(\max(0; \epsilon_1 - a(k)); \epsilon_2 + a(k)) \overset{*}{-} b(k)S.$$

Далее, применяя лемму 2, запишем

$$T_k(S(\epsilon_1; \epsilon_2)) = \begin{cases} \emptyset, & \text{при } f(\max(0; \epsilon_1 - a(k)); b(k)) > \epsilon_2 + a(k) - b(k), \\ S(f(\max(0; \epsilon_1 - a(k)); b(k)); \epsilon_2 + a(k) - b(k)), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из последнего выражения следует утверждение теоремы. $\square$

6. Нахождение множества Ω_0 . Найдем сначала множество Ω_m .

Теорема 2. Для любого числа $0 \leq m \leq N-1$ выполнено

$$\Omega_m = \begin{cases} S(\gamma_1(m); \gamma_2(m)), & \text{при } \max_{m \leq j \leq N-1} (\gamma_1(j) - \gamma_2(j)) < 0, \\ \emptyset, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь обозначено

$$\gamma_1(m) = \begin{cases} 0, & \text{при } \min \left(\epsilon_1 - a(N-1); \dots; \epsilon_1 - \sum_{i=m}^{N-1} a(i) + \sum_{i=m+1}^{N-1} b(i) \right) \leq 0 \\ \epsilon_1 - \sum_{i=m}^{N-1} (a(i) - b(i)), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\gamma_2(m) = \epsilon_2 + \sum_{i=m}^{N-1} (a(i) - b(i)), \quad m = 0, \dots, N-1.$$

Доказательство. Согласно (8) множество $\Omega_{N-1} = T_{N-1}(S(\epsilon_1; \epsilon_2))$.

Из определения оператора $T_k(Y)$ и теоремы 1 получим, что

$$\Omega_{N-1} = \begin{cases} S(h_{N-1}(\epsilon_1); \epsilon_2 + a(N-1) - b(N-1)) & \text{при } h_{N-1}(\epsilon_1) \leq \epsilon_2 + a(N-1) - b(N-1), \\ \emptyset & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$h_{N-1}(\epsilon_1) = \begin{cases} \epsilon_1 - a(N-1) + b(N-1) & \text{при } \epsilon_1 - a(N-1) > 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее запишем $\Omega_{N-2} = T_{N-2}(T_{N-1}(S(\epsilon_1; \epsilon_2)))$.

Снова воспользуемся определением оператора $T_k(Y)$ и результатом теоремы 1.

Тогда

$$\begin{aligned} \Omega_{N-2} &= S\left(\max(0; h_{N-1}(\epsilon_1) - a(N-2)); \epsilon_2 + a(N-1) - b(N-1) + a(N-2)\right)^* - b(N-2)S = \\ &= \begin{cases} S\left(f\left(\max(0; h_{N-1}(\epsilon_1) - a(N-2)); b(N-2)\right); \right. \\ \quad \left. \epsilon_2 + a(N-1) - b(N-1) + a(N-2) - b(N-2)\right) \\ \quad \text{при } f\left(\max(0; h_{N-1}(\epsilon_1) - a(N-2)); b(N-2)\right) \leq \\ \quad \leq \epsilon_2 + a(N-1) - b(N-1) + a(N-2) - b(N-2), \\ \emptyset & \text{в противном случае} \end{cases} \\ &= \begin{cases} S(\gamma_1(N-2); \gamma_2(N-2)) & \text{при } \max(\gamma_1(N-1) - \gamma_2(N-1); \gamma_1(N-2) - \gamma_2(N-2)) < 0, \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Продолжая предыдущие рассуждения, получим утверждение теоремы. $\square$

Следовательно, для того, чтобы из начального положения $z(0)$ осуществить включение (5), должны выполняться неравенства

$$\gamma_1(0) \leq |z(0)| \leq \gamma_2(0)$$

при условии

$$\max_{0 \leq j \leq N-1} (\gamma_1(j) - \gamma_2(j)) < 0,$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1(0) &= \begin{cases} 0 & \text{при } \min\left(\epsilon_1 - a(N-1); \dots; \epsilon_1 - \sum_{i=0}^{N-1} a(i) + \sum_{i=1}^{N-1} b(i)\right) \leq 0, \\ \epsilon_1 - \sum_{i=0}^{N-1} (a(i) - b(i)) & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \gamma_2(0) &= \epsilon_2 + \sum_{i=0}^{N-1} (a(i) - b(i)). \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Измestъев И. В., Ухоботов В. И. Об одном подходе к построению управления первого игрока в однотипной дифференциальной игре с терминальным множеством в форме кольца // Челябинск. физ.-мат. ж. — 2018. — 3, № 2. — С. 144–152.
2. Никитина С. А., Скорынин А. С., Ухоботов В. И. Об одной задаче управления дискретной системой // Челябинск. физ.-мат. ж. — 2018. — 3, № 3. — С. 311–318.
3. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры, II // Докл. АН СССР. — 1967. — 175, № 4. — С. 764–766.
4. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. — М.: Наука, 1973.

5. *Ухоботов В. И.* Однотипная дифференциальная игра с терминальным множеством в форме кольца// в кн.: Некоторые задачи динамики и управления. — Челябинск: Челябинск. гос. ун-т, 2005. — С. 108–123.
6. *Ухоботов В. И., Изместьев И. В.* Однотипная задача импульсной встречи в заданный момент времени с терминальным множеством в форме кольца// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2015. — 25, № 2. — С. 197–211.
7. *Ухоботов В. И., Изместьев И. В.* Синтез управлений в однотипной игровой задаче импульсной встречи в заданный момент времени с терминальным множеством в форме кольца// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2017. — 27, № 1. — С. 69–85.
8. *Ухоботов В. И., Стабулит И. С.* Динамическая задача управления при наличии помехи и с заданным множеством моментов коррекции// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2018. — 28, № 1. — С. 74–81.
9. *Шорилов А. Ф.* Алгоритм адаптивного минимаксного управления для процесса преследования-уклонения в дискретных системах// Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2000. — 6, № 2. — С. 515–535.

Никитина Светлана Анатольевна
Челябинский государственный университет
E-mail: nikitina@csu.ru

Ухоботов Виктор Иванович
Челябинский государственный университет
E-mail: ukh@csu.ru