Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Петров, Н. А. Соловьева, Многократная поимка заданного числа убегающих в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 186, 108–115

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-108-115>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 02:57:29

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 186 (2020). С. 108–115
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-186-108-115

УДК 517.977.8

МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА ЗАДАННОГО ЧИСЛА УБЕГАЮЩИХ В РЕКУРРЕНТНОМ ПРИМЕРЕ Л. С. ПОНТРЯГИНА

© 2020 г. Н. Н. ПЕТРОВ, Н. А. СОЛОВЬЕВА

Аннотация. Рассматривается обобщенный нестационарный пример Понтрягина со многими участниками при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков. Получены достаточные условия многократной поимки группой преследователей заданного числа убегающих, при условии, что убегающие используют программные стратегии, а каждый из преследователей ловит не более одного убегающего.

Ключевые слова: дифференциальная игра, преследователь, убегающий, рекуррентная функция.

MULTIPLE CAPTURE OF A GIVEN NUMBER OF EVADERS IN L. S. PONTRYAGIN'S RECURRENT EXAMPLE

© 2020 N. N. PETROV, N. A. SOLOV'YEV

ABSTRACT. We consider the generalized nonstationary Pontryagin example for a game with many players and the same dynamic and inertial capabilities of the players. We obtain sufficient conditions for the multiple capture of a given number of evaders by a group of pursuers, provided that the evaders use program strategies and each of the pursuers catches at most one evader.

Keywords and phrases: differential game, pursuer, evader, recurrent function.

AMS Subject Classification: 49N75, 91A06

1. Введение. Рассматривается обобщенный нестационарный пример Л. С. Понтрягина [5, 7, 14, 18] со многими участниками при одинаковых динамических и инерционных возможностях всех игроков. Задача простого группового преследования с равными возможностями всех участников впервые рассматривалась в [15], были получены необходимые и достаточные условия поимки одного убегающего. Однократная поимка в примере Понтрягина рассматривалась, в частности, в [1, 2].

Для задачи с простым движением и равными возможностями всех участников в [6] были представлены необходимые и достаточные условия многократной поимки. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования рассматривалась в [3]. В [10] получены достаточные условия многократной поимки в стационарном примере Понтрягина с фазовыми ограничениями. В [4] получены достаточные условия многократной поимки в нестационарном примере Понтрягина при условии, что некоторые функции являются почти периодическими, а терминальные множества — начало координат.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.5211.2017/8.9) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-51-415005).

Задача о поимке заданного числа убегающих в задаче простого преследования, при условии, что множество допустимых управлений — шар единичного радиуса с центром в нуле, терминальные множества — начала координат, убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего, представлена в [12], где были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования. Общий случай задачи о поимке заданного числа убегающих в случае простого преследования рассматривался в [16].

Достаточные условия поимки заданного числа убегающих в стационарном примере Л. С. Понтрягина и линейных рекуррентных дифференциальных играх получены в [9, 13].

В данной работе рассматриваемые ранее отдельно задачи о многократной поимке и поимке заданного числа убегающих объединены в одну задачу. Целью группы преследователей является поимка не менее q убегающих, причем каждого убегающего должны поймать не менее чем r преследователей. В предположении, что убегающие используют программные стратегии, а каждый из преследователей ловит не более одного убегающего, получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. Такая ситуация может возникнуть тогда, когда требуется «уничтожить» убегающего, а «соприкосновение» одного преследователя с убегающим не гарантирует этого.

Отметим, что в случае простого движения задача в такой постановке рассмотрена в работе [11].

2. Постановка задачи. В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, m)$ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и m убегающих $E_1, \dots, E_m$, описываемая системой вида

$$\begin{aligned} z_{ij}^{(l)} + a_1(t)z_{ij}^{(l-1)}(t) + \dots + a_l(t)z_{ij} &= u_i - v_j, \\ z_{ij}^{(p)}(t_0) &= z_{ij}^p, \quad p = 0, \dots, l-1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $z_{ij}, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$, $j \in J = \{1, \dots, m\}$, функции $a_1(t), \dots, a_l(t)$ непрерывны на $[t_0, +\infty)$, V — строго выпуклый компакт, l — натуральное число, $l \geq 1$. Обозначим через $z^0 = \{z_{ij}^p, i \in I, j \in J, p = 0, \dots, l-1\}$ вектор начальных позиций. Назовем предысторией $v_t(\cdot)$ управления $v(\cdot)$ убегающего E в момент t , $t \in [t_0, +\infty)$, сужение функции $v(\cdot)$ на $[t_0, t]$. Управление $v(\cdot)$ убегающего назовем допустимым, если $v(t) \in V$ для всех $t \geq t_0$.

Через $\varphi_q(t, s)$ ($t_0 \leq s \leq t$), $q = 0, \dots, l-1$ обозначим решение задачи Коши

$$\begin{aligned} w^{(l)} + a_1(t)w^{(l-1)} + \dots + a_l(t)w &= 0, \\ w(s) = 0, \dots, w^{(q-1)}(s) = 0, \quad w^{(q)}(s) &= 1, \quad w^{(q+1)}(s) = 0, \dots, w^{(l-1)}(s) = 0. \end{aligned}$$

Пусть далее

$$\xi_{ij}(t) = \varphi_0(t, t_0)z_{ij}^0 + \dots + \varphi_{l-1}(t, t_0)z_{ij}^{l-1}.$$

Считаем, что $\xi_{ij}(t) \neq 0$ для всех $i \in I$, $j \in J$, $t \geq t_0$, ибо если $\xi_{ij}(\tau) = 0$ при некоторых i, j, τ , то преследователь P_i ловит убегающего E_j , полагая $u_i(t) = v_j(t)$.

Определение 1 (см. [8]). Функция $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной по Зубову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $a, t \in \mathbb{R}^1$ существует $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$, для которых справедливо неравенство

$$\|f(t + \tau(t)) - f(t)\| < \varepsilon.$$

Функция $f: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной на $[t_0, \infty)$, если существует рекуррентная функция $F: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^k$ такая, что $f(t) = F(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Предположение 1. Существуют непрерывные на $[t_0, +\infty)$ функции $\gamma_{ij}(t)$, $\eta_{ij}(t)$, обладающие следующими свойствами:

- (1) функции $\eta_{ij}(t)$ рекуррентны на $[t_0, +\infty)$ для всех $i \in I$, $j \in J$;
- (2) $\gamma_{ij}(t) > 0$ для всех $t \geq t_0$, $i \in I$, $j \in J$;
- (3) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_{ij}(t)\xi_{ij}(t) = \eta_{ij}(t)$ для всех $i \in I$, $j \in J$;

$$(4) \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_{ij}(t) \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(t, s)| ds = +\infty \text{ для всех } i \in I, j \in J.$$

Обозначим далее

$$\begin{aligned} D_\varepsilon(a) &= \{z \in \mathbb{R}^k : \|z - a\| \leq \varepsilon\}, \quad H_{ij} = \{\eta_{ij}(t), t \in [t_0, +\infty)\}, \\ r(t, s) &= \begin{cases} 1, & \varphi_{l-1}(t, s) \geq 0, \\ -1, & \varphi_{l-1}(t, s) < 0, \end{cases} \quad \lambda(v, \mu, h_{ij}) = \begin{cases} \sup\{\lambda \geq 0 : -\lambda \mu h_{ij} \in V - v\}, & \text{если } h_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{если } h_{ij} = 0, \end{cases} \\ G_{ij}(t, h_{ij}, v(\cdot)) &= \gamma_{ij}(t) \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(t, s)| \lambda(v(s), r(t, s), h_{ij}) ds, \\ \Omega_N(p) &= \{(i_1, \dots, i_p) : i_1, \dots, i_p \in N \text{ и попарно различные}\}. \end{aligned}$$

3. Многократная поимка одного убегающего. Пусть $m = 1$, индекс единица в данном разделе опускаем.

Определение 2. Будем говорить, что задана квазистратегия U_i преследователя P_i , если определено отображение $U_i(t, z^0, v_{jt}(\cdot), j \in J)$, ставящее в соответствие начальному состоянию z^0 , моменту t и произвольным предысториям $v_{jt}(\cdot), j \in J$, убегающих $E_j, j \in J$, измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в V .

Определение 3. В игре $\Gamma(n, 1)$ происходит r -кратная поимка (при $r = 1$ поимка), если существуют момент $T > t_0$, квазистратегии $U_1, \dots, U_n$ преследователей $P_1, \dots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot), v(t) \in V$, для всех $t \in [t_0, T]$ существуют моменты времени $\tau_1, \dots, \tau_r \in [t_0, T]$ и попарно различные индексы $i_1, \dots, i_r \in I$, для которых $z_{i_l}(\tau_l) = 0$ для всех $l = 1, \dots, r$.

Предположение 2. Существуют такие $h_i^0 \in H_i, i \in I$, что $h_i^0 \neq 0$ для всех $i \in I$ и

$$\min_{\mu \in \{-1, 1\}} \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{i \in \Lambda} \lambda(v, \mu, h_i^0) > 0.$$

Лемма 1. Пусть выполнено предположение 2. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любых $h_i \in D_{\varepsilon_0}(h_i^0), i \in I$, справедливо неравенство

$$\min_{\mu \in \{-1, 1\}} \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{i \in \Lambda} \lambda(v, \mu, h_i) > 0.$$

Доказательство. Из [18, лемма 1.3.13] следует, что при фиксированном μ функция $\lambda(v, \mu, h)$ непрерывна на множестве $V \times B$, где B произвольный компакт, не содержащий нуля. Поэтому непрерывными будут функции

$$\begin{aligned} g_\Lambda(v, \mu, z_1, \dots, z_n) &= \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(v, \mu, z_\alpha), \quad g(v, \mu, z_1, \dots, z_n) = \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} g_\Lambda(v, \mu, z_1, \dots, z_n), \\ f(\mu, z_1, \dots, z_n) &= \min_{v \in V} g(v, \mu, z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

Из непрерывности функции f следует справедливость утверждения леммы. $\square$

Следствие 1. Пусть выполнено предположение 2. Тогда существуют такие $\delta > 0, \varepsilon > 0$, что для всех $h_i \in D_\varepsilon(h_i^0), i \in I$, справедливо неравенство

$$\min_{\mu \in \{-1, 1\}} \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{i \in \Lambda} \lambda(v, \mu, h_i) \geq \delta. \quad (2)$$

В дальнейшем считаем, что $\varepsilon_0 > 0$ выбрано в соответствии с условиями следствия 1. Введем обозначение

$$D = D_{\varepsilon_0}(h_1^0) \times D_{\varepsilon_0}(h_2^0) \times \dots \times D_{\varepsilon_0}(h_n^0).$$

Лемма 2. Пусть выполнены предположения 1, 2. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ найдется такой момент $T(\varepsilon) > t_0$, что для всякого $t > T(\varepsilon)$ найдутся моменты $\tau_i > t$ для которых для всех $i \in I$ справедливо включение $\gamma_i(\tau_i)\xi_i(\tau_i) \in D_\varepsilon(h_i^0)$.

Справедливость данного утверждения следует из пп. 1, 3 предположения 1.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1, 2. Тогда существует такое $T > t_0$, что для любого допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E и любых $h \in D$ найдется множество $\Lambda \in \Omega_I(r)$, для которого для всех $i \in \Lambda$ выполнены неравенства $G_i(T, h_i, v(\cdot)) \geq 1$.

Доказательство. Пусть $h \in D$, $v(\cdot)$ — допустимое управление убегающего E . Тогда, используя (2), получаем, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{i \in \Lambda} G_i(t, h_i, v(\cdot)) &= \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{i \in \Lambda} \gamma_i(t) \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(t, s)| \lambda(v(s), r(t, s), h_i) ds \geq \\ &\geq \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \gamma_i(t) \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(t, s)| \min_{i \in \Lambda} \lambda(v(s), r(t, s), h_i) ds \geq \\ &\geq \frac{\gamma_i(t)}{C_n^m} \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(t, s)| \sum_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{i \in \Lambda} \lambda(v(s), r(t, s), h_i) ds \geq \\ &\geq \frac{\gamma_i(t)}{C_n^m} \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(t, s)| \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{i \in \Lambda} \lambda(v(s), r(t, s), h_i) ds \geq \frac{\delta \gamma_i(t)}{C_n^m} \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(t, s)| ds. \end{aligned}$$

Из предположения 1 следует, что существуют такой момент $T > t_0$, что

$$\frac{\delta \gamma_i(t)}{C_n^m} \int_{t_0}^T |\varphi_{l-1}(T, s)| ds \geq 1.$$

Теорема доказана. □

Определим число

$$T(z^0) = \min \left\{ t \geq t_0 \mid \min_{v(\cdot)} \min_{h \in D} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{i \in \Lambda} G_i(t, h_i, v(\cdot)) \geq 1 \right\}.$$

В силу теоремы 1 имеем $T(z^0) < +\infty$.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1, 2 и существуют такие моменты $\tau_i > T(z^0)$, что

- (1) $\gamma_i(\tau_i)\xi_i(\tau_i) \in D_\varepsilon(h_i^0)$ для всех $i \in I$;
- (2) $\inf_{v(\cdot)} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{i \in \Lambda} G_i(\tau_i, \gamma_i(\tau_i)\xi_i(\tau_i), v(\cdot)) \geq 1$.

Тогда в игре $\Gamma(n, 1)$ происходит r -кратная поимка.

Доказательство. Пусть τ_j — моменты, удовлетворяющие условиям теоремы, $v(s)$, $s \in [t_0, T_1]$, — произвольное допустимое управление убегающего E , где $T_1 = \max_i \tau_i$. Рассмотрим функцию

$$H(t) = 1 - \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{j \in \Lambda} \gamma_j(t) \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(\tau_j, s)| \lambda(v(s), r(\tau_j, s), \gamma_j(\tau_j)\xi_j(\tau_j)) ds.$$

Обозначим через $\tau_0 \geq t_0$ первый корень данной функции. Отметим, что момент τ_0 существует в силу предположения 2, причем существует такое Λ , что $\tau_0 \leq \tau_i$ для всех $i \in \Lambda$. Кроме того,

существует такое множество $\Lambda_0 \in \Omega_I(r)$, что

$$1 - \min_{j \in \Lambda_0} \gamma_j(\tau_0) \int_{t_0}^{\tau_0} |\varphi_{l-1}(\tau_j, s)| \lambda(v(s), r(\tau_j, s), \gamma_j(\tau_j) \xi_j(\tau_j)) ds \leq 0.$$

Поэтому существуют моменты $t_j \leq \tau_0$, ($j \in \Lambda_0$), для которых

$$1 - \gamma_j(t_j) \int_{t_0}^{t_j} |\varphi_{l-1}(\tau_j, s)| \lambda(v(s), r(\tau_j, s), \gamma_j(\tau_j) \xi_j(\tau_j)) ds = 0. \quad (3)$$

Для $j \notin \Lambda_0$ также обозначим через t_j моменты времени, для которых выполнено условие (1), если такие моменты существуют. Зададим управления преследователей P_i , $i \in I$, полагая

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(v(t), r(\tau_i, t), \gamma_i(\tau_i) \xi_i(\tau_i)) \gamma_i(\tau_i) \xi_i(\tau_i), \quad t \in [t_0, \min\{t_i, T_1\}],$$

$$u_i(t) = v(t), \quad t \in (\min\{t_i, T_1\}, T_1].$$

Тогда

$$\begin{aligned} z_i(\tau_i) &= \xi_i(\tau_i) + \int_{t_0}^{\tau_i} \varphi_{l-1}(\tau_i, s) (u_i(s) - v(s)) ds = \\ &= \xi_i(\tau_i) - \int_{t_0}^{\tau_i} |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)| \lambda(v(s), r(\tau_i, s), \gamma_i(\tau_i) \xi_i(\tau_i)) \gamma_i(\tau_i) \xi_i(\tau_i) ds = \\ &= \xi_i(\tau_i) \left(1 - \gamma_i(\tau_i) \int_{t_0}^{\tau_i} |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)| \lambda(v(s), r(\tau_i, s), \gamma_i(\tau_i) \xi_i(\tau_i)) ds \right). \end{aligned}$$

Из (1) следует, что для всех $j \in \Lambda_0$ $z_j(\tau_j) = 0$. Теорема доказана. $\square$

4. Многократная поимка заданного числа убегающих.

Определение 4. В игре $\Gamma(n, m)$ происходит r -кратная поимка (при $r = 1$ поимка) не менее q убегающих, если существует $T > 0$, при котором для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, $j \in J$, убегающих E_j , $j \in J$, найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, z^0, v_j(s))$, $s \in [t_0, \infty)$, $j \in J$, $i \in I$, преследователей P_i , $i \in I$, обладающие следующим свойством: существуют такие множества

$$M \subset J, |M| = q, \quad \{N_l, l \in M\}, \quad N_l \subset I, |N_l| = r \text{ для всех } l \in M, \quad N_l \cap N_s = \emptyset \text{ для всех } l \neq s,$$

что группа преследователей $\{P_l, l \in N_\beta\}$ не позднее момента T осуществляет r -кратную поимку убегающего E_β , причем если преследователь P_l ловит убегающего E_β , то остальные убегающие считаются им не пойманными.

Теорема 3. Пусть выполнено предположение 1 и для каждого $p \in \{0, \dots, q-1\}$ справедливо следующее условие: для каждого множества $N \subset I$, $|N| = n - pr$, найдется такое множество $M \subset J$, $|M| = q - p$, что

(1) существуют $h_{\alpha\beta}^0 \in H_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}^0 \neq 0$, для которых для всех $\beta \in M$ справедливо неравенство

$$\delta_N(\beta) = \min_{\mu \in \{-1, 1\}} \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(v, \mu, h_{\alpha\beta}^0) > 0;$$

(2) существуют такие моменты $\tau_{\alpha\beta} \geq T_\beta(z^0)$, что $\gamma_{\alpha\beta}(\tau_{\alpha\beta}) \xi_{\alpha\beta}(\tau_{\alpha\beta}) \in D_\varepsilon(h_{\alpha\beta}^0)$ для всех $\alpha \in N$, $\beta \in M$, где

$$T_\beta(z^0) = \min \left\{ t \geq t_0 : \inf_{v(\cdot)} \min_{h \in D} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{\alpha \in \Lambda} G_{\alpha\beta}(t, h_{\alpha\beta}, v(\cdot)) \geq 1 \right\};$$

(3) для всех $\beta \in M$ справедливо неравенство

$$\inf_{v(\cdot)} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{\alpha \in \Lambda} G_{\alpha\beta}(\tau_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha\beta}(\tau_{\alpha\beta}) \xi_{\alpha\beta}(\tau_{\alpha\beta}), v(\cdot)) \geq 1.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы. Докажем, что любые $n - sr$ преследователей осуществляют r -кратную поимку не менее чем $q - s$ убегающих, где $s \in \{0, \dots, q - 1\}$. При $s = 0$ получим утверждение теоремы. Доказывать будем методом математической индукции. Пусть $s = q - 1$, $N \subset I$, $|N| = n - (q - 1)r$. В силу условия теоремы существует $\beta \in J$ такой, что для убегающего E_β выполнены условия теоремы 2. Следовательно, преследователи P_l , $l \in N$, осуществляют r -кратную поимку убегающего E_β .

Предположим, что утверждение доказано для всех $s \geq p + 1$. Докажем утверждение для $s = p$. Пусть $N \subset I$, $|N| = n - pr$. Тогда существует такое множество $M \subset J$, $|M| = q - p$, что $\delta_N(\beta) > 0$ для всех $\beta \in M$.

Пусть $v_j(t)$, $t \in [0, \infty)$, $j \in J$ — совокупность управлений убегающих E_j , $j \in J$. Для каждого $\beta \in M$ определим множества

$$J_\beta = \{l \in N \mid \text{преследователь } P_l \text{ ловит убегающего } E_\beta\}.$$

В силу теоремы 2 и условия данной теоремы для всех $\beta \in M$ справедливо неравенство $|J_\beta| \geq r$. Можно считать, что $M = \{1, \dots, q - p\}$. Возможны два случая.

1. Для всех $l = 1, \dots, q - p$

$$\left| \bigcup_{\beta=1}^l J_\beta \right| \geq lr.$$

Тогда по теореме Холла (см. [17, с. 65, теорема 5.1.1]) для множеств $\{J_\beta, \beta \in M\}$ существует система различных представителей. Это означает, что существуют множества J'_β , $\beta \in M$, для которых

$$J'_\beta \subset J_\beta, |J'_\beta| = r \text{ для всех } \beta \in M, \quad J'_{\beta_1} \cap J'_{\beta_2} = \emptyset \text{ для всех } \beta_1 \neq \beta_2.$$

Следовательно, каждая группа преследователей P_l , $l \in J'_\beta$, осуществляет r -кратную поимку убегающего E_β для всех $\beta \in M$. Поэтому группа преследователей P_l , $l \in N$ осуществляет r -кратную поимку не менее $q - p$ убегающих.

2. Существует $l \in \{1, \dots, q - p\}$, при котором

$$\left| \bigcup_{\beta=1}^l J_\beta \right| < lr.$$

Пусть l_0 — наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих данному неравенству. Отметим, что $l_0 > 1$ и

$$\left| \bigcup_{\beta=1}^{n_1} J_\beta \right| \geq n_1 r$$

для всех $n_1 \in \{1, \dots, l_0 - 1\}$. Поэтому для множеств J_β , $\beta = 1, \dots, l_0 - 1$, существует такая система J'_β различных представителей, что

$$J'_\beta \subset J_\beta, |J'_\beta| = r \text{ для всех } \beta = 1, \dots, l_0 - 1, \quad J'_{\beta_1} \cap J'_{\beta_2} = \emptyset \text{ для всех } \beta_1 \neq \beta_2.$$

Следовательно, каждая группа преследователей J'_β осуществляет r -кратную поимку убегающего E_β . Поэтому преследователи $\bigcup_{\beta=1}^{l_0-1} J'_\beta$ осуществляют r -кратную поимку $l_0 - 1$ убегающих. В дальнейшем можно считать, что $J'_\beta = J_\beta$ для всех $\beta = 1, \dots, l_0 - 1$.

Пусть $s_0 = p + l_0 - 1$. Тогда $s_0 > p$ и $s_0 \leq p + q - p - 1 = q - 1$. Рассмотрим множество

$$N_1 = N \setminus \bigcup_{\beta=1}^{l_0-1} J'_\beta.$$

Имеем $|N_1| = n - pr - (l_0 - 1)r = n - s_0 r$. В силу условия теоремы по N_1 существует такое множество M_1 , $M_1 \subset J$, $|M_1| = q - s_0$, что $\delta_{N_1}(\beta) > 0$ для всех $\beta \in M_1$. Отметим, что $\{1, \dots, l_0 - 1\} \cap M_1 = \emptyset$, ибо если β принадлежит данному пересечению, то существует номер $l \in N_1$, для которого P_l ловит убегающего E_β , где $\beta \in \{1, \dots, l_0 - 1\}$, что противоречит построению множества N_1 . В силу индукционного предположения группа преследователей P_l , $l \in N_2$, осуществляет r -кратную поимку не менее чем $q - s_0$ убегающих. Следовательно, преследователи P_l , $l \in N$, осуществляют r -кратную поимку не менее $q - s_0 + l_0 - 1 = q - p$ убегающих, что и требовалось доказать. $\square$

5. Примеры.

Пример 1. Пусть система (1) имеет вид

$$\dot{z}_{ij} = u_i - v_j, \quad z_{ij}(0) = z_{ij}^0.$$

Тогда $\varphi_0(t, s) = 1$, $\xi_{ij}(t) = z_{ij}^0$ и предположение 1 выполнено при $\gamma_{ij}(t) = 1$.

Теорема 4. Пусть для каждого $p \in \{0, \dots, q - 1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - pr$, найдется такое множество $M \subset J$, $|M| = q - p$, что для всех $\beta \in M$

$$\delta_N(\beta) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(v, 1, z_{\alpha\beta}) > 0.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Пример 2. Пусть система (1) имеет вид ($t_0 = 8\pi^2$)

$$\ddot{z}_{ij} + \frac{2}{3t} \dot{z}_{ij} + \frac{1}{9t^{4/3}} z_{ij} = u_i - v_j, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0, \quad \dot{z}_{ij}(t_0) = \dot{z}_{ij}^1.$$

Тогда

$$\varphi_0(t, s) = \cos(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}), \quad \varphi_1(t, s) = 3s^{2/3} \sin(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}), \quad \xi_{ij}(t) = z_{ij}^0 \cos \sqrt[3]{t} + 12\pi^2 \sin \sqrt[3]{t}.$$

Возьмем $\gamma_{ij}(t) = 1$, $\eta_{ij}(t) = \xi_{ij}(t)$. Рекуррентность функций η_{ij} следует из результатов работы [8]. Кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t |\varphi_1(t, s)| ds = +\infty,$$

и поэтому предположение 1 выполнено. Следовательно, если выполнены условия теоремы 3, то в игре $\Gamma(n, m)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Пример 3. Пусть система (1) имеет вид

$$\dot{z}_{ij} + \left(\frac{1}{t} + \frac{\sin t + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t}{3 + \cos t + \cos \sqrt{2}t} \right) z_{ij} = u_i - v_j, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0, \quad t_0 > 0.$$

Тогда

$$\varphi_0(t, s) = \frac{s(3 + \cos t + \cos \sqrt{2}t)}{t(3 + \cos s + \cos \sqrt{2}s)}, \quad \xi_{ij}(t) = \frac{t_0(3 + \cos t + \cos \sqrt{2}t)}{t(3 + \cos t_0 + \cos \sqrt{2}t_0)} z_{ij}^0.$$

Взяв

$$\gamma_{ij}(t) = t, \quad \eta_{ij}(t) = \frac{t_0(3 + \cos t + \cos \sqrt{2}t)}{(3 + \cos t_0 + \cos \sqrt{2}t_0)} z_{ij}^0,$$

получаем, что функции η_{ij} рекуррентны на $[t_0, +\infty)$ и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_{ij}(t) \int_{t_0}^t |\varphi_0(t, s)| ds = +\infty.$$

Следовательно, предположение 1 выполнено и поэтому, если выполнены остальные условия теоремы 3, то в игре $\Gamma(n, m)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Пример 4. Пусть в системе (1) все функции $a_p(t)$, $p = 1, \dots, l$, являются постоянными, а корни характеристического уравнения

$$\rho^l + a_1 \rho^{l-1} + \dots + a_l = 0$$

простыми и чисто мнимыми. Тогда предположение 1 выполнено при $\gamma_{ij} = 1$, $\eta_{ij}(t) = \xi_{ij}(t)$. Поэтому, если выполнены остальные условия теоремы 3, то в игре $\Gamma(n, m)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банников А. С., Петров Н. Н. К нестационарной задаче группового преследования// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2010. — 16, № 1. — С. 40–51.
2. Благодатских А. И. О задаче группового преследования в нестационарном примере Понтрягина// Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. мат. — 2007. — 1. — С. 17–24.
3. Благодатских А. И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования// Прикл. мат. мех. — 2009. — 73, № 1. — С. 54–59.
4. Благодатских А. И. Многократная поимка в примере Понтрягина// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2009. — 2. — С. 3–12.
5. Благодатских А. И., Петров Н. Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. — Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009.
6. Григоренко Н. Л. Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего// Вестн. МГУ. Сер. вычисл. мат. киберн. — 1983. — 1. — С. 41–47.
7. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
8. Zubov B. I. К теории рекуррентных функций// Сиб. мат. ж. — 1962. — 3, № 4. — С. 532–560.
9. Петров Н. Н. Об одной задаче преследования группы убегающих// Автомат. телемех. — 1996. — 6. — С. 48–54.
10. Петров Н. Н. Многократная поимка в примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями// Прикл. мат. мех. — 1997. — 61, № 5. — С. 747–754.
11. Петров Н. Н., Нарманов А. Я. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче простого преследования// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2018. — 28, № 2. — С. 193–198.
12. Петров Н. Н., Прокопенко В. А. Об одной задаче преследования группы убегающих// Диффер. уравн. — 1987. — 23, № 4. — С. 724–726.
13. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. К задаче группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх// Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2016. — 132. — С. 81–85.
14. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. — М.: Наука, 1988.
15. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами// Кибернетика. — 1976. — 3. — С. 145–146.
16. Сахаров Д. В. О двух дифференциальных играх простого группового преследования// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2012. — 1. — С. 50–59.
17. Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970.
18. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наукова думка, 1992.

Петров Николай Никандрович
Удмуртский государственный университет, Ижевск
E-mail: kma3@list.ru

Соловьева Надежда Александровна
Удмуртский государственный университет, Ижевск
E-mail: solov_na@mail.ru