Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. М. Симонов, А. В. Чистяков, Численный метод вычисления верхнего предела функции и старшего показателя Ляпунова линейных дифференциальных систем, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 186, 123–125

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-123-125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:42:33

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 186 (2020). С. 123–125
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-186-123-125

УДК 517.983

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРХНЕГО ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ И СТАРШЕГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2020 г. П. М. СИМОНОВ, А. В. ЧИСТЯКОВ

Аннотация. В статье предлагается метод численного расчета старшего показателя Ляпунова для линейной обыкновенной дифференциальной системы.

Ключевые слова: показатель Ляпунова, численные методы.

NUMERICAL METHOD FOR CALCULATING THE UPPER LIMIT OF A FUNCTION AND THE HIGHEST LYAPUNOV EXPONENT OF LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS

© 2020 P. M. SIMONOV, A. V. CHISTYAKOV

ABSTRACT. In this paper, we propose a method for the numerical calculation of the highest Lyapunov exponent for a linear ordinary differential system.

Keywords and phrases: Lyapunov exponent, numerical methods.

AMS Subject Classification: 34A30, 65L06

1. Введение. Показатели Ляпунова играют важную роль в теории устойчивости (см. [2, 3]). Однако при их вычислении возникают трудности, связанные с необходимостью учитывать поведение функции на бесконечности. В данной работе предложен численный метод вычисления верхнего предела функции и старшего показателя Ляпунова для линейных обыкновенных дифференциальных систем.

2. Вычисление предела последовательности. Пусть дана последовательность с общим членом a_n , имеющая предел $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Очевидно, что $a \approx a_n$ при достаточно больших n . При этом для оценки погрешности удобно применять правило Рунге (см. [1]). Согласно этому правилу, если $a - a_n = O(1/n^k)$, то погрешность предела

$$a - a_{2n} \approx \frac{a_{2n} - a_n}{2^k - 1}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00332А)..

3. Вычисление верхнего предела функции. Последовательность x_n назовем относительно плотной, если она монотонно возрастает и найдется такая константа C , что неравенство $x_{n+1} - x_n < C$ выполняется при всех n .

Пусть функция f определена на $[0; +\infty)$. Построим последовательность g_n по правилу

$$g_n = \sup_{x \in I_n} f(x),$$

где $I_n = [n^2; (n+1)^2)$.

Теорема 1 (Теорема о существовании точечного предела). *Если верхний предел функции f достигается на относительно плотной последовательности, то $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ существует и равен $\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.*

Доказательство. Пусть $a = \limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ достигается на относительно плотной последовательности x_k . В силу относительной плотности, начиная с некоторого номера n , в каждый полуинтервал I_n попадет хотя бы один член последовательности x_k . Рассмотрим произвольную подпоследовательность x_{k_n} такую, что $x_{k_n} \in I_n$, начиная с некоторого n . Так как $g_n \geq x_{k_n}$, то $\liminf_{n \rightarrow \infty} g_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = a$.

Допустим, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} g_n \geq a + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. По определению g_n найдется такая последовательность x_n , что $f(x_n) \geq g_n - \varepsilon/2$. Пусть $\limsup_{n \rightarrow \infty} g_n$ достигается на подпоследовательности g_{n_k} . Тогда $\liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \geq a + \varepsilon/2$. Получили противоречие с тем, что $\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$. Следовательно, $\limsup_{n \rightarrow \infty} g_n \leq a$. Таким образом, $a \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} g_n \leq a$. Отсюда и следует утверждение теоремы. $\square$

Доказанная теорема сводит задачу вычисления верхнего предела функции к задаче вычисления предела последовательности. Для вычисления значения g_n разобьем I_n на k частей и воспользуемся приближенным равенством

$$g_n \approx \max_{i=0, \dots, k-1} f\left(n^2 + \frac{2n+1}{k}i\right).$$

Погрешность данного приближения можно оценить либо по правилу Рунге, либо используя дополнительную информацию о функции f (например знание ее производной).

4. Вычисление старшего показателя Ляпунова. Показателем Ляпунова функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется величина

$$\lambda[f] = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|f(t)\|}{t}.$$

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Старшим показателем Ляпунова системы (1) называется максимальный из показателей Ляпунова ее решений.

Для вычисления старшего показателя Ляпунова системы (1) зафиксируем произвольное начальное условие $x(0) = x_0$ и начальный шаг h . С помощью какого-нибудь численного метода, например, метода Рунге—Кутты с шагом h (см. [1]) будем вычислять значения решения системы. Для вычисления верхнего предела воспользуемся способом, описанным в предыдущем параграфе.

Желательно выбирать начальное значение x_0 так, чтобы показатель Ляпунова соответствующего ему решения совпадал со старшим показателем системы (1).

В противном случае переход на решение со старшим показателем произойдет в результате вычислительных погрешностей.

При реализации вычислений, чтобы избежать переполнения разрядной сетки ЭВМ при нахождении решения $x(t)$, следует периодически заменять значение $x(t_k)$ на $\frac{x(t_k)}{\|x(t_k)\|}$. При этом

необходимо накапливать сумму логарифмов $\|x(t_k)\|$ и учитывать это при вычислении показателя Ляпунова.

Если метод нахождения решения $x(t)$ на каждом отрезке единичной длины вносит относительную погрешность δ , то это вносит абсолютную погрешность, равную δ , в значение показателя Ляпунова. Поэтому в процессе вычислений следует, например, по правилу удвоения узлов Рунге, контролировать погрешность вычисления решения системы, и в случае необходимости уменьшать (или увеличивать) первоначально выбранный шаг h .

5. Примеры. Описанный выше метод был опробован при вычислении старшего показателя Ляпунова ряда линейных систем и уравнений. Результаты расчетов представлены в таблице 1.

Таблица 1

Система	$\lambda_{\text{теор}}$	Точность	$\lambda_{\text{выч}}$	n
$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x$	5,37228	0,1	5,3515	32
		0,01	5,3709	128
		0,001	5,3719	256
		0,0001	5,37226	1024
$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$	-1	0,1	-0,9793	16
		0,01	-0,9987	64
		0,001	-0,9997	128
$\ddot{x} = (\sin t)x$	—	0,001	0,4422	128
$\dot{x} = (\sin t)x$	0	0,001	$9,3 \cdot 10^{-5}$	128

Здесь $\lambda_{\text{теор}}$ — теоретическое значение старшего показателя, $\lambda_{\text{выч}}$ — вычисленное значение, n — номер интервала I_n , на котором завершился процесс вычислений. При этом решение системы или уравнения численно рассчитывалось на интервале от 0 до $(n+1)^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. — М.: Изд.-во МГУ, 1990.
2. Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. — М.: Наука, 1966.
3. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.

Симонов Петр Михайлович

Пермский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: simpn@mail.ru

Чистяков Александр Владимирович

Удмуртский государственный университет, Ижевск

E-mail: simpn@mail.ru