Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Ульянов, В. А. Хрипин, А. Ю. Кирьянов, Колебательное движение тела с изменяющимся центром масс на гибких подвесах, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 186, 126–137

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-126-137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 10:30:43

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 186 (2020). С. 126–137
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-186-126-137

УДК 517.933

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ЦЕНТРОМ МАСС НА ГИБКИХ ПОДВЕСАХ

© 2020 г. В. М. УЛЬЯНОВ, В. А. ХРИПИН, А. Ю. КИРЬЯНОВ

Аннотация. Получено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее вынужденные колебания в доильном аппарате. Приведены приближенные аналитические решения полученных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, колебания, амплитуда, угол отклонения, гибкий подвес, центр масс, кинетический момент.

OSCILLATORY MOTION OF A BODY WITH A CHANGING CENTER OF MASS ON FLEXIBLE SUSPENSIONS

© 2020 V. M. ULYANOV, V. A. KHRIPIN, A. YU. KIRYANOV

ABSTRACT. We obtain a nonlinear second-order differential equation that describes forced vibrations in a milking machine. Approximate analytical solutions of the obtained differential equations are given.

Keywords and phrases: differential equation, oscillations, amplitude, deflection angle, flexible suspension, center of mass, angular momentum.

AMS Subject Classification: 34K06

1. Введение. Результаты данных исследований носят прикладной характер. При доении коров используется физиологически адаптированный доильный аппарат, коллектор которого снабжен подвижным телом, изменяющим центр масс подвесной части доильного аппарата в зависимости от такта работы пульсатора. Это позволяет обеспечить стабильность процесса выведения молока (см. [6–8]).

2. Основные результаты. Расчетная схема взаимодействия системы представлена на рис. 1. Введем систему координат, за начало отсчета примем точку O_1 , ось O_1X справа налево, а O_1Y — вниз. Примем обозначения: m — масса поршня, кг; M — масса направляющей (цилиндра) с центром тяжести в точке O ; S — расстояние от правого конца цилиндра коллектора до поршня, м; ϕ — угол отклонения подвеса (молочного патрубка стакана) от вертикального положения, рад; a , l — длина соответственно направляющей и подвеса, м; T_1 , T_2 — реакции со стороны направляющей с поршнем на соски соответственно правой и левой долей вымени. Значение реакций T_1 , T_2 , таковы, что стаканы будут неподвижны на сосках вымени, т.е. длины подвесов $O_1A = O_2B = l = \text{const}$

Рис. 1. Схема траектории движения тела

при движении всей системы. Выберем произвольное положение системы и приложим действующие силы (рис. 1).

Взаимодействие подвесной части доильного аппарата с выменем коровы удобно рассматривать по этапам. При подключении аппарата к вакууму перепад давлений передается на поршень, который приходит в относительное движение по направляющей. Направляющая, вдоль которой перемещается поршень, совершает поступательное движение, т.е. скорости всех ее точек одинаковы как по направлению, так и по модулю. Точки A и B, в которых направляющая соединена с тягами подвеса, совершают вращательное движение при изменении угла поворота ϕ . В то же время точки A и B являются точками направляющей AB. Значит, скорости поступательного движения остальных точек направляющей по отношению к неподвижным токам подвеса O_1 , O_2 будут направлены по касательной к окружностям движения точек A и B, т.е. перпендикулярно тягам подвесов O_1B и O_2A . Направляющая AB при колебаниях тяг подвесов будет занимать всегда горизонтальное положение. Уравнение относительного движения поршня будет

$$m\ddot{S} = F_{(t)} + \Phi + F_m \quad (1)$$

где $F_{(t)}$ — сила от перепада давлений, действующая на поршень, Н; Φ — сила инерции поршня, Н; F_m — сила трения, Н. Проекция на направляющую AB силы инерции Φ : нормальная составляющая

$$\Phi_n = ml(\dot{\phi})^2, \quad (2)$$

касательная составляющая

$$\Phi_\tau = ml\ddot{\phi}. \quad (3)$$

Сила трения по закону сухого трения Кулона

$$F_m = f \cdot N, \quad (4)$$

где f — коэффициент трения; N — сила нормального давления, Н. Сила нормального давления (рис. 1) составит:

$$N = mg + \Phi_n \cdot \cos \phi + \Phi_\tau \cdot \sin \phi. \quad (5)$$

Тогда формула (1) с учетом выражений со (2) по (5) примет вид:

$$m\ddot{S} = F_{(t)} + \left[ml\ddot{\phi} \cdot \cos \phi - ml(\dot{\phi})^2 \cdot \sin \phi \right] - f \left[mg + ml(\dot{\phi})^2 \cdot \cos \phi + ml\ddot{\phi} \cdot \sin \phi \right] \quad (6)$$

Рис. 2. Схема к расчету силы, действующей на поршень

При работе на поршень действует сила от перепада давлений. При откачивании воздуха из герметичной камеры скорость откачивания замедляется по мере уменьшения в ней давления (см. [5]). По аналогии будем считать, что скорость пропорциональна оставшейся разности давлений в камере. Пусть t_0 — время начала откачивания воздуха, с; t — время, прошедшее от начала откачивания, с; P_a , $P_{(t)}$ — соответственно атмосферное и текущее давления в камерах цилиндра, Н/м²; P_h — рабочее давление в вакуумпроводе, Н/м². Согласно предположению, что скорость изменения давления $\frac{dP}{dt}$ пропорциональна оставшейся разности давлений $(P_h - P_{(t)})$, запишем

$$\frac{dP}{dt} = k(P_h - P_{(t)}) \text{ или } \frac{dP}{P_{(t)} - P_h} = -kdt, \quad (7)$$

где k — коэффициент пропорциональности, $k > 0$. Интегрируя выражение (7), получаем

$$\ln |P_{(t)} - P_h| = -k(t - t_0) + C_1.$$

Снимая знак модуля за счет значения новой постоянной C , запишем

$$P_{(t)} - P_h = C \cdot e^{-k(t-t_0)} \text{ или } P_{(t)} = P_h + C \cdot e^{-k(t-t_0)}. \quad (8)$$

Считая, что в начале процесса откачивания давление в камере цилиндра коллектора совпадает с атмосферным, получаем начальные условия к уравнению (8) $P_{(t)}|_{t=t_0} = P_a$. Решая выражение (8) относительно постоянной C с учетом начальных условий, имеем $C = P_a - P_h$. Подставляя значение константы C в формулу (8), получаем закон изменения давления в камере коллектора при откачивании из нее воздуха.

$$P_{(t)} = P_h + (P_a - P_h)e^{-k(t-t_0)} \quad (9)$$

Коэффициент пропорциональности k имеет размерность с⁻¹. Он учитывает как объем откачиваемого воздуха из камеры, так и возникающее при этом сопротивление движению воздуха. Значение коэффициента можно определить аналитически, а затем ввести уточнение при эксперименте. Так, сравнивая зависимость (8) с формулами, приведенными Г. Д. Талалаевым (см. [4]) для откачивания воздуха из управляющей камеры пульсатора, можно сделать вывод, что коэффициент k при $t = 0$ определяется зависимостью:

$$k = \frac{\pi \cdot d_m^4 P_h}{c \cdot 128 V \cdot l_m \cdot \eta}, \quad (10)$$

где c — опытный коэффициент, предварительно $c = 1$; V — объем камеры цилиндра, из которой откачивается воздух, м³; l_m , d_m — соответственно длина и диаметр трубки, соединяющей пульсатор с камерой цилиндра коллектора, м; η — динамическая вязкость, Па · с. Для текущего давления $P(t)$ в камере цилиндра выполняется неравенство $P_h \leq P(t) \leq P_a$. Принимаем, что с одной стороны на поршень действует атмосферное давление P_a , а с противоположной — давление $P_{(t)}$ (рис. 2).

Пусть S_1 — площадь поршня. Считая, что отсутствует перетекание воздуха из камер цилиндра, получим силу, движущую поршень в виде:

$$F(t) = (P_a - P_{(t)})S_1 = (P_a - P_h - (P_a - P_h) \cdot e^{-k(t-t_0)})S_1 = P_h(1 - e^{-k(t-t_0)})S_1, \quad (11)$$

Рис. 3. Схема к определению движения системы

где $P_b = P_a - P_h$ — величина вакуума в цилиндре, Н/м². Окончательно уравнение относительного движения поршня (6) с учетом формулы (11) будет

$$m\ddot{S} = P_b \cdot S_1(1 - e^{-k(t-t_0)}) - f \cdot mg + ml\ddot{\phi}(\cos \phi - f \sin \phi) - ml(\dot{\phi})^2(\sin \phi + f \cdot \cos \phi). \quad (12)$$

Чтобы определить движение системы в целом, воспользуемся теоремами о движении центра масс и об изменении кинетического момента относительно точки O_1 . Последняя теорема запишется следующим образом (см. [3]):

$$\frac{dK_{O_1}}{dt} = \sum M_{O_1}(\mathbf{F}_i). \quad (13)$$

На рис. 3 представлена схема к определению движения системы.

Кинетический момент системы относительно точки O_1 в векторной форме:

$$\mathbf{K}_{O_1} = \mathbf{r}_n \cdot m\mathbf{v}_n + \mathbf{r}_0 \cdot M\mathbf{v}_0, \quad (14)$$

где $\mathbf{r}_n$ и $\mathbf{r}_0$ — соответственно радиус-вектор поршня и радиус-вектор центра масс (точка O), м; $\mathbf{v}_n$ и $\mathbf{v}_0$ — вектор скорости поршня и центра масс направляющей, м/с; m , M — соответственно массы поршня и направляющей, кг. Радиус-вектор поршня можно записать следующим образом в матричном виде:

$$\mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} r_{nx} \\ r_{ny} \\ r_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S - l \sin \phi \\ l \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где r_{nx} , r_{ny} , r_{nz} — проекции радиус-вектора на оси, равные $r_{nx} = S - l \sin \phi$; $r_{ny} = l \cos \phi$; $r_{nz} = 0$. Абсолютная скорость поршня будет:

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_n^4 + \mathbf{v}_a^4, \quad (16)$$

где $\mathbf{v}_n^4$, $\mathbf{v}_a^4$ — соответственно переносная и относительная скорости поршня, м/с. Переносная и относительная скорости поршня соответственно равны

$$\mathbf{v}_n^e = \begin{pmatrix} -l\dot{\phi} \cos \phi \\ -l\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_n^a = \dot{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \dot{S} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда абсолютная скорость поршня примет вид

$$\boldsymbol{\vartheta}_n = \begin{pmatrix} \dot{S} - l\dot{\phi} \cos \phi \\ -l\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Определим кинетический момент поршня $K_{O_1(n)}$ относительно точки O_1 .

$$\begin{aligned} K_{O_1(n)} &= \mathbf{r}_n \cdot m \boldsymbol{\vartheta}_n = m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_{nx} & r_{ny} & r_{nz} \\ \vartheta_{nx} & \vartheta_{ny} & \vartheta_{nz} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ S - l \sin \phi & l \cos \phi & 0 \\ \dot{S} - l\dot{\phi} \cos \phi & -l\dot{\phi} \sin \phi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= m \cdot \mathbf{k} [(S - l \sin \phi) - (l\dot{\phi} \sin \phi) - l \cos \phi (\dot{S} - l\dot{\phi} \cos \phi)] = \\ &= -ml\mathbf{k} (S\dot{\phi} \sin \phi - l\dot{\phi} \sin^2 \phi + \dot{S} \cos \phi - l\dot{\phi} \cos^2 \phi) = ml(l\dot{\phi} - S \sin \phi \cdot \dot{\phi} - \dot{S} \cos \phi) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее аналогично находим радиус-вектор центра масс (точки O) направляющей:

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \\ r_{0z} \end{pmatrix}$$

или

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} - l \sin \phi \\ l \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где r_{0x} , r_{0y} , r_{0z} — проекции радиус-вектора точки O на оси координат, равные $r_{0x} = \frac{a}{2} - l \sin \phi$; $r_{0y} = l \cos \phi$; $r_{0z} = 0$. Абсолютная скорость точки O будет:

$$\boldsymbol{\vartheta}_0 = \begin{pmatrix} \vartheta_{0x} \\ \vartheta_{0y} \\ \vartheta_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l\dot{\phi} \cos \phi \\ -l\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -l\dot{\phi} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где проекции скорости ϑ_0 на оси будут $\vartheta_{0x} = -\vartheta_0 \cos \phi$; $\vartheta_{0y} = -\vartheta_0 \sin \phi$; $\vartheta_{0z} = 0$; $\vartheta = l\dot{\phi}_0$. Кинетический момент центра масс направляющей относительно точки O_1 будет иметь вид:

$$\begin{aligned} K_{O_1(0)} &= \mathbf{r}_0 \cdot M \boldsymbol{\vartheta}_0 = M \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_{0x} & r_{0y} & r_{0z} \\ \vartheta_{0x} & \vartheta_{0y} & \vartheta_{0z} \end{vmatrix} = -Ml\dot{\phi} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{a}{2} - l \sin \phi & l \cos \phi & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -Ml\dot{\phi} \mathbf{k} \left[\left(\frac{a}{2} - l \sin \phi \right) \sin \phi - l \cos^2 \phi \right] = M \cdot l\dot{\phi} \left(l - \frac{a}{2} \sin \phi \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Кинетический момент всей системы относительно точки O_1 :

$$\begin{aligned} K_{O_1} &= K_{O_1(n)} + K_{O_1(0)} = ml \left(l\dot{\phi} - S \sin \phi \cdot \dot{\phi} - \dot{S} \cos \phi \right) \mathbf{k} + M \cdot l\dot{\phi} \left(l - \frac{a}{2} \sin \phi \right) \mathbf{k} = \\ &= \left[m(l\dot{\phi} - S \sin \phi \cdot \dot{\phi} - \dot{S} \cos \phi) + M \left(l - \frac{a}{2} \sin \phi \right) \dot{\phi} \right] l \cdot \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (21)$$

Дифференцируем выражение (21), получаем:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \left\{ m[(l - S \sin \phi)\ddot{\phi} - \ddot{S} \cos \phi - S \cos \phi (\dot{\phi})^2] + M \left[\left(l - \frac{a}{2} \sin \phi \right) \ddot{\phi} - \frac{a}{2} \cos \phi (\dot{\phi})^2 \right] \right\} l \cdot \mathbf{k}. \quad (22)$$

Таким образом, определена левая часть формулы (13). Переходим к вычислению ее правой части, то есть к нахождению суммы моментов всех действующих внешних сил относительно точки O_1 . Внешними силами являются сила тяжести поршня $\overrightarrow{m\vec{g}}$, сила тяжести направляющей системы $\overrightarrow{M\vec{g}}$ и реакции $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$. Радиус-вектор поршня

$$\mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} S - l \sin \phi \\ l \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

Рис. 4. Схема к расчету момента реакции T_1

а вектор силы

$$\vec{mg} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда момент силы тяжести поршня составит:

$$M_{O_1(\vec{mg})} = \mathbf{r}_n \cdot \vec{mg} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ S - l \sin \phi & l \cos \phi & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{vmatrix} = mg(S - l \sin \phi) \mathbf{k}. \quad (23)$$

Аналогично радиус-вектор центра тяжести направляющей

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} - l \sin \phi \\ l \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

а вектор силы тяжести направляющей

$$\vec{Mg} = \begin{pmatrix} 0 \\ Mg \\ 0 \end{pmatrix},$$

то момент силы тяжести направляющей относительно точки O_1 будет:

$$M_{O_1(\vec{Mg})} = \mathbf{r}_0 \cdot \vec{Mg} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{a}{2} - l \sin \phi & l \cos \phi & 0 \\ 0 & Mg & 0 \end{vmatrix} = Mg \left(\frac{a}{2} - l \sin \phi \right) \mathbf{k}. \quad (24)$$

Момент реакции связи T_1 : $M_{O_1(\mathbf{T}_1)} = \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{T}_1 = 0$, так как $\mathbf{r}_A \parallel \mathbf{T}_1$ (рис. 4).

Момент силы $\mathbf{T}_2$: $M_{O_1(\mathbf{T}_2)} = \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{T}_2$, где радиус-вектор определяется как

$$\mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} a - l \sin \phi \\ l \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

вектор силы

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} T_2 \sin \phi \\ -T_2 \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда момент составит:

$$M_{O_1(\mathbf{T}_2)} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a - l \sin \phi & l \cos \phi & 0 \\ T_2 \sin \phi & -T_2 \cos \phi & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} T_2 [-\cos \phi (a - l \sin \phi) - \sin \phi \cdot l \cdot \cos \phi] = -a T_2 \cos \phi \mathbf{k}. \quad (25)$$

Сумма моментов сил, действующих на систему относительно точки O_1 , будет:

$$\begin{aligned} \sum M(F_i) &= mg(S - l \sin \phi) \mathbf{k} + Mg \left(\frac{a}{2} - l \sin \phi \right) \mathbf{k} - aT_2 \cos \phi \cdot \mathbf{k} = \\ &= \left[mg(S - l \sin \phi) + Mg \left(\frac{a}{2} - l \sin \phi \right) - aT_2 \cos \phi \right] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (26)$$

Теорема об изменении кинетического момента запишется так:

$$\begin{aligned} \left\{ m[(l - S \sin \phi) \ddot{\phi} - \ddot{S} \cos \phi - S \cos \phi (\dot{\phi})^2] + M \left[\left(l - \frac{a}{2} \sin \phi \right) \ddot{\phi} - \frac{a}{2} \cos \phi (\dot{\phi})^2 \right] \right\} l \cdot \mathbf{k} = \\ = \left[mg(S - l \sin \phi) + Mg \left(\frac{a}{2} - l \sin \phi \right) - aT_2 \cos \phi \right] \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Или, в проекции на вектор $\mathbf{k}$, составит:

$$\begin{aligned} \left\{ m[(l - S \sin \phi) \ddot{\phi} - \ddot{S} \cos \phi - S \cos \phi (\dot{\phi})^2] + M \left[\left(l - \frac{a}{2} \sin \phi \right) \ddot{\phi} - \frac{a}{2} \cos \phi (\dot{\phi})^2 \right] \right\} l = \\ = mg(S - l \sin \phi) + Mg \left(\frac{a}{2} - l \sin \phi \right) - aT_2 \cos \phi. \end{aligned} \quad (27)$$

Выразим из выражения (27) силу T_2 :

$$\begin{aligned} T_2 = \frac{1}{a \cos \phi} \left\{ mg(S - l \sin \phi) + Mg \left(\frac{a}{2} - l \sin \phi \right) + lm[\ddot{S} \cos \phi + S \cos \phi \cdot (\dot{\phi})^2 + (S \sin \phi - l) \ddot{\phi}] + \right. \\ \left. + lM \left[\frac{a}{2} \cos \phi \cdot (\dot{\phi})^2 + \left(\frac{a}{2} \sin \phi - l \right) \ddot{\phi} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Далее запишем теорему о движении центра масс, имеем (см. [1]):

$$(M + m)\ddot{x}_c = (T_1 + T_2) \sin \phi, \quad (29)$$

$$(M + m)\ddot{y}_c = (M + m)g - (T_1 + T_2) \cos \phi, \quad (30)$$

где x_c, y_c — координаты центра масс системы: направляющая-поршень, м. При этом

$$x_c = \frac{x_n \cdot m + x_0 \cdot M}{m + M} = \frac{(S - l \sin \phi)m + \left(\frac{a}{2} - l \sin \phi \right) M}{m + M} = \frac{mS + M \frac{a}{2}}{m + M} - l \sin \phi, \quad (31)$$

$$y_c = \frac{y_n \cdot m + y_0 \cdot M}{m + M} = \frac{l \cos \phi \cdot m + l \cos \phi \cdot M}{M + m} = l \cos \phi. \quad (32)$$

Дифференцируем выражение (31) и (32) дважды, получаем

$$\ddot{x}_c = \frac{m \cdot \ddot{S}}{m + M} + l(\sin \phi (\dot{\phi})^2 - \cos \phi \cdot (\ddot{\phi})), \quad (33)$$

$$\ddot{y}_c = -l(\cos \phi \cdot (\dot{\phi})^2 + \sin \phi \cdot (\ddot{\phi})). \quad (34)$$

Уравнения (29) и (30) с учетом выражений (33) и (34) примут вид:

$$m\ddot{S} + l(M + m)(\sin \phi \cdot (\dot{\phi})^2 - \cos \phi \cdot (\ddot{\phi})) = (T_1 + T_2) \sin \phi. \quad (35)$$

(34) примут вид:

$$(M + m)l \cdot (\cos \phi \cdot (\dot{\phi})^2 + \sin \phi \cdot (\ddot{\phi})) = (T_1 + T_2) \cos \phi - (M + m)g. \quad (36)$$

Преобразуем получившуюся систему уравнений (35) и (36) с целью исключения из системы сил T_1 и T_2 . Для этого умножим уравнения (35) на $\cos \phi$, а (36) на $(-\sin \phi)$ и, сложив их почленно, после преобразований получим:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = \frac{m\ddot{S} \cos \phi}{l(M + m)}. \quad (37)$$

Имеем нелинейное уравнение вынужденных колебаний системы. Возбуждающей силой выступает движение поршня с массой m , значение которой определяется по формуле (12). Умножив

уравнение (12) на $\cos \phi$ и подставив его в формулу (37), исключив неизвестное ускорение поршня $\ddot{S}$, имеем:

$$l\ddot{\phi}(M + m \sin^2 \phi + fm \sin \phi \cos \phi) + ml(\dot{\phi})^2(\sin \phi \cos \phi + f \cos^2 \phi) + (M + m)g \sin \phi + fmg \cos \phi = F(t) \cos \phi. \quad (38)$$

Дифференциальное уравнение (38) — нелинейное второго порядка, его можно решить численно с начальными условиями $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = 0$. Затем с найденным значением $\phi(t)$ следует решать опять численно уравнение (12) или (37) с начальными условиями $S(0) = 0$, $\dot{S}(0) = 0$ и найти такой момент времени t_1 , при котором $S(t_1) = a$. Затем сравнить полученную величину времени движения поршня с длительностью такта работы пульсатора. Уравнение (38) можно с допустимой погрешностью, пригодной для расчетов, упростить, чтобы получить аналитическое его решение. Если принять, что угол ϕ мал (рассматриваются малые колебания, что в нашем случае вполне уместно). Тогда $\sin \phi \approx \phi$, $\cos \phi \approx 1$. Пренебрегая малыми с (M) величинами $m\phi^2$ и $f m \phi$ и отбрасывая нелинейное слагаемое, содержащее $(\dot{\phi})^2$, так как оно также мало при малых колебаниях, получаем упрощенное выражение колебания подвесной части доильного аппарата:

$$Ml\ddot{\phi} + (M + m)g\phi = F(t) - fmg. \quad (39)$$

Решим уравнение (39) аналитически, заменим силу $F(t)$ его значением, после преобразований получим:

$$\ddot{\phi} + \frac{(M + m)g\phi}{Ml} = \frac{(P_a - P_h)S_1 - fmg}{Ml} - \frac{(P_a - P_g)S_1 e^{-kt}}{Ml}. \quad (40)$$

Введем обозначения:

$$\omega^2 = \frac{(M + m)g}{Ml}, \quad A = \frac{(P_a - P_h)S_1 - fmg}{Ml} (A > 0), \quad B = \frac{(P_a - P_g)S_1}{Ml} (B > 0).$$

Тогда выражение (40) будет иметь вид

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = A - B e^{-kt}. \quad (41)$$

Общее решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\phi(t) = \phi_{\text{общ}}(t) + \phi_{\text{част}}(t). \quad (42)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0$ будет:

$$\phi_{\text{общ}}(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (43)$$

Частное решение будем искать в виде

$$\phi_{\text{част}}(t) = C + D e^{-kt}. \quad (44)$$

Дифференцируя выражение (44), получаем:

$$\dot{\phi}_{\text{част}}(t) = (-k)D e^{-kt}; \quad \ddot{\phi}_{\text{част}}(t) = (-k)^2 D e^{-kt}. \quad (45)$$

Подставляя предполагаемую форму частного решения (45) в (41), получаем:

$$D(k^2 + \omega^2)e^{-kt} + \omega^2 C = A - B e^{-kt}. \quad (46)$$

Приравнявая коэффициенты перед экспонентой и свободными членами, получаем систему:

$$\begin{cases} D(\omega^2 + k^2) = -B, \\ C \cdot \omega^2 = A. \end{cases}$$

Тем самым найдено частное решение уравнения (44):

$$\phi_{\text{част}}(t) = \frac{A}{\omega^2} - \frac{B \cdot e^{-kt}}{\omega^2 + k^2}. \quad (47)$$

Тогда общее решение примет вид

$$\phi(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{A}{\omega^2} - \frac{B \cdot e^{-kt}}{\omega^2 + k^2}. \quad (48)$$

Рис. 5. Графическая зависимость угла отклонения подвеса от вертикального положения (ϕ , рад) от массы поршня (m , кг)

Для нахождения постоянных C_1 и C_2 уравнения (48) воспользуемся начальными условиями: $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = 0$. Имеем:

$$0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \frac{A}{\omega^2} - \frac{B}{\omega^2 + k^2},$$

откуда

$$C_1 = \frac{B\omega^2 - A(\omega^2 + k^2)}{\omega^2(\omega^2 + k^2)}.$$

Далее

$$\dot{\phi}(t) = -C_1\omega \sin \omega t + C_2\omega \cos \omega t - \frac{B}{\omega^2 + k^2}(-k)e^{-kt}. \quad (49)$$

Подставляя в выражение (49) $t = 0$, получаем:

$$-C_1\omega \sin \omega 0 + C_2\omega \cos \omega 0 + \frac{Bk}{\omega^2 + k^2} = 0,$$

откуда

$$C_2 = -\frac{Bk}{\omega(\omega^2 + k^2)}.$$

С учетом найденных значений C_1 , C_2 получаем решение уравнения (40) с начальными условиями $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = 0$ в виде:

$$\phi(t) = \frac{B\omega^2 - A(\omega^2 + k^2)}{\omega^2(\omega^2 + k^2)} \cos \omega t - \frac{Bk}{\omega(\omega^2 + k^2)} \sin \omega t + \frac{A}{\omega^2} - \frac{Be^{-kt}}{(\omega^2 + k^2)}. \quad (50)$$

Первые два слагаемых в формуле (50) описывают колебательный процесс с частотой ω . Изменяя соотношение

$$\omega^2 = \frac{(M + m)g}{Ml},$$

можно добиться минимальной амплитуды колебания подвесной части доильного аппарата. Графические интерпретации выражения (50) представлены на рисунках 5 и 6.

Из рисунка 5 следует, что с увеличением массы поршня m угол отклонения подвеса от вертикального положения ϕ уменьшается линейно.

Рис. 6. Графическая зависимость угла отклонения подвеса от вертикального положения (ϕ , рад) от времени (t , с) откачивания воздуха (работы системы) при массе поршня m равной 0,8 кг

Из графика, представленного на рисунке 6, видно, что рассматриваемая система совершает гармонические колебания. Для определения скорости и перемещения поршня в цилиндре коллектора решим совместно уравнения (12) и (38), исключая неизвестную ϕ , получаем после преобразований:

$$m(M + m \sin^2 \phi + f m \sin \phi \cos \phi) \ddot{S} = \\ + = (M + m) \left[(F(t) - f m g) - m g (\cos \phi - f \sin \phi) \sin \phi - m l (\dot{\phi})^2 (\sin \phi + f \cos \phi) \right]. \quad (51)$$

Замечание. Подставив в формулу (51) значение времени $t = 0$ и воспользовавшись тем, что $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$, получаем

$$m M \ddot{S}(0) = (M + m)(F(0) - f m g),$$

а так как $S(0) = \dot{S}(0) = 0$, то необходимым условием начала движения поршня будет $\ddot{S} \geq 0$, что приводит к условию $F(0) - f m g \geq 0$.

Уравнение (51) не решается аналитически (см. [2]). Упростим его с достаточной погрешностью для инженерных расчетов, аналогично тому как было получено выражение (39). При малых углах ϕ из уравнения (51) получаем:

$$\ddot{S}(t) = \frac{M + m}{m} \left(\frac{F(t) - f m g}{m} - g \phi(t) \right). \quad (52)$$

С учетом выражений (12) и (50) формула (52) примет вид:

$$\ddot{S}(t) = \frac{M + m}{m} \left[\frac{(P_a - P_h) S_1 (1 - e^{-kt}) - f m g}{m} - g \left(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{A}{\omega^2} - \frac{B \cdot e^{-kt}}{(\omega^2 + k^2)} \right) \right]. \quad (53)$$

Но согласно принятых ранее обозначений значения коэффициентов A и B определяются как:

$$A = \frac{(P_a - P_h) S_1 - f m g}{M l}, \quad B = \frac{(P_a - P_h) S_1}{M l},$$

тогда выражение (53) с учетом их значений будет

$$\ddot{S}(t) = (M + m) \left[\frac{l}{m} (A - Be^{-kt}) - \frac{g}{M} \left(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{A}{\omega^2} - \frac{B \cdot e^{-kt}}{(\omega^2 + k^2)} \right) \right]. \quad (54)$$

Интегрируя выражение (54), определяем скорость поршня:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= \dot{S}(0) + \int_0^t \ddot{S}(t) dt = \\ &= (M + m) \left[\frac{l}{M} \left(At - \frac{Be^{-kt}}{(-k)} \Big|_0^t \right) - \frac{g}{M} \left(\frac{C_1}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^t - \frac{C_2}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^t + \frac{At}{\omega^2} - \frac{B \cdot e^{-kt}}{(\omega^2 + k^2)(-k)} \Big|_0^t \right) \right] = \\ &= (M + m) \left[\frac{l}{M} \left(At + \frac{Be^{-kt}}{k} - \frac{B}{k} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g}{M} \left(\frac{C_1}{\omega} \sin \omega t - \frac{C_2}{\omega} \cos \omega t + \frac{C_2}{\omega} + \frac{At}{\omega^2} + \frac{B \cdot e^{-kt}}{(\omega^2 + k^2)k} - \frac{B}{(\omega^2 + k^2)} \right) \right]. \quad (55) \end{aligned}$$

Интегрируя уравнение (55), получаем закон движения поршня:

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) + \int_0^t \dot{S}(t) dt = (M + m) \left[\frac{l}{M} \left(\frac{At^2}{2} + \frac{Be^{-kt}}{k(-k)} \Big|_0^t - \frac{Bt}{k} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g}{M} \left(-\frac{C_1}{\omega^2} \cos \omega t \Big|_0^t - \frac{C_2}{\omega^2} \sin \omega t \Big|_0^t + \frac{C_2 t}{\omega} + \frac{At^2}{2\omega^2} + \frac{B \cdot e^{-kt}}{k(\omega^2 + k^2)(-k)} \Big|_0^t - \frac{Bt}{k(\omega^2 + k^2)} \right) \right] \\ S(t) &= (M + m) \left[\frac{Alt^2}{2m} - \frac{Bl(e^{-kt} - 1)}{mk^2} - \frac{Bt}{mk} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g}{M} \left(\frac{C_1(1 - \cos \omega t)}{\omega^2} - \frac{C_2}{\omega^2} \sin \omega t + \frac{C_2 t}{\omega} + \frac{At^2}{2\omega^2} - \frac{B \cdot (e^{-kt} - 1)}{k^2(\omega^2 + k^2)} - \frac{Bt}{k(\omega^2 + k^2)} \right) \right], \end{aligned}$$

где постоянные члены, входящие в выражение, определяются по формулам:

$$C_1 = \frac{B\omega^2 - A(\omega^2 + k^2)}{\omega^2(\omega^2 + k^2)}, \quad C_2 = -\frac{Bk}{\omega(\omega^2 + k^2)}, \quad A = \frac{(P_a - P_h)S_1 - fmg}{Ml}, \quad \omega = \sqrt{\frac{(M + m)g}{Ml}}.$$

При достижении поршнем торцевой стенки цилиндра происходит его удар о стенку. Угол отклонения тяг подвесов от вертикали при этом будет ϕ_0 . Так как на поршень действует перепад давлений (вакуум), то при ударе отскока поршня от стенки не произойдет, т. е. удар можно считать неупругим. До удара поршень и направляющая двигались противоположно друг другу. После удара относительное движение поршня отсутствует, поршень с направляющей будут двигаться совместно с одной скоростью. В это время пульсатор должен переключиться для изменения тактов и перепада давлений, действующего на поршень (см. [9]). Далее закон изменения колебаний системы будет происходить аналогично рассмотренному выше, но при движении в противоположном направлении.

3. Результаты и выводы. Получено нелинейное уравнение вынужденных колебаний системы на гибких подвесах. Где возбуждающей силой выступает движение поршня, которое изменяет центр масс системы. Дифференциальное уравнение, нелинейное второго порядка, можно решить численно с начальными условиями $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$. Затем с найденным значением $\phi(t)$ следует решать опять численно уравнение (12) или (37) с начальными условиями $S(0) = 0$, $\dot{S}(0) = 0$ и найти такой момент времени t_1 , при котором $S(t_1) = a$. Затем соизмерить полученную величину времени движения поршня с длительностью такта работы пульсатора. С достаточной погрешностью для инженерных расчетов можно применять представленные приближенные аналитические решения дифференциальных уравнений вынужденных колебаний системы на гибких подвесах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н. Е. Теоретическая механика. — М.: ГИТТЛ, 1952.
2. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Лань, 2002.
3. Никитин Е. М. Краткий курс теоретической механики. — М.: Наука, 1971.
4. Талалаев Г. Д. Теория и расчет доильных аппаратов. — Вологда, 1990.
5. Ульянов В. М. Вопросы теории машинного доения. — Рязань, 2006.
6. Ульянов В. М., Кирьянов А. Ю., Панферов Н. С., Набатчиков А. В. Высокоэффективный доильный аппарат// в кн.: Сб. мат. Всеросс. науч.-практ. круглого стола. — Рязань: Академия ФСИН России, 2017.
7. Ульянов В. М., Хрипин В. А. Физиологически адаптированный доильный аппарат// Сельский механизатор. — 2007. — 1. — С. 34.
8. Ульянов В. М., Хрипин В. А. Патент Российской Федерации. Доильный аппарат/ Оpubл. 20.05.2007.
9. Ульянов В. М., Хрипин В. А., Карпов Ю. Н., Набатчиков А. В. Теоретические исследования доильного аппарата с изменяющимся центром масс// Вестн. Рязан. гос. агротехн. ун-та им. П. А. Костычева. — 2014. — 4. — С. 81–86.

Ульянов Вячеслав Михайлович

Рязанский государственный агротехнологический университет им. П. А. Костычева

E-mail: ulyanov-v@list.ru

Хрипин Владимир Александрович

Академия права и управления Федеральной службы исполнения наказаний России, Рязань

E-mail: khrpin@mail.ru

Кирьянов Александр Юрьевич

Академия права и управления Федеральной службы исполнения наказаний России, Рязань

E-mail: customs.rzn.kay@yandex.ru