Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Хазова, Ю. Д. Лихогруд, Структуры параболической задачи с преобразованием пространственной переменной, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 186, 138–143

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-138-143>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 03:55:39

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 186 (2020). С. 138–143
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-186-138-143

УДК 517.957

СТРУКТУРЫ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

© 2020 г. Ю. А. ХАЗОВА, Ю. Д. ЛИХОГРУД

Аннотация. Рассматривается нелинейное параболическое уравнение с преобразованием пространственной переменной и периодическими условиями на окружности. Используя метод разделения переменных, доказана лемма о собственных функциях и собственных значениях соответствующей линеаризованной задачи. Методом центральных многообразий доказана теорема о существовании, форме и устойчивости рождающихся пространственно-неоднородных стационарных решений. На основе метода Галеркина проведен анализ приближенных решений исходной задачи.

Ключевые слова: параболическое уравнение, метод центральных многообразий, устойчивость, бифуркация, метод Галеркина.

STRUCTURES OF A PARABOLIC PROBLEM WITH TRANSFORMATION OF A SPATIAL VARIABLE

© 2020 YU. A. KHAZOVA, YU. D. LIKHOGHUD

ABSTRACT. A nonlinear parabolic equation with transformation of the spatial variable and periodic conditions on the circle is considered. Using the method of separation of variables, we obtain properties of eigenfunctions and eigenvalues of the corresponding linearized problem. Using the method of central manifolds, we prove the existence and stability of spatially inhomogeneous stationary solutions. Based on the Galerkin method, we analyze approximate solutions of the original problem.

Keywords and phrases: parabolic equation, method of central manifolds, stability, bifurcation, Galerkin method.

AMS Subject Classification: 35K55

1. Введение. Оптические системы с двумерной обратной связью проявляют довольно большие возможности осуществлять исследования процессов зарождения и изменения диссипативных систем. Обратная связь позволяет влиять на изменение оптической системы путем преобразования пространственных переменных. Влиять на изменения можно различными призмами, динамическими голограммами, линзами и другими устройствами. Одной из самых простых оптических систем, в которых создается неограниченный характер взаимодействия световых полей, служит нелинейный интерферометр с зеркальным отражением поля в двумерной обратной связи.

Нелинейное параболическое уравнение с преобразованием пространственной переменной и условиями периодичности на окружности является одной из математических моделей оптических систем с двумерной обратной связью (см. [1–3]).

В работе анализируются вопросы бифуркации пространственно-неоднородных стационарных решений, изменения их форм при уменьшении коэффициента диффузии и эволюция их устойчивости при удалении критического значения параметра бифуркации в область надкритичности. Для анализа наблюдаемых явлений могут быть использованы различные приемы. Одним из таких приемов является метод анализа изменения траекторий семейства «в целом», которые выходят из некоего ограниченного, в том или ином пространстве, множества начальных данных. Глобальный аттрактор, к которому притягиваются множества траекторий, шире множества физически реализующихся при больших временах предельных режимов. Таким образом, другим из подходов к решению рассматриваемой задачи является локальный анализ, основанный на линеаризации задачи в окрестностях любого известного решения, к примеру, пространственно однородного стационарного решения. Для анализа бифуркационных ветвлений может быть использована методика, которая основана на построении иерархии упрощенных математических моделей в окрестности точки бифуркации. Построение асимптотических разложений в такого рода задачах основано на методе центральных многообразий и методе Галеркина.

2. Метод центральных многообразий. Для описания различных процессов, протекающих в нелинейной оптической системе, состоящей из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного контура обратной связи, может быть задействована одномерная по пространству модель

$$u_t + u = D\Delta u + K \left(1 + \gamma \cos u \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, t \right) \right), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t), \quad (2)$$

где D — бифуркационный параметр, K, γ — фиксированные параметры, $u(\varphi, t)$ — искомая функция в пространстве 2π -периодических функций.

Данная краевая задача описывает динамику фазовой модуляции $u(\varphi, t)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $t > 0$ световой волны, которая прошла тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием координат в контуре обратной связи в одномерном приближении. Здесь D — коэффициент диффузии нелинейной среды, положительный коэффициент K пропорционален интенсивности входного поля, γ — контрастность интерференционной картины, $0 < \gamma < 1$, $Qu(\varphi) = u(\pi/2 - \varphi)$ — оператор преобразования пространственной переменной, который представляет из себя композицию двух операторов: Q_1 — поворот на $(-\pi/2)$ и Q_2 — отражение:

$$Q(u(\varphi, t)) = Q_1(Q_2(u(\varphi, t))) = Q_1(u(\pi - \varphi, t)) = u\left(\pi - \varphi - \frac{\pi}{2}, t\right) = u\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, t\right).$$

Особенностью задачи является существование решения, которое является пространственно однородным, описывающим спокойное распределение фазовой модуляции. Если применить к задаче изменение параметров модели, к примеру, уменьшение коэффициента диффузии нелинейной среды и, соответственно, изменение коэффициента D , то решение теряет свою устойчивость.

Определим из уравнения $\omega = K(1 + \gamma \cos \omega)$ решение вида $u = w(K, \varphi)$.

Фиксируем теперь гладкую ветвь решений $\omega = \omega(K, \gamma)$ так, чтобы выполнялось неравенство $1 + K\gamma \sin \omega(K, \gamma) \neq 0$. Линеаризуем (1) на выбранном $\omega(K, \gamma)$ и в результате получаем линеаризованную задачу

$$v_t + Lv = 0, \quad v(\varphi + 2\pi, t) = v(\varphi, t),$$

где $Lv = v - Dv_{\varphi\varphi} - \Lambda Qv$, $\Lambda = \Lambda(K, \gamma) = -K\gamma \sin \omega$, $Qv(\varphi, t) = v(\pi/2 - \varphi, t)$.

Методом разделения переменных доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Оператор L с условием периодичности на окружности имеет полную ортогональную систему собственных функций*

$$1, \cos \varphi, \sin \varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \dots,$$

соответствующих собственным значениям

$$\lambda_0 = \Lambda - 1, \quad \lambda_1^c = -D - 1 + \Lambda, \quad \lambda_1^s = -D - 1 + \Lambda, \quad \lambda_2^c = -4D - 1 - \Lambda, \quad \lambda_2^s = -4D - 1 + \Lambda, \dots$$

Критическими являются функции $\cos 2\varphi$, $\cos 3\varphi$, $\sin 3\varphi$, $\sin 4\varphi$, $\cos 6\varphi, \dots$, собственные значения которых могут поменять знак при уменьшении бифуркационного параметра D . Поэтому фиксируем K, γ таким образом, чтобы выполнялось следующее условие: $\Lambda = \Lambda(K, \gamma) < -1$.

При фиксированном K и $D > D_2$, где $D_2 = -(1 + \Lambda)/4$, $\omega(K, \gamma)$ является устойчивым решением исходной задачи. При уменьшении D и его прохождении через значение D_2 решение теряет свою устойчивость. Индекс неустойчивости решения $\omega(K, \gamma)$ равен 1, т. е. одно собственное значение меняет свой знак на противоположный.

Проведенная замена $u = \nu + w$ приводит (1) к виду

$$\nu_t + L\nu = \frac{\Lambda}{2!}Q\nu^2 \operatorname{ctg} \omega + \frac{\Lambda}{3!}Q\nu^3 + O(\nu^4), \quad \nu(\varphi, t) = \nu(\varphi + 2\pi, t), \quad (3)$$

где $L = 1 - D\Delta - \Lambda Q$, $Q\nu(\varphi, t) = \nu(\pi/2 - \varphi, t)$, $\Lambda = -K\gamma \sin \omega$.

Теорема 1 (см. [4]). Пусть выполнено условие $\Lambda = \Lambda(K, \gamma) < -1$. Существует такое $\delta > 0$, что если $0 < D - D_2 < \delta$, то задача (1)–(2) имеет пару асимптотически устойчивых решений $u^\pm(\varphi, D) = \omega + \nu^\pm(\varphi, D)$, где

$$\begin{aligned} \nu^\pm = \pm \left(\frac{D - D_2}{C_3(D_2)} \right)^{\frac{1}{2}} \cos 2\varphi + \frac{1}{2!} \left(\frac{D - D_2}{C_3} (D_2) \right) \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \left[\frac{1}{\lambda_0 - 2\lambda_2} + \frac{\cos 4\varphi}{\lambda_4 - 2\lambda_2} \right] \pm \\ \pm \frac{1}{3!} \left(\frac{D - D_2}{C_3(D_2)} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\cos 6\varphi}{\lambda_6 - 3\lambda_2} \left[\frac{\Lambda}{8} - \frac{3}{8} \Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega \frac{1}{\lambda_4 - 2\lambda_2} \right], \\ C_3 = \frac{\Lambda}{8} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \right)^2 \left[\frac{1}{\lambda_0 - 2\lambda_2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_4 - 2\lambda_2} \right] < 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно методу центральных многообразий будем строить решение задачи (3) в виде

$$\nu = z(t) \cos 2\varphi + \frac{1}{2!} \Omega_2(z, \varphi, D) + \frac{1}{3!} \Omega_3(z, \varphi, D) + \dots, \quad (4)$$

$$\dot{z} = -\lambda_2^c z + C_3 z^3 + \dots, \quad (5)$$

где $\Omega_2(z, \varphi, D) = q_2(\varphi)z^2$ — форма второй степени, а $\Omega_3(z, \varphi, D) = q_3(\varphi)z^3$ — форма третьей степени.

Подставляем (4) и (5) в уравнение (3) для нахождения коэффициентов разложения. При $z^2(t)$ получается уравнение

$$Lq_2 - 2\lambda_2 q_2 = \Lambda \operatorname{ctg} \omega \cos^2 2\varphi. \quad (6)$$

Решив уравнение (6), имеем выражение для

$$q_2 = \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \frac{1}{\lambda_0 - 2\lambda_2} + \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \frac{1}{\lambda_4 - 2\lambda_2} \cos 4\varphi.$$

При $z^3(t)$ получаем уравнение

$$\frac{1}{3} Lq_3 - \lambda_2 q_3 + C_3 \cos 2\varphi = -\frac{1}{2} \Lambda Q q_2 \operatorname{ctg} \omega \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \Lambda \cos 2\varphi + \frac{1}{24} \Lambda \cos 6\varphi.$$

Для разрешимости уравнения необходима и достаточна ортогональность правой части уравнения решениям соответствующей однородной задачи. Условие разрешимости этого уравнения приводит к однозначному определению C_3 :

$$C_3 = \frac{\Lambda}{8} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \right)^2 \left[\frac{1}{\lambda_0 - 2\lambda_2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_4 - 2\lambda_2} \right] < 0.$$

С учетом найденного коэффициента C_3 и необходимых преобразований, можно сделать вывод, что q_3 будет иметь вид

$$q_3 = \frac{1}{\lambda_6 - 3\lambda_2} \left[\frac{\Lambda}{8} - \frac{3}{8} \Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega \frac{1}{\lambda_4 - 2\lambda_2} \right] \cos 6\varphi.$$

Поскольку $\lambda_2(D_2) < 0$, то имеет место бифуркация типа «вилка». Из тривиальной особой точки уравнения (5) ответвляются пара асимптотически устойчивых точек

$$\dot{z} = -\lambda_2^c z + C_3 z_3 \implies z^\pm = \pm \left(\frac{D - D_1}{C_3(D_1)} \right)^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Следовательно, в уравнении (5) происходит надкритическая бифуркация рождения асимптотически устойчивых пространственно-неоднородных стационарных решений

$$\begin{aligned} \nu^\pm = \pm \left(\frac{D - D_2}{C_3(D_2)} \right)^{\frac{1}{2}} \cos 2\varphi + \frac{1}{2!} \left(\frac{D - D_2}{C_3(D_2)} \right) \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \left[\frac{1}{\lambda_0 - 2\lambda_2} + \frac{\cos 4\varphi}{\lambda_4 - 2\lambda_2} \right] \pm \\ \pm \frac{1}{3!} \left(\frac{D - D_2}{C_3(D_2)} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\cos 6\varphi}{\lambda_6 - 3\lambda_2} \left[\frac{\Lambda}{8} - \frac{3}{8} \Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega \frac{1}{\lambda_4 - 2\lambda_2} \right]. \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

3. Метод Галеркина. Метод Галеркина представляет собой метод приближенного решения краевой задачи. В уравнении такого типа оператор может содержать как частные производные, так и полные производные искомой функции. Общий вид функции определяется из особенностей задачи, и для удобства работы с ним часто используются тригонометрические функции, полиномы Лежандра, Чебышева, Эрмита и др.

Решение можно представить в виде разложения по базису:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(x).$$

В данной работе в качестве базиса будем использовать собственные функции соответствующей линейаризованной задачи. Исследуется общий случай уравнения (3), когда $\cos \omega \neq 0$, т. е. выясняется влияние квадратичного и кубического слагаемых на форму и устойчивость возникающих пространственно-неоднородных стационарных решений. Согласно теореме (1) нулевое решение (3) асимптотически устойчиво для всех $D > D_2$, $D_2 = -(1 + \Lambda)/4$. При уменьшении параметра D и его прохождении через значение D_2 нулевое решение теряет устойчивость. В результате от нуля ответвляется пара пространственно-неоднородных стационарных решений $\nu_2^\pm$, которая рождается устойчивой. При дальнейшем уменьшении D и прохождении значения $D_3 = -(1 + \Lambda)/9$ из неустойчивого нулевого решения бифурцирует еще одна пара пространственно-неоднородных стационарных решений $\nu_3^\pm$, которая рождается неустойчивой с индексом неустойчивости 1. Остановимся на анализе рождающейся пары $\nu_2^\pm$.

Рассмотрим галеркинскую аппроксимацию уравнения (3) в виде

$$\nu = \sum_{s=0}^N z_s \cos(s\varphi) + \sum_{k=1}^N z_{k+N} \sin(k\varphi). \quad (7)$$

Подставим (7) в уравнение (3). Приравняв затем коэффициенты при $\cos s\varphi$ и $\sin k\varphi$, $s = 0, \dots, N$, $k = 1, \dots, N$, приходим к системе дифференциальных уравнений относительно $z = z(z_1, \dots, z_s, z_{k+1}, \dots, z_{k+N})$

$$\begin{aligned} \dot{z}_s &= -\lambda_s^c z_s + g_s(z), & s &= 0, \dots, N; \\ \dot{z}_{k+N} &= -\lambda_k^s z_{k+N} + g_{k+N}(z), & k &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (8)$$

Функции $g_s(z)$, $g_{k+N}(z)$ также зависят от порядка аппроксимации N (в связи с громоздкостью выражения для них не приводятся).

Системы уравнений (8) обладают рядом общих свойств. Для каждого N нулевое решение (8) асимптотически устойчиво, если $D > D_2$. Нулевое решение (8) теряет устойчивость при прохождении параметра D через значение D_2 . Максимальная точка спектра нулевого решения проходит

в этом случае через ноль с ненулевой скоростью. В результате этой бифуркации от нуля ответвляется пара устойчивых непрерывных ветвей неподвижных точек

$$z_{\pm}^1(D, N) = (z_{s,\pm}^1(D, N), 0), \quad s = 0, \dots, N,$$

где все четные компоненты имеют ненулевые значения, а нечетные — нулевые. Справедливо неравенство

$$|z_{2,\pm}^1(D, N)| > |z_{4,\pm}^1(D, N)| > \dots$$

В силу (7) и определения $z_{\pm}^1(D, N)$ получаем следующее выражение для приближенных решений уравнения (3)

$$\nu_2^{\pm}(\varphi, D) \approx \sum_{s=1}^N z_{2s,\pm}^1(D, N) \cos s\varphi. \quad (9)$$

Опишем динамику формы решения (9) в зависимости от параметра D . Численные расчеты проводились для N от 10 до 33. Для значений параметра D вблизи D_2 решение $\nu_1^{\pm}(\varphi, D)$ является квазигармонической функцией с малой амплитудой. Амплитуда функции (9) монотонно возрастает с убыванием параметра D и приближается к ступенчатому виду.

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости стационарного решения $\nu_2^{\pm}(\varphi, D)$. С этой целью обратимся к динамике спектра $\sigma(z_{\pm}^1(D))$ ветви неподвижных точек $z_{\pm}^1(\varphi, D)$ системы (8). Проведенный анализ показал, что при убывании параметра D точки спектра сближаются. Спектры $z_+^1(D, N)$, $z_-^1(D, N)$ совпадают. В качестве примера приведем 3 максимальные точки спектра при $N = 10$, $\omega = 1,72$, $\Lambda = -1,78$:

$$\begin{aligned} \sigma(z^1(0,03)) &= \{\dots; -1,18; -0,983; -0,064\}, & \sigma(z^1(0,02)) &= \{\dots; -1,18; -0,983; -0,064\}, \\ \sigma(z^1(0,151)) &= \{\dots; -1,135; -0,807; 0,000\}, & \sigma(z^1(0,009)) &= \{\dots; -1,081; -0,547; 0,051\}. \end{aligned}$$

Проведенный анализ для N от 10 до 33 дает основание предполагать, что решение $\nu_2^{\pm}(\varphi, D)$ асимптотически устойчиво на промежутке (D_2^*, D_2) изменений параметра D . При прохождении через D_2^* максимальная точка спектра переходит на положительную полуось, и решение $\nu_2^{\pm}$ теряет устойчивость. В результате от пространственно-неоднородных стационарных решений $\nu_2^{\pm}(\varphi, D)$ бифурцируют две пары устойчивых решений. Анализ этих решений является отдельной задачей и объектом дальнейших исследований.

4. Заключение. В этой статье исследовалось параболическое уравнение с преобразованием пространственной переменной. Применялся метод центральных многообразий и метод Галеркина. Используя метод центральных многообразий, была доказана теорема о существовании, форме и устойчивости решений исходной задачи в окрестности бифуркационного значения коэффициента диффузии. Получена форма пространственно-неоднородных стационарных решений, рождающихся в результате бифуркации «вилка» во время перехода бифуркационного параметра через критическую точку (значение). Это решение рождается асимптотически устойчивым.

Но доказанная теорема носит локальный характер. Поэтому для дальнейшего исследования динамики изменений рождающихся решений при удалении от бифуркационного значения параметра использовался метод Галеркина. Численные расчеты были проделаны с помощью пакета Mathematica. Они показали, что применение метода Галеркина дает количественно и качественно правильные результаты. Полученные данные согласовываются с результатами, которые получили другие авторы, и могут быть применены для постановки опытов по изучению явлений в оптических структурах с обратной связью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей// в кн.: Новые физические принципы оптической обработки информации. — М.: Наука, 1990. — С. 263–325.
2. Хазова Ю. А. Метаустойчивые структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной на отрезке// Динам. сист. — 2017. — 2, № 7 (35). — С. 121–131.

3. *Хазова Ю. А.* Интегральное представление приближенных решений параболического уравнения// Актуальные направления научных исследований XXI в.: Теория и практика. — 2018. — 6, № 6. — С. 384–386.
4. *Хазова Ю. А., Шиян О. В.* Теорема о существовании и устойчивости решения одного параболического уравнения// Динам. сист. — 2018. — 3, № 8 (36). — С. 275–280.

Хазова Юлия Александровна

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь

E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com

Лихогруд Юлия Дмитриевна

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь

E-mail: nic.bonn@mail.ru