Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Шагалова, Непрерывное обобщенное решение уравнения Гамильтона—Якоби с некоэрцитивным гамильтонианом, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 186, 144–151

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-144-151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:34:18

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 186 (2020). С. 144–151
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-186-144-151

УДК 517.95

НЕПРЕРЫВНОЕ ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ С НЕКОЭРЦИТИВНЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ

© 2020 г. Л. Г. ШАГАЛОВА

Аннотация. Рассматривается возникающая в молекулярной биологии задача Коши для уравнения Гамильтона—Якоби с фазовыми ограничениями. Задача не имеет классического решения, и гамильтониан не удовлетворяет условиям, при которых существуют известные (минимаксное и/или вязкостное) обобщенные решения. Введено новое непрерывное обобщенное решение. Представлены достаточные условия существования глобального решения, сохраняющего структуру, задаваемую начальным многообразием. Исследуется поведение такого решения при больших значениях времени.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона—Якоби, некоэрцитивный гамильтониан, обобщенное решение, фазовое ограничение, метод характеристик.

CONTINUOUS GENERALIZED SOLUTION OF THE HAMILTON—JACOBI EQUATION WITH A NONCOERCIVE HAMILTONIAN

© 2020 L. G. SHAGALOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider the Cauchy problem for the Hamilton—Jacobi equation with phase constraints arising in molecular biology. The problem has no classical solutions, and the Hamiltonian does not satisfy the conditions guaranteeing the existence of minimax or viscous generalized solutions. A new continuous generalized solution is obtained. We present sufficient conditions for the existence of a global solution preserving the structure given by the initial manifold. The behavior of such solutions is examined for large values of time.

Keywords and phrases: Hamilton—Jacobi equation, noncoercive Hamiltonian, generalized solution, phase constraint, method of characteristics.

AMS Subject Classification: 35F21, 35F25, 49K15

1. Введение. Задачи, связанные с решением уравнений Гамильтона—Якоби, возникают в разных областях — механике, оптимальном управлении, оптике и других. При этом такие уравнения, как правило, не имеют классических решений. Однако в рассматриваемых задачах обычно существуют функции, имеющие определенный физический смысл, удовлетворяющие уравнениям почти всюду в области определения. Это обстоятельство побуждает вводить обобщенные решения.

Работа выполнена при поддержке Правительства Российской Федерации (постановление № 211, проект № 02.A03.21.0006) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00362).

Известны различные концепции обобщенных решений уравнений Гамильтона—Якоби (см., например [1, 4, 8, 9, 13]). В рамках этих концепций доказаны теоремы существования и единственности для начальных и краевых задач различных типов, исследуются поведение и асимптотика решений, разрабатываются методы построения. Несмотря на различие подходов, для существования обобщенных решений во всех концепциях на гамильтониан задачи накладываются определенные требования, такие как условие подлинейного роста производной по импульсной переменной или условие коэрцитивности. Вместе с тем ряд практических задач (например, в молекулярной эволюции (см. [11]) и в кристаллографии (см. [16]) приводят к уравнениям Гамильтона—Якоби, в которых гамильтониан не удовлетворяет указанным условиям, и для которых не выполнены условия существования известных обобщенных решений. Для таких задач требуется по-новому определять обобщенные решения.

В настоящей статье рассматривается следующее уравнение Гамильтона—Якоби, полученное в [11] для модели Кроу—Кимуры молекулярной эволюции:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [-1; 1], \quad (1)$$

где гамильтониан $H(\cdot)$ имеет вид

$$H(x, p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}. \quad (2)$$

Функция $f(\cdot)$ в (2) предполагается непрерывно дифференцируемой. Задана также непрерывно дифференцируемая функция $u_0: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, и уравнение (1) рассматривается совместно с условием

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [-1; 1]. \quad (3)$$

Несложно проверить, что гамильтониан (2) не удовлетворяет условию коэрцитивности, т.е. для него не выполняется условие

$$H(x, p) \rightarrow +\infty \text{ при } |p| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Условие (4) нарушается при $x = -1$ и $x = 1$.

В [11] задача (1)–(3) использовалась для анализа динамики модели Кроу—Кимуры в случае входных данных вида $f(x) = x^2$, $u_0(x) = -a(x - x_0)^2$, $a > 0$, $x_0 \in (-1; 1)$. При этом авторы не указывали, какой объект понимается под решением, а их анализ основывался на физических интерпретациях и применении метода характеристик.

В данной статье задача (1)–(3) изучается в случае общего вида непрерывно дифференцируемых входных данных — начальной функции $u_0(\cdot)$ и фитнеса $f(\cdot)$. Ключевыми вопросами являются определение непрерывного обобщенного решения и изучение его свойств.

2. Поведение характеристик. Метод характеристик (см., например, [2]) — классический метод решения задачи Коши для уравнений в частных производных первого порядка (УЧП1). Этот метод сводит интегрирование УЧП1 к решению характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Характеристическая система для задачи (1)–(3) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x, p) = -(1+x)e^{2p} + (1-x)e^{-2p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x, p) = f'(x) + (e^{2p} - e^{-2p})/2, \\ \dot{z} &= pH_p(x, p) - H(x, p) \end{aligned} \quad (5)$$

и рассматривается с начальными условиями

$$x(0, y) = y, \quad p(0, y) = u'_0(y), \quad z(0, y) = u_0(y), \quad y \in [-1; 1]. \quad (6)$$

Здесь $H_x(x, p) = \partial H(x, p)/\partial x$, $H_p(x, p) = \partial H(x, p)/\partial p$, $f'(x) = \partial f(x)/\partial x$. Решения системы (5), (6) называются характеристиками. Компоненты $x(\cdot, y)$, $p(\cdot, y)$ и $z(\cdot, y)$ решения называются соответственно фазовыми, импульсными и ценовыми характеристиками.

Согласно методу характеристик $u(t, x) = z(t, y)$, где y таково, что $x(t, y) = x$. Метод характеристик может быть применен для решения задачи (1)–(3) в такой окрестности начального

Рис. 1. Фазовые характеристики. $f(x) = -0,25x^2$, $u_0(x) = 0,25(x - 0,5)^2 - 0,1 \cos 2\pi x$.

многообразия (6), в которой фазовые характеристики не пересекаются. Как правило, характеристики (5), (6) ведут себя нерегулярно: они непродолжимы на всю ось времени и пересекают друг друга. Более того, в полосе $t \geq 0$, $-1 \leq x \leq 1$, в которой требуется определить решение задачи (1)–(3), существуют точки, через которые не проходит ни одна характеристика. Пример такого поведения характеристик представлен на рис. 1.

Из вышесказанного следует, что решение задачи (1)–(3) нужно понимать в обобщенном смысле.

3. Обобщенное решение на конечном отрезке времени. В [5–7] задача (1)–(3) рассматривалась на ограниченном замкнутом множестве $\bar{\Pi}_T = [0; T] \times [-1; 1]$, где момент $T > 0$ определяется из условия продолжимости характеристик (5), (6) на отрезок $[0, T]$. Точные оценки для интервалов продолжимости, зависящие от начальных значений импульсной переменной, приведены в [12]. В [5] было введено обобщенное решение задачи (1)–(3). Прежде чем привести здесь определение обобщенного решения, введем обозначения и напомним определения суб- и супердифференциала функции.

Обозначим $\Pi_T = (0; T) \times (-1; 1)$, $\Gamma_T = \{(t, x) \mid t \in (0, T), x = \pm 1\}$.

Пусть задано множество $W \subset \mathbb{R}^2$. Символами $\bar{W}$ и $co W$ будем обозначать соответственно его замыкание и выпуклую оболочку. Класс функций, непрерывных на множестве W , будем обозначать через $C(W)$.

Пусть $u(\cdot) \in C(\bar{W})$ и $(t, x) \in \bar{W}$.

Субдифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t, x) называется множество

$$D^-u(t, x) = \left\{ (a, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \liminf_{\substack{(\tau, y) \rightarrow (t, x) \\ (\tau, y) \in W}} \frac{u(\tau, y) - u(t, x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geq 0 \right\}.$$

Супердифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t, x) называется множество

$$D^+u(t, x) = \left\{ (a, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \limsup_{\substack{(\tau, y) \rightarrow (t, x) \\ (\tau, y) \in W}} \frac{u(\tau, y) - u(t, x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \leq 0 \right\}.$$

Пусть функция $u(\cdot) \in C(\overline{\Pi}_T)$. Символом $\text{Dif}(u)$ обозначим множество точек, в которых функция $u(\cdot)$ дифференцируема. Определим множество

$$\partial u(t, x) = \text{co} \left\{ (a, s) : a = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial u(t_i, x_i)}{\partial t}, s = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial u(t_i, x_i)}{\partial x}; \right. \\ \left. (t_i, x_i) \rightarrow (t, x) \text{ при } i \rightarrow \infty, (t_i, x_i) \in \text{Dif}(u) \right\}.$$

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1)–(3) в области $\overline{\Pi}_T$ назовем непрерывную функцию $u(\cdot): \overline{\Pi}_T \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую начальному условию (3) и условиям

$$a + H(x, s) \leq 0, \quad \forall (a, s) \in D^+u(t, x), \quad \forall (t, x) \in \Pi_T, \quad (7)$$

$$a + H(x, s) \geq 0, \quad \forall (a, s) \in D^-u(t, x), \quad \forall (t, x) \in \Pi_T, \quad (8)$$

$$a + H(x, s) \geq 0, \quad \forall (a, s) \in D^-u(t, x) \cap \partial u(t, x), \quad \forall (t, x) \in \Gamma_T. \quad (9)$$

Отметим, что определение 1 отличается от определения вязкостного решения (см. [8, 9]) введением пересечения субдифференциала $D^-u(t, x)$ с множеством $\partial u(t, x)$ на границе Γ_T . Это обусловлено тем обстоятельством, что в силу некоэрцитивности гамильтониана $H(\cdot)$ вида (2) субдифференциал $D^-u(t, x)$ в точке $(t, x) \in \Gamma_T$, если он непуст, является неограниченным множеством, и без введения пересечения проверка условия (9), например, при $x = 1$ сводится к неравенству

$$a + H(1, s + k) = a - f(x) + 1 - e^{s+k} \geq 0, \quad \forall k \geq 0,$$

которое, очевидно, не выполняется.

В [5] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть функции $u_0(\cdot): [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ и $f(\cdot): [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ являются непрерывно дифференцируемыми. Тогда существует обобщенное решение $u(\cdot): \overline{\Pi}_T \rightarrow \mathbb{R}$ в смысле определения 1.

Доказательство теоремы 1 имеет конструктивный характер и основывается на применении методов теории оптимального управления (см. [3]) и обобщенных характеристик (см. [14]).

Из результатов работы [5] следует, что обобщенное решение не является единственным. Поэтому в [6, 7] рассматривалась описанная ниже задача о построении решения заданной структуры.

4. Обобщенное решение заданной структуры. Пусть область $\Omega_0 \subset \overline{\Pi}_T$ образована графиками фазовых компонент характеристик (5), (6)

$$\Omega_0 = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, x = x(t, y), y \in [-1; 1]\}.$$

Рассмотрим функцию

$$u(t, x) = \max_{x(t, y)=x} \left[u_0(y) + \int_0^t p(\tau) H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau)) d\tau \right], \quad (10)$$

где $x(t) = x(t, y)$ и $p(t) = p(t, y)$ являются соответственно фазовой и импульсной компонентами решения характеристической системы (5), (6), определяемого параметром $y \in [0; 1]$.

Задача о построении обобщенного решения заданной структуры заключается в построении непрерывного продолжения функции (10) на всю область $\overline{\Pi}_T$ так, чтобы полученная функция являлась обобщенным решением задачи (1)–(3) в смысле определения 1.

В [7] были получены достаточные условия существования обобщенного решения заданной структуры, и с помощью методов вариационного исчисления обоснована конструкция его построения.

5. Глобальное обобщенное решение. Рассмотрим решение, определенное на бесконечном временном интервале $t \geq 0$.

Определение 2. Непрерывная функция $u(\cdot): [0, \infty) \times [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ называется глобальным обобщенным решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет начальному условию (3) и если для любого положительного T сужение $u|_T$ этой функции на область $\bar{\Pi}_T$ удовлетворяет определению 1. Если при этом для любого $T > 0$ сужение $u|_T$ является обобщенным решением заданной структуры, функция $u(\cdot)$ называется глобальным решением заданной структуры.

Пусть задано значение $y \in [-1; 1]$. Определим значение $T^*(y)$ из условия существования на интервале $[0, T^*(y))$ непродолжимого вправо решения характеристической системы (5), (6). Если $T^*(y) \neq \infty$, определим непрерывное продолжение соответствующей фазовой характеристики следующим образом

$$x(t, y) = \lim_{\tau \rightarrow T^*(y)} x(\tau, y), \quad t \geq T^*(y). \quad (11)$$

Можно показать, что предел в (11) равен либо -1 , либо 1 .

Предположим, что для определенных таким образом функций выполнено условие

Условие А. Для всех $y \in [-1; 1]$, $t \geq 0$ справедливо

$$-1 \leq x^-(t) \leq x(t, y) \leq x^+(t) \leq 1.$$

Здесь $x^-(t) = x(t, -1)$ и $x^+(t) = x(t, 1)$ — непрерывные продолжения фазовых компонент характеристик, выпущенных в момент $t = 0$ из точек $x = -1$ и $x = 1$ соответственно.

Рассмотрим также следующие условия.

Условие В1. Производная $u'_0(\cdot): [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет неравенствам

$$u'_0(-1) > 0, \quad u'_0(1) < 0.$$

Условие В2. Производная $f'(\cdot): [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная монотонно неубывающая функция, удовлетворяющая неравенствам

$$2f'(1) + e^{2u'_0(1)} < e^{-2u'_0(1)}, \quad 2f'(-1) + e^{-2u'_0(-1)} < e^{2u'_0(-1)}.$$

В [15] доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть для задачи (1)–(3) выполнены условия А, В1, В2. Тогда для этой задачи существует глобальное обобщенное решение заданной структуры.

Можно получить также другие достаточные условия существования глобального решения.

Теорема 3. Пусть для задачи (1)–(3) выполнены условия В1, В2 и следующее условие на производную начальной функции

Условие В3. $u'_0(1) \leq u'_0(y) \leq u'_0(-1)$ для всех $y \in [-1; 1]$.

Тогда существует глобальное обобщенное решение заданной структуры.

Доказательство. Используя изученные в [5, 7, 12] свойства решений характеристической системы (5), (6), можно показать, что из набора условий В1, В3 следует выполнение условия А, и, таким образом, выполнены условия теоремы 2, при которых существует глобальное решение заданной структуры. $\square$

Аналогично тому, как это сделано в [7, 15], можно показать, что значения глобального решения заданной структуры на границе $\Gamma = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq 0, x = \pm 1\}$ имеют вид

$$u(t, -1) = u_0(-1) + (f(-1) - 1)t, \quad u(t, 1) = u_0(1) + (f(1) - 1)t. \quad (12)$$

При этом субдифференциалы решения в граничных точках являются неограниченными множествами

$$D^-(t, -1) = \{(f(-1) - 1, s) \mid s \in \mathbb{R}, s \leq 0\}, \quad D^-(t, 1) = \{(f(1) - 1, s) \mid s \in \mathbb{R}, s \geq 0\}.$$

Структура множеств $\partial u(t, x)$ на границе Γ следующая

$$\partial(t, -1) = \{(f(-1) - 1, \infty)\}, \quad \partial(t, 1) = \{(f(1) - 1, -\infty)\}.$$

Рис. 2. График глобального обобщенного решения

6. Поведение глобального решения заданной структуры при больших значениях времени. Во многих работах (см., например, обзор в [10]) исследовалась асимптотика вязкостных решений уравнений Гамильтона—Якоби, получены условия равномерной сходимости решения к функции вида $v(x) + ct$. В этих условиях существенными являются коэрцитивность и строгая выпуклость гамильтониана по импульсной переменной.

Рассмотрим поведение глобального решения задачи (1)–(3) при больших значениях t . Заметим, что в открытой области, ограниченной графиками продолженных для всех $t > 0$ фазовых компонент $x^-(t)$ и $x^+(t)$ характеристик, стартующих в момент $t = 0$ из точек $x = -1$ и $x = 1$ соответственно, по построению глобальное решение заданной структуры $u(t, x)$ совпадает с вязкостным.

Если существуют константа c и функция $v(x)$ такие, что $u(x, t) - v(x) - ct \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $x \in [-1; 1]$, они должны удовлетворять уравнению

$$H(x, v'(x)) = c, \quad x \in [-1; 1], \quad (13)$$

где $v'(\cdot)$ — производная функции $v(\cdot)$.

Пусть функция фитнеса постоянна, то есть для всех $x \in [-1; 1]$ справедливо $f(x) = f$, где f — некоторое действительное число. Тогда уравнение (13) будет выполняться только в случае, когда $v'(x) = 0$, $x \in [-1; 1]$. Это означает, что функция $v(\cdot)$ постоянна, то есть существует такое $v \in \mathbb{R}$, что $v(x) = v$ для всех $x \in [-1; 1]$. При этом $c = -f$. Таким образом, если для глобального обобщенного решения существует асимптотика, она имеет вид $-ft + v$. Но для всех $v \in \mathbb{R}$ линейная функция $-ft + v$ отличается от функций $u(t, -1)$ и $u(t, 1)$, заданных соотношениями (12), определяющих глобальное обобщенное решение на границе Γ . Итак, в общем случае для непрерывного глобального обобщенного решения заданной структуры не существует асимптотики вида $v(x) + ct$.

7. Результаты моделирования. На рис. 2 представлен график глобального обобщенного решения заданной структуры для случая, когда фитнес $f(x) = 1 - 0,2 \cos x$, а начальная функция $u_0(x) = \cos 0,5x$. На рис. 3 для тех же входных данных задачи — фитнеса и начальной функции — представлено поведение фазовых компонент характеристик. Жирными линиями выделены фазовые характеристики $x^-(t) = x(t, -1)$ и $x^+(t) = x(t, 1)$.

Рис. 3. Фазовые компоненты характеристик, формирующих обобщенное решение

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кружков С. Н. Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными, I // Мат. сб. — 1966. — 70 (112), № 3. — С. 394–415.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1961.
4. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона—Якоби. — М.: Наука, 1991.
5. Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г. О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона—Якоби с фазовыми ограничениями // Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2011. — 17, № 2. — С. 191–208.
6. Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г. Построение обобщенного решения уравнения, сохраняющего тип Беллмана в заданной области фазового пространства // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2012. — 277. — С. 243–256.
7. Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г. О непрерывном продолжении обобщенного решения уравнения Гамильтона—Якоби характеристиками, образующими центральное поле экстремалей // Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2015. — 21, № 2. — С. 220–235.
8. Capuzzo-Dolcetta I., Lions P. L. Hamilton–Jacobi equations with state constraints // Trans. Am. Math. Soc. — 1990. — 318, № 2. — P. 643–683.
9. Crandall M. G., Lions P. L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Am. Math. Soc. — 1983. — 377, № 1. — P. 1–42.
10. Ichihara N., Ishii H. The large-time behavior of solutions of Hamilton–Jacobi equations on the real line // Meth. Appl. Anal. — 2008. — 15, № 2. — P. 223–242.
11. Saakian D. B., Rozanova O., Akmetzhanov A. Phys. Rev. E // — 2008. — 78, № 4. — 041908.
12. Shagalova L. Applications of dynamic programming to generalized solutions for Hamilton–Jacobi equations with state constraints // SOP Trans. Appl. Math. — 2014. — 1, № 2. — P. 70–83.
13. Subbotin A. I. Generalized Solutions of First Order Partial Differential Equations. The Dynamical Optimization Perspective. — Boston: Birkhäuser, 1995.
14. Subbotina N. N. The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // Mod. Math. Appl. — 2004. — 20. — P. 2955–3091.
15. Subbotina N. N., Shagalova L. G. The study of evolution in the Crow–Kimura molecular genetics model using methods of calculus of variations // AIP Conf. Proc. — 2017. — 1907, № 1. — 020001.

16. *Yokoyama E., Giga Y., Rybka P.* A microscopic time scale approximation to the behavior of the local slope on the faceted surface under a nonuniformity in supersaturation// *Phys. D: Nonlin. Phenom.* — 2008. — 237. — P. 2845–2855.

Шагалова Любовь Геннадьевна

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского

Уральского отделения РАН, Екатеринбург;

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина,
Екатеринбург

E-mail: shag@imm.uran.ru