Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Васильев, Фредгольмовы операторные многообразия, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 187, 12–18

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-187-12-18>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:23:56

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 12–18
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-12-18

УДК 517.929

ФРЕДГОЛЬМОВЫ ОПЕРАТОРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

© 2020 г. В. Б. ВАСИЛЬЕВ

Аннотация. Рассматриваются специальные классы операторов, действующих в функциональных пространствах на многообразиях. Применяемый подход можно назвать операторно-геометрической трактовкой хорошо известного локального принципа. В абстрактной форме описаны условия фредгольмовости рассматриваемых операторов и показано, как эти результаты можно применить к исследованию эллиптических псевдодифференциальных операторов на многообразиях с негладкой границей.

Ключевые слова: локальный оператор, операторное многообразие, фредгольмовость, индекс.

FREDHOLM OPERATOR MANIFOLDS

© 2020 V. B. VASIL'EV

ABSTRACT. We consider special classes of operators acting in functional spaces on manifolds. We can say that our approach is an operator-geometric treatment of the well-known local principle. In an abstract form, the conditions of the fredholmness are described and it is shown how these results can be applied to the study of elliptic pseudodifferential operators on manifolds with a non-smooth boundary.

Keywords and phrases: local operator, operator manifold, Fredholm property, index.

AMS Subject Classification: 47B07, 58J05

1. Введение. Работы И. Б. Симоненко (см. [8]), посвященные локальному принципу, с которыми автор познакомился много лет назад, оказали сильное влияние на все его последующие исследования. Почти сразу появились алгебраические версии этого принципа (см. [3]), и все дальнейшие работы в этом направлении так или иначе были связаны с алгебраическими конструкциями (см. [4–7, 10–17]). На наш взгляд, операторно-геометрические конструкции, предлагаемые в настоящей работе, более наглядно и точно отражают природу псевдодифференциального оператора, действующего в функциональных пространствах на многообразии. В простейшем варианте эти идеи уже появлялись в работах автора [1, 18]. Мы приведем здесь два основных результата о представлении такого оператора: теорему, которая утверждает, что оператор допускает «разложение» на несколько составляющих операторов, и теорему об индексе, которая гласит, что индекс оператора будет представлять собой сумму индексов составляющих операторов. Некоторые результаты описаны в [19].

2. Архетипы основных конструкций. Результаты, полученные в этой работе, можно условно назвать «геометрической интерпретацией локального принципа». Основная идея автора заключается в определении многообразия посредством локального оператора, действующего в локальном функциональном пространстве на этом многообразии.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.7311.2017/8.9).

2.1. Локальные функциональные пространства. Мы приведем определения «локальных» пространств Соболева—Слободецкого, которые связаны с псевдодифференциальными операторами переменного порядка (см. [2]); ниже будем повсеместно их использовать в качестве «модельных» пространств.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ — область. В действительности будем иметь дело лишь со следующими типами «канонических» конических областей: пространство $\mathbb{R}^m$, полупространство $\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}$ и k -мерное коническое ребро вида $\mathbb{R}^k \times C_{m-k}^a$, где $C_{m-k}^a = \{x \in \mathbb{R}^{m-k} : x = (x'', x_{m-k}), x_{m-k} > a|x''|, a > 0\}$. Все рассматриваемые m -мерные области D_k занумеруем индексами $k = 0, 1, \dots, m$, подразумевая, что

$$\begin{aligned} D_m &\equiv \mathbb{R}^m \times C_0^a \equiv \mathbb{R}^m, & D_{m-1} &\equiv \mathbb{R}^{m-1} \times C_1^a \equiv \mathbb{R}_+^m, \\ D_k &\equiv \mathbb{R}^k \times C_{m-k}^a, \quad k = 1, 2, \dots, m-2, & D_0 &\equiv \mathbb{R}^0 \times C_m^a \equiv \{x \in \mathbb{R}^m : x_m > a|x'|\}. \end{aligned}$$

По определению (см. [2, 9]), локальное пространство Соболева—Слободецкого $H^{s(x_0)}(\mathbb{R}^m)$ состоит из (обобщенных) функций u с конечной нормой (точка $x_0 \in \mathbb{R}^m$ фиксирована)

$$\|u\|_{s(x_0)} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s(x_0)} d\xi \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где $\tilde{u}$ обозначает преобразование Фурье функции u :

$$\tilde{u}(\xi) \equiv \int_{\mathbb{R}^m} e^{ix \cdot \xi} u(x) dx.$$

2.2. Локальные операторы. Локальные операторы будут действовать в локальных пространствах. Грубо говоря, локальные операторы выглядят следующим образом:

$$u(x) \mapsto \int_D \int_{\mathbb{R}^m} A(\xi) e^{i\xi \cdot (x-y)} u(y) dy d\xi, \quad x \in D,$$

где $A(\xi)$ — некоторая функция, определенная на $\mathbb{R}^m$ и называемая локальным символом, D — одна из канонических конических областей. Чуть ниже мы уточним это понятие.

3. Операторные многообразия. Пусть M — m -мерное компактное многообразие с границей (краем), причем эта граница негладкая. Последнее означает следующее. На границе имеются точки, окрестности которых диффеоморфны одной из канонических областей $D_k \subset \mathbb{R}^m$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, окрестности же внутренних точек многообразия M диффеоморфны $D_m \equiv \mathbb{R}^m$. Иначе говоря, на многообразии M выделены гладкие компактные подмногообразия (особенности) $M_k, k = 0, 1, \dots, m-2$, окрестности точек которых диффеоморфны D_k . Окрестность же точки гладкости границы диффеоморфна D_{m-1} . С каждой точкой x_0 многообразия M свяжем локальное пространство Соболева—Слободецкого $H^{s(x_0)}(D_{x_0})$ (см. [2]), причем предполагаем следующее. Для всех точек $x_0 \in M_k$ функция $s(x_0)$ постоянна и принимает только одно значение s_k , область D_{x_0} также имеет один и тот же вид D_k .

Определение 1. Многообразие M называется *операторным многообразием*, если в окрестности каждой точки многообразия определена оператор-функция $M \ni x \mapsto A(x)$, где оператор является линейным ограниченным оператором $A(x) : H^{s(x)}(D_x) \rightarrow H^{t(x)}(D_x)$.

Возможно, такое определение выглядит слишком общим, однако ниже мы постараемся показать, что оно вполне жизнеспособно, причем даже в случае, отличном от конкретных пространств Соболева—Слободецкого. Применение же абстрактных результатов будет связано с пространствами Соболева—Слободецкого.

4. Виртуальные операторы. В этом разделе делается попытка развить некий абстрактный вариант теории локальных операторов в определенных функциональных пространствах. Эти размышления возникли в связи с работами И. Б. Симоненко (см. [8]), посвященными исследованию операторов локального типа (для краткости мы здесь их называем локальными). Простейшей и наиболее распространенной моделью таких операторов являются псевдодифференциальные операторы. Существует несколько подходов к построению теории фредгольмовости таких операторов и связанных с ними уравнений на негладких многообразиях или на гладких многообразиях с негладкой границей (см. [5, 6, 10–13, 15–17]), однако вряд ли эти построения можно уложить в описываемую абстрактную схему. Предварительные построения автора можно найти в работе [19]; здесь предлагается дальнейшее развитие, продвижение и применение.

Здесь мы напомним некоторые идеи и определения из [8, 19]. Пусть B_1, B_2 — банаховы пространства функций, определенных на компактном m -мерном многообразии M . Мы будем предполагать, что гладкие функции с компактным носителем плотны в этих функциональных пространствах. Далее, пусть $A : B_1 \rightarrow B_2$ — линейный ограниченный оператор.

Определение 2. Оператор A называется *локальным*, если оператор $f \cdot A \cdot g$ является компактным для любых двух гладких функций f, g с непересекающимися носителями.

Всюду ниже рассматриваются только такие функциональные пространства, которые содержат гладкие функции, и соответствующие им мультипликаторы ограничены; кроме того, все рассматриваемые операторы будут определены с точностью до компактных операторов.

В соответствии с п. 4.3 выбираем конечное покрытие многообразия M с соответствующим разбиением единицы $\{U_j, f_j\}_{j=1}^n$ и систему таких гладких функций $\{g_j\}_{j=1}^n$, что $\text{supp } g_j \subset V_j$, $\overline{U_j} \subset V_j$ и $g_j(x) \equiv 1$ для $x \in \text{supp } f_j$, $\text{supp } f_j \cap (1 - g_j) = \emptyset$.

Следствие 1. Оператор A на компактном многообразии M можно записать в виде

$$A = \sum_{j=1}^n f_j \cdot A \cdot g_j + T,$$

где $T : B_1 \rightarrow B_2$ — компактный оператор.

Замечание 1. Нетрудно понять, что такие операторы определены однозначно с точностью до компактных операторов, что не повлияет на индекс оператора.

С учетом последнего замечания, для произвольного оператора $A : B_1 \rightarrow B_2$ определим существенную норму (см. [8])

$$|||A||| \equiv \inf \|A + T\|,$$

где инфимум берется по всем компактным операторам $T : B_1 \rightarrow B_2$.

Теперь мы введем евклидовы локальные модели операторов. Пусть B'_1, B'_2 — банаховы пространства функций, определенных на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, и $\tilde{A} : B'_1 \rightarrow B'_2$ — линейный ограниченный оператор.

В силу определения многообразия M каждая точка $x \in M$ обладает окрестностью $U \ni x$ и соответствующим диффеоморфизмом $\omega : U \rightarrow D \subset \mathbb{R}^m$, $\omega(x) \equiv y$. Мы введем подходящий оператор S_ω , действующий из B'_k в B'_k , $k = 1, 2$. Для функции $u \in B'_k$, обращающейся в нуль вне U , положим

$$(S_\omega u)(y) = u(\omega^{-1}(y)), \quad y \in D, \quad (S_\omega u)(y) = 0, \quad y \notin D.$$

Определение 3. Локальным представителем оператора $A : B_1 \rightarrow B_2$ в точке $x \in M$ называется оператор¹ $\tilde{A} : B'_1 \rightarrow B'_2$, такой, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U_j точки $x \in U_j \subset M$, в которой выполняется неравенство

$$|||g_j A f_j - S_{\omega_j^{-1}} \tilde{g}_j \tilde{A} \tilde{f}_j S_{\omega_j}||| < \varepsilon.$$

¹Обратим внимание, что это *другой* оператор, действующий в *другом* функциональном пространстве.

4.1. *Виртуальный оператор.* Пусть снова M — компактное многообразие с краем ∂M и $A(x)$ — некоторая оператор-функция, определенная на M . Выделим на границе ∂M подмногообразия M_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, как гладкие k -мерные многообразия так, что по определению $M_{m-1} \equiv \partial M$, M_0 представляет собой совокупность изолированных точек ∂M , $M_m \equiv M$. Наконец, введем множество классов операторов $\mathfrak{T}_k$, $k = 0, 1, \dots, m$, так, что для $x \in M_k$ оператор $A(x) : H_k^{(1)} \rightarrow H_k^{(2)}$ является линейным ограниченным оператором, а $H_k^{(j)}$, $k = 0, 1, \dots, m$, $j = 1, 2$, — некоторые банаховы пространства. По сути, здесь предполагается, что M является операторным многообразием более общего типа, чем в определении 2. Такое подмногообразие M_k называется сингулярным k -подмногообразием, если для всех $x \in M_k$ имеет место включение $A(x) \in \mathfrak{T}_k$.

Теорема 1. *Если семейство $A(x)$ состоит из локальных фредгольмовых операторов и непрерывно¹ на каждой компоненте*

$$\overline{M_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} M_i}, \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

то оно порождает единственный фредгольмов оператор A' , действующий в пространствах прямых сумм

$$\sum_{k=0}^m \oplus H_1^{(k)} \rightarrow \sum_{k=0}^m \oplus H_2^{(k)}.$$

Доказательство. Доказательство проводится по схеме, описанной в работе автора [19]. Покрытие многообразия и разбиение единицы выбираются специальным образом, семейство $A(x)$ кластеризуется, каждый кластер порождает отдельный оператор. $\square$

Определение 4. Такой оператор A' называется виртуальным оператором, соответствующим семейству $A(x)$. Виртуальный оператор A' называется *эллиптическим*, если семейство $A(x)$ состоит из фредгольмовых операторов для всех $x \in M$.

4.2. *Индекс виртуального оператора.* Ниже приведена теорема об индексе виртуального оператора. Конечно, она не дает рецепта вычисления индекса, однако показывает, с какими операторами мы должны работать для получения приемлемых формул для индекса.

Теорема 2. *Оператор A' действует на гладких функциях следующим образом:*

$$Au = \sum_{k=0}^m A^{(k)} u_k + Tu,$$

где u_k представляет собой компоненту функции u , сосредоточенную в некоторой окрестности подмногообразия $M_k \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} M_j \right)$, так что

$$u = \sum_{k=0}^m u_k.$$

Замечание 2. Операторы $A^{(k)}$ сконструированы в [19], и каждый оператор $A^{(k)}$ связан с соответствующим сингулярным k -подмногообразием.

Теорема 3. *Индекс эллиптического виртуального оператора*

$$A' : \sum_{k=0}^m \oplus H_1^{(k)} \rightarrow \sum_{k=0}^m \oplus H_2^{(k)}$$

представим в виде суммы соответствующих индексов:

$$\text{Ind } A' = \sum_{k=0}^m \text{Ind } A^{(k)}. \quad (2)$$

¹Подразумевается непрерывность по существенной норме $||| \cdot |||$.

Замечание 3. Если рассматривать эллиптический псевдодифференциальный оператор в пространстве $H^s(\mathbb{R}_+^m)$ (см. [9]) с гладким символом $A(x, \xi)$, то в действительности мы имеем два компонента виртуального оператора: $A^{(m)}$, соответствующий замыканию внутренних точек $\mathbb{R}_+^m$, и $A^{(m-1)}$, соответствующий граничным точкам $\mathbb{R}^{m-1}$. Операторные символы имеют различную природу для внутренних и граничных точек. В первом случае символ — это интегральный оператор по всему пространству $\mathbb{R}^m$, а во втором случае — это интегральный оператор по полупространству. Индекс оператора $A^{(m)}$ будет нулевым согласно классической теореме Атьи—Зингера, а вот индекс $A^{(m-1)}$ зависит от так называемого индекса факторизации эллиптического символа $A(x, \xi)$ в граничной точке $x \in \mathbb{R}^{m-1}$.

4.3. Конкретизация: псевдодифференциальные операторы на компактном многообразии с краем, имеющим особенности. Здесь мы продемонстрируем, как работает предложенная абстрактная схема для конкретного псевдодифференциального оператора A на m -мерном компактном многообразии M с краем, содержащим особенности. Такой оператор обычно определяют с помощью символа $A(x, \xi)$, $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2m}$ (здесь мы используем локальные координаты; обычно символ задается на (ко)касательном расслоении). Предполагается, что на границе ∂M имеются гладкие компактные подмногообразия M_k размерности $0 \leq k \leq m-1$, которые представляют собой особенности границы. Эти особенности границы описываются специальными локальными представителями оператора A в точке $x_0 \in M$ на карте $U \ni x_0$ следующим образом:

$$(A_{x_0}u)(x) = \int_{D_{x_0}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\xi \cdot (x-y)} A(\varphi(x_0), \xi) u(y) d\xi dy, \quad x \in D_{x_0},$$

где $\varphi : U \rightarrow D_{x_0}$ — диффеоморфизм, и каноническая область D_{x_0} имеет разную форму в зависимости от расположения точки x_0 на многообразии M . Рассматриваются следующие канонические области: $D_{x_0} : \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}$, $W^k = \mathbb{R}^k \times C^{m-k}$, где C^{m-k} — выпуклый конус в $\mathbb{R}^{m-k}$. Иначе говоря, граница ∂M может содержать конические точки и ребра различных размерностей.

Псевдодифференциальный оператор A изучается в пространствах Соболева—Слободецкого $H^s(M)$, и в качестве локального варианта этих пространств выбираются пространства $H^s(D_{x_0})$.

Определение 5. Символом псевдодифференциального оператора A называется оператор-функция $A(x) : M \rightarrow \{A_x\}_{x \in M}$, которая определяется локальными представителями оператора A .

При дополнительных условиях гладкости функции $A(x, \xi)$ нетрудно прийти к следующему результату.

Теорема 4. Оператор A фредгольмов тогда и только тогда, когда его символ состоит из фредгольмовых операторов.

Это так называемый локальный принцип, простейшие применения можно найти в [1, 8]. С учетом структуры локальных представителей дадим следующее определение.

Определение 6. Псевдодифференциальный оператор A называется эллиптическим, если его символ состоит из обратимых операторов.

Замечание 4. Если эллиптичность нарушается на подмногообразии M_k , то для получения фредгольмовости следует модифицировать соответствующие локальные представители оператора A , добавив к ним граничные или кограничные операторы (см. [1]).

4.4. Индекс фредгольмова оператора. Используя как раньше разбиение единицы на многообразии M , эллиптический символ $A(x)$ и теорию огибающих И. Б. Симоненко (см. [8, 19]), мы можем построить n виртуальных операторов A_j по числу сингулярных подмногообразий, включая всю границу ∂M и само многообразие M . Результирующий виртуальный оператор A' действует в прямых суммах пространств

$$A' : H^s(\mathbb{R}^m) \oplus H^s(\mathbb{R}_+^m) + \sum_{k=0}^{m-2} \oplus H^s(C^{m-k}) \rightarrow H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m) \oplus H^{s-\alpha}(\mathbb{R}_+^m) + \sum_{k=0}^{m-2} \oplus H^{s-\alpha}(C^{m-k})$$

при условии, что символ исходного оператора A имеет порядок α ,

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(x, \xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha$$

с положительными постоянными c_1, c_2 для всех (x, ξ) .

Поскольку символы виртуального оператора и исходного одни и те же и гомотопии в классе символов эквивалентны гомотопиям в классе операторов, имеет место следующий результат.

Теорема 5. *Индекс фредгольмова оператора A определяется формулой*

$$\text{Ind } A = \sum_{j=1}^n \text{Ind } A_j.$$

Закключение. Конечно, предлагаемые конструкции выглядят довольно абстрактно. Однако следует отметить, что все они появились в результате размышлений автора о теории псевдодифференциальных уравнений и краевых задач на многообразиях с негладким краем. В целом такая теория укладывается в описанную выше схему, и в более ранних работах автора уже присутствовали элементы этой теории. К сожалению, в ней еще много неопределенностей, но по крайней мере она объясняет, как должна выглядеть общая краевая задача для эллиптического псевдодифференциального уравнения и в каком направлении следует двигаться в поисках ее разрешимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В. Б. Регуляризация многомерных сингулярных интегральных уравнений в негладких областях // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1998. — 59. — С. 72–105.
2. Васильев В. Б. Псевдодифференциальные операторы и уравнения переменного порядка // Диффер. уравн. — 2018. — 54, № 9. — С. 1184–1195.
3. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973.
4. Пламеневский Б. А. Алгебры псевдодифференциальных операторов. — М.: Наука, 1986.
5. Пламеневский Б. А., Розенблум Г. В. Псевдодифференциальные операторы с разрывными символами: К-теория и формулы индекса // Функци. анализ. прилож. — 1992. — 26, № 4. — С. 45–56.
6. Пламеневский Б. А., Сенчикин В. Н. Разрешимые алгебры операторов // Алгебра и анализ. — 1994. — 6, № 5. — С. 1–87.
7. Ремпель Ш., Шульце Б. В. Теория индекса эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1983.
8. Симоненко И. Б. Локальный метод в теории операторов инвариантных относительно сдвига и их огибающих. — Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2007.
9. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
10. Dynin A. Inversion problem for singular integral operators: C^* -approach // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1978. — 75. — P. 4668–4670.
11. Dynin A. Multivariable Wiener–Hopf operators. I. Representations. // Integral Equat. Oper. Theory. — 1986. — 9. — P. 537–556.
12. Dynin A. Multivariable Wiener–Hopf operators. II. Spectral topology and solvability // Integr. Equat. Oper. Theory. — 1987. — 10. — P. 554–576.
13. Egorov Yu. V., Schulze B. W. Pseudo-differential operators, singularities, applications. — Basel: Birkhäuser-Verlag, 1997.
14. Mikhlin S. G., Prößdorf S. Singular integral operators. — Berlin: Akademie-Verlag, 1986.
15. Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Schulze B. W., Sternin B. Yu. Elliptic theory on singular manifolds. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006.
16. Schulze B. W. Boundary value problems and singular pseudo-differential operators. — Chichester: Wiley, 1998.
17. Schulze B. W., Sternin B., Shatalov V. Differential equations on singular manifolds; semiclassical theory and operator algebras. — Berlin: Wiley, 1998.

18. *Vasil'ev V. B.* Wave factorization of elliptic symbols: theory and applications. Introduction to the theory of boundary value problems in non-smooth domains. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publ., 2000.
19. *Vasil'ev V. B.* Elliptic operators and their symbols// Demonstr. Math. — 2019. — 52. — P. 361–369.

Васильев Владимир Борисович

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: vdv57@inbox.ru