Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Воблый, Асимптотическое перечисление помеченных последовательно-параллельных тетрациклических графов, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 187, 31–35

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-187-31-35>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 02:54:35

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 31–35
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-31-35

УДК 519.175.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕТРАЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ

© 2020 г. В. А. ВОБЛЫЙ

Аннотация. Последовательно-параллельный граф — это граф, не содержащий полный граф с четырьмя вершинами в качестве минора. Найдена асимптотика для числа помеченных связных последовательно-параллельных тетрациклических графов с большим числом вершин. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятность того, что помеченный связный тетрациклический граф является последовательно-параллельным графом, асимптотически равна $141/221$.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, последовательно-параллельный граф, асимптотика, вероятность.

ASYMPTOTICAL ENUMERATION OF LABELED SERIES-PARALLEL TETRACYCLIC GRAPHS

© 2020 V. A. VOBLYI

ABSTRACT. A series-parallel graph is a graph that does not contain a complete graph with four vertices as a minor. We find an asymptotics for the number of labeled connected series-parallel tetracyclic graphs with a large number of vertices. We prove that under a uniform probability distribution, the probability of the fact that a labeled connected tetracyclic graph is a series-parallel graph is asymptotically equal to $141/221$.

Keywords and phrases: enumeration, labeled graph, series-parallel graph, asymptotics, probability.

AMS Subject Classification: 05C30

1. Введение.

Определение 1. Граф называется *последовательно-параллельным*, если он не содержит полный граф с четырьмя вершинами в качестве минора (см. [9]).

Определение 2. *Цикломатическим числом* связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин. Граф с цикломатическим числом, равным k , называется *k -циклическим графом*.

Определение 3. Класс графов называется *блочно-устойчивым*, если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу (см. [10]).

Последовательно-параллельные графы используются при построении надежных коммуникационных сетей (см. [11]).

В [9] найдена асимптотика для чисел помеченных связных и 2-связных последовательно-параллельных графов с большим количеством вершин. В [3] перечислены помеченные последовательно-параллельные 2-связные графы по числу вершин. Число помеченных последовательно-параллельных трициклических и тетрациклических 2-связных графов с заданным числом вершин найдено в [6] и [5], соответственно. В [4] перечислены по числу вершин помеченные связные последовательно-параллельные трициклические графы.

В статье найдена асимптотика для числа помеченных связных последовательно-параллельных тетрациклических графов с большим числом вершин. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятность того, что помеченный связный тетрациклический граф является последовательно-параллельным графом, асимптотически равна $141/221$. Также доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятность того, что помеченный связный последовательно-параллельный тетрациклический граф является кактусом, асимптотически равна $7/47$.

2. Перечисление графов. Рассматриваются неориентированные простые связные графы.

Теорема 1. Для числа $SP(n, 4)$ помеченных связных последовательно-параллельных тетрациклических графов с n вершинами при $n \geq 6$ верна формула

$$SP(n, 4) = \frac{(n-1)!}{24} [z^{n-1}] e^{nz} \left(\frac{n^3 z^8}{16(1-z)^4} + \frac{n^2 z^4 (12z^3 - 13z^4 + 4z^5)}{4(1-z)^6} + \right. \\ \left. + \frac{n(12z^3 - 13z^4 + 4z^5)^2}{12(1-z)^8} + \frac{nz^2(70z^4 - 127z^5 + 98z^6 - 38z^7 + 6z^8)}{2(1-z)^8} + \right. \\ \left. + \frac{48z^{11} - 450z^{10} + 1860z^9 - 4415z^8 + 6520z^7 - 5813z^6 + 2430z^5}{10(1-z)^{10}} \right). \quad (1)$$

Доказательство. Обозначим через $B(n, k)$ число помеченных k -циклических блоков с n вершинами, через $B_k(z)$ — экспоненциальную производящую функцию для $B(n, k)$, $S(n, k)$ — число помеченных связных k -циклических графов с n вершинами. В [1] получено выражение

$$S(n, k) = \frac{(n-1)!}{nk!} [z^{-1}] e^{nz} Y_k(n1!B'_1(z), n2!B'_2(z), \dots, nk!B'_k(z)) z^{-n}, \quad (2)$$

где $[z^{-1}]$ — оператор формального вычета (см. [7]), а $Y_k(x_1, \dots, x_k)$ — многочлены разбиений (многочлены Белла). Для этих многочленов известно выражение (см. [8, с. 173])

$$Y_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\pi(k)} \frac{k!}{m_1! \dots m_k!} \left(\frac{x_1}{1!} \right)^{m_1} \dots \left(\frac{x_k}{k!} \right)^{m_k},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(k)$ числа k , т.е. по всем неотрицательным решениям $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ уравнения $m_1 + 2m_2 + \dots + km_k = k$, $m_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$.

Формула (2) верна не только для всего класса связных графов, но и для блочно-устойчивого его подкласса (см. [3]). Известно, что класс последовательно-параллельных графов является блочно-устойчивым классом графов (см. [10]). Поэтому заменим в (2) $S(n, k)$ на $SP(n, 4)$ и будем считать, что функции $B_k(z)$ относятся к классу помеченных последовательно-параллельных графов.

Так как

$$Y_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4 + 6x_1^2 x_2 + 3x_2^2 + 4x_1 x_3 + x_4, \quad x_i = ni!B'_i(z)$$

(см. [8, с. 246]), то имеем

$$SP(n, 4) = \frac{(n-1)!}{24n} [z^{-1}] e^{nz} \left(n^4 (B'_1(z))^4 + 12n^3 (B'_1(z))^2 B'_2(z) + \right. \\ \left. + 12n^2 (B'_2(z))^2 + 24n B'_1(z) B'_3(z) + 24n B'_4(z) \right) z^{-n}. \quad (3)$$

Унициклический блок — это простой цикл (последовательно-параллельный граф), поэтому $B(n, 1) = (n - 1)/2$. Все бициклические блоки являются последовательно-параллельными графами, и в [12], [6], [5] соответственно найдены формулы

$$\begin{aligned} B(n, 2) &= \frac{n!(n-3)(n+2)}{24}, \\ B(n, 3) &= \frac{n!(n-3)(n-4)}{5760} (3n^3 + 36n^2 + 71n + 50), \\ B(n, 4) &= \frac{n!}{80640} (n^5 + 30n^4 + 257n^3 + 768n^2 + 960n + 504) \binom{n-3}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} B_1(z) &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2} (n-1)! \frac{z^n}{n!}, \quad B'_1(z) = \frac{z^2}{2(1-z)}, \quad B_2(z) = \frac{z^4(3-2z)}{12(1-z)^3}, \quad B'_2(z) = \frac{12z^3 - 13z^4 + 4z^5}{12(1-z)^4}, \\ B_3(z) &= \frac{z^5(28 - 47z + 28z^2 - 6z^3)}{48(1-z)^6}, \quad B'_3(z) = \frac{70z^4 - 127z^5 + 98z^6 - 38z^7 + 6z^8}{24(1-z)^7}, \\ B_4(z) &= \frac{405z^6 - 1004z^7 + 1066z^8 - 609z^9 + 186z^{10} - 24z^{11}}{240(1-z)^9}, \\ B'_4(z) &= \frac{48z^{11} - 450z^{10} + 1860z^9 - 4415z^8 + 6520z^7 - 5813z^6 + 2430z^5}{240(1-z)^{10}}. \end{aligned}$$

Суммирование рядов для $B_2(z)$, $B_3(z)$, $B_4(z)$, а также дифференцирование было выполнено с помощью пакета программ Maple.

Подставляя в (3) выражения для $B'_1(z)$, $B'_2(z)$, $B'_3(z)$, $B'_4(z)$, получим формулу (1). $\square$

В следующей таблице представлены числа $SP(n, 4)$, вычисленные с помощью теоремы 1 и пакета программ Maple.

n	6	7	8	9	10	11
$SP(n, 4)$	1215	116361	7614936	435101373	23642892000	1270611137565

3. Асимптотика и вероятность.

Лемма 1. Введем обозначения

$$p(z, q) = \sum_{i=0}^q c_i z^i, \quad A_n(m, q) = [z^{-1}] \frac{p(z, q) e^{nz} z^{-n}}{(1-z)^m};$$

тогда при фиксированных m, q и $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика

$$A_n(m, q) \sim \frac{\sqrt{\pi} p(1, q) n^{n+m/2}}{n! 2^{m/2} \Gamma((m+1)/2)}. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $U(a, b, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми. В [4] найдено разложение

$$\frac{e^{nz}}{(1-z)^m} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^{p+m}}{p!} U(m, m+p+1, n) z^p,$$

а в [2] при фиксированных числах a и m и $n \rightarrow \infty$ получена асимптотика

$$U(a, n-m, n) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^{a/2} \Gamma(\frac{a+1}{2})}.$$

Учитывая, что $n!/(n-k)! \sim n^k$ при фиксированном k и $n \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} A_n(m, q) &= [z^{-1}] \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=0}^q \frac{n^{p+m}}{p!} c_i z^{p+i-n} U(m, m+p+1, n) = \sum_{i=0}^q \frac{c_i n^{n+m-i-1}}{(n-i-1)!} U(m, n+m-i, n) \sim \\ &\sim \sum_{i=0}^q \frac{n!}{(n-i-1)!} \frac{c_i n^{n+m-i-1}}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^{m/2} \Gamma(\frac{m+1}{2})} \sim \frac{n^{n+m}}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^{m/2} \Gamma(\frac{m+1}{2})} \sum_{i=0}^q c_i, \end{aligned}$$

что равносильно (4). $\square$

Теорема 2. Для числа $SP(n, 4)$ помеченных связных последовательно-параллельных тетрациклических графов с n вершинами при $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика

$$SP(n, 4) \sim \frac{47}{8064} n^{n+4}.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\begin{aligned} p_1(z, 8) &= z^8, \quad p_1(1, 8) = 1; \quad p_2(z, 9) = 12z^7 - 13z^8 + 4z^9, \quad p_2(1, 9) = 3; \\ p_3(z, 10) &= (12z^3 - 13z^4 + 4z^5)^2, \quad p_3(1, 10) = 9; \\ p_4(z, 10) &= 70z^6 - 127z^7 + 98z^8 - 38z^9 + 6z^{10}, \quad p_4(1, 10) = 9; \\ p_5(z, 11) &= 48z^{11} - 450z^{10} + 1860z^9 - 4415z^8 + 6520z^7 - 5813z^6 + 2430z^5, \quad p_5(1, 11) = 180. \end{aligned}$$

Из выражения (1) с помощью леммы получим

$$\begin{aligned} SP(n, 4) &= \frac{(n-1)!}{24} \left(\frac{n^3}{16} A_n(4, 8) + \frac{n^2}{4} A_n(6, 9) + \frac{n}{12} A_n(8, 10) + \frac{n}{2} A_n(8, 10) + \frac{1}{10} A_n(10, 11) \right) \sim \\ &\sim \frac{(n-1)!}{24} \left(\frac{\sqrt{\pi} p_1(1, 8) n^{n+5}}{16n! 2^2 \Gamma(5/2)} + \frac{\sqrt{\pi} p_2(1, 9) n^{n+5}}{4n! 2^3 \Gamma(7/2)} + \frac{\sqrt{\pi} p_3(1, 10) n^{n+5}}{12n! 2^4 \Gamma(9/2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\pi} p_4(1, 10) n^{n+5}}{2n! 2^4 \Gamma(9/2)} + \frac{\sqrt{\pi} p_5(1, 10) n^{n+5}}{10n! 2^5 \Gamma(11/2)} \right) \sim \\ &\sim \frac{n^{n+4}}{24} \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{20} + \frac{1}{140} + \frac{3}{70} + \frac{2}{105} \right) = \frac{47}{8064} n^{n+4}. \quad \square \end{aligned}$$

Зададим на множестве помеченных связных тетрациклических графов с n вершинами равномерное распределение вероятностей.

Следствие 1. При $n \rightarrow \infty$ вероятность P_n того, что помеченный тетрациклический граф с n вершинами является последовательно-параллельным графом, асимптотически равна $141/221$.

Доказательство. Доказательство. Пусть $f(n, n+3)$ — число помеченных связных графов с n и $n+3$ ребрами (тетрациклических графов). В [13] Райт нашел следующую асимптотику при $n \rightarrow \infty$:

$$f(n, n+k) \sim f_k n^{n+(3k-1)/2}, \quad f_k = \frac{\sqrt{\pi} 3^k (k-1)! d_k}{2^{(3k-1)/2} \Gamma((3k/2))}, \quad k \geq 1;$$

$$d_1 = d_2 = \frac{5}{16}, \quad d_{k+1} = d_k + \sum_{s=1}^{k-1} \frac{d_s d_{k-s}}{(k+1) \binom{k}{s}}, \quad k \geq 2.$$

Поэтому имеем

$$d_3 = d_2 + \frac{1}{6} d_1^2 = \frac{1105}{7776}, \quad f_3 = \frac{54\sqrt{\pi} d_3}{128\Gamma(9/2)} = \frac{9}{140} d_3, \quad f(n, n+3) \sim \frac{221}{24192} n^{n+4}$$

и, следовательно,

$$P_n = \frac{SP(n, 4)}{f(n, n+3)} \sim \frac{141}{221} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad \square$$

Следствие 2. При $n \rightarrow \infty$ вероятность $\bar{P}_n$ того, что помеченный последовательно-параллельный тетрациклический граф с n вершинами является кактусом, асимптотически равна $7/47$.

Доказательство. Пусть $Ca(n, k)$ — число помеченных k -циклических кактусов с n вершинами. В [1] найдена следующая асимптотика при $n \rightarrow \infty$:

$$Ca(n, k) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2} k! \Gamma((k+1)/2)} n^{n+3k/2-2}.$$

Поэтому при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\bar{P}_n = \frac{Ca(n, 4)}{SP(n, 4)} \sim \frac{\sqrt{\pi} n^{n+4} 8064}{2^6 \cdot 24 \cdot \Gamma(5/2) \cdot 47 \cdot n^{n+4}} = \frac{7}{47}.$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воблый В. А. О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и ребер // Дискр. анал. иссл. опер. — 2016. — 23, № 2. — С. 5–20.
2. Воблый В. А. Число помеченных внешнепланарных графов k -циклических графов // Мат. заметки. — 2018. — 103, № 5. — С. 657–666.
3. Воблый В. А. Второе соотношение Риддела и следствия из него // Дискр. анал. иссл. опер. — 2019. — 26, № 1. — С. 20–32.
4. Воблый В. А. Перечисление помеченных последовательно-параллельных трициклических графов // Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — 177. — С. 132–136.
5. Воблый В. А. Число помеченных последовательно-параллельных тетрациклических блоков // Прикл. дискр. мат. — 2020. — № 47. — С. 57–61.
6. Воблый В. А., Мелешко А. М. О числе помеченных последовательно-параллельных трициклических блоков // Мат. XV Междунар. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения» (Тула, 28–31 мая 2018 г.). — Тула: ТПГУ. — С. 168–170.
7. Гильден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.
8. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. — М.: Наука, 1982.
9. Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M. Enumeration and limit laws of series-parallel graphs // Eur. J. Combin. — 2007. — 28, № 8. — P. 2091–2105.
10. McDiarmid C., Scott A. A random graphs from a block stable class // Eur. J. Combin. — 2016. — 58. — P. 96–106.
11. Radhavan S. Low-connectivity network design on series-parallel graphs // Networks. — 2004. — 43, № 3. — P. 163–176.
12. Wright E. M. The number of connected sparsely edged graphs, II // J. Graph Theory. — 1978. — 2, № 4. — P. 299–305.
13. Wright E. M. The number of connected sparsely edged graphs, III // J. Graph Theory. — 1980. — 4, № 4. — P. 393–407.

Воблый Виталий Антониевич

Всероссийский институт научной и технической информации, Москва

E-mail: vitvobl@yandex.ru