Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Глушак, Семейство операторных функций Бесселя, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 187, 36–43

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-187-36-43>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 14:26:30

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 36–43
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-36-43

УДК 517.983.23

СЕМЕЙСТВО ОПЕРАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

© 2020 г. А. В. ГЛУШАК

Аннотация. Введены в рассмотрение семейство операторных функций Бесселя и генератор этого семейства. Исследованы их свойства, установлен критерий равномерной корректности задачи Коши для уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу и указаны связи этого семейства с рядом других разрешающих операторов.

Ключевые слова: операторная функция Бесселя, генератор, уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу, задача Коши, критерий равномерной корректности.

FAMILY OF BESSEL OPERATOR FUNCTIONS

© 2020 A. V. GLUSHAK

ABSTRACT. A family of Bessel operator functions and a generator of this family are introduced and considered. Their properties are studied, a criterion of the uniform well-posedness of the Cauchy problem for the Euler–Poisson–Darboux equation is obtained, and the connections of this family with a series of other solving operators are found.

Keywords and phrases: Bessel operator function, generator, Euler–Poisson–Darboux equation, Cauchy problem, uniform well-posedness criterion.

AMS Subject Classification: 34G10

1. Введение. Исследование дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами, действующими в банаховом пространстве E , стимулирует развитие теории разрешающих операторов соответствующих начальных задач. В результате исследований эволюционных уравнений первого порядка

$$u'(t) = Au(t)$$

возникли полугруппы линейных операторов $T(t)$, а при изучении уравнения второго порядка (абстрактного волнового уравнения)

$$u''(t) = Au(t)$$

— операторные косинус-функции $C(t)$. Ослабление требований на разрешающие операторы задачи Коши для абстрактных дифференциальных уравнений первого и второго порядков привело к понятию проинтегрированной полугруппы и проинтегрированной операторной косинус-функции. Терминологию и литературные источники см. в [13, 14] и обзорных работах [1, 17].

В дальнейшем в работах [3, 6, 8, 9, 12] были введены в рассмотрение операторные функции Бесселя, Струве и Лежандра как разрешающие операторы при исследовании соответственно уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу (ЭПД), Бесселя—Струве и Лежандра.

В настоящей работе излагается другой подход к построению семейства операторных функций Бесселя. Так же, как и в теории полугрупп и операторных косинус-функций, семейство операторных функций Бесселя исследуется вначале независимо от дифференциального уравнения, с

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00732).

которым в итоге оно будет связано. Важную роль в построении семейства играет зависящий от параметра $k > 0$ оператор обобщенного сдвига T_s^t , определяемый равенством (см. [16])

$$T_s^t Y(s) = \frac{\Gamma(k/2 + 1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(k/2)} \int_0^\pi Y\left(\sqrt{s^2 + t^2 - 2st \cos \varphi}\right) \sin^{k-1} \varphi d\varphi,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера $s, t \geq 0$. Оператор обобщенного сдвига зависит от параметра $k > 0$, но, следуя [16], этот факт в его записи отмечать не будем.

Укажем также, что в настоящей работе мы обходимся понятием интеграла от непрерывной функции, но в случае необходимости можно использовать интеграл Бохнера от функции со значением в банаховом пространстве.

2. Семейство операторных функций Бесселя. Пусть $k > 0$ и $Y_k(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow B(E)$ — операторная функция, действующая в пространство линейных ограниченных операторов $B(E)$.

Определение 1. Зависящее от параметра $k > 0$ сильно непрерывное семейство линейных ограниченных операторов $Y_k(t) : [0, \infty) \rightarrow B(E)$ называется *операторной функцией Бесселя* (ОФБ) если выполнены следующие условия:

- (a) $Y_k(0) = I$;
- (b) $Y_k(t)Y_k(s) = T_s^t Y_k(s)$, $s, t \geq 0$;
- (c) существуют такие $M \geq 1$, $\omega \geq 0$, что $\|Y_k(t)\| \leq M e^{\omega t}$, $t \geq 0$.

С семейством ОФБ будет тесно связан дифференциальный оператор Бесселя

$$B_k = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{k}{t} \frac{d}{dt},$$

для которого, в случае необходимости, будем указывать переменную, по которой он действует: $B_k = B_{k,t}$. В дальнейшем также используется обозначение $Y'_k(t)x = (Y_k(t)x)'$.

Определение 2. Генератором ОФБ $Y_k(t)$ называется оператор A с областью определения $D(A)$, состоящей из тех $x \in E$, для которых функция $Y_k(t)x$ дважды дифференцируема в точке $t = 0$, и определяемый равенством

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0+} B_k Y_k(t)x.$$

Теорема 1. Если оператор A является генератором ОФБ $Y_k(t)$, то область определения $D(A)$ плотна в E . Более того, в E плотно множество элементов, на которых определены все степени оператора A .

Доказательство. Пусть V — множество числовых функций $v(t)$, гладких и финитных на $(0, \infty)$. Рассмотрим множество $E(V) \subset E$ элементов вида

$$y = \int_0^\infty v(s) Y_k(s) x ds, \quad x \in E,$$

и покажем, что $y \in D(A)$. Учитывая условие б) определения 1 и свойства оператора преобразования T_s^t , для рассматриваемых y , после интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} B_{k,t} Y_k(t) y &= \int_0^\infty v(s) B_{k,t} T_s^t Y_k(s) x ds = \int_0^\infty v(s) B_{k,s} T_s^t Y_k(s) x ds = \\ &= \int_0^\infty \left(v''(s) - k \left(\frac{v(s)}{s} \right)' \right) T_s^t Y_k(s) x ds, \end{aligned}$$

откуда, переходя к пределу при $t \rightarrow 0+$, получаем, что $y \in D(A)$ и

$$Ay = \int_0^\infty \left(v''(s) - k \left(\frac{v(s)}{s} \right)' \right) Y_k(s) x ds.$$

Покажем теперь, что $E(V)$ плотно в E . Если бы это было не так, то существовал бы линейный ограниченный функционал $f \neq 0$, $f \in E^*$ такой, что $f(E(V)) = 0$. Тогда

$$\int_0^\infty v(s) f(Y_k(s)x) ds = 0, \quad x \in E,$$

и поэтому, в силу произвольности $v(s) \in V$, $f(Y_k(s)x) \equiv 0$ при $s > 0$. Отсюда в пределе при $s \rightarrow 0$ получим $f(x) = 0$ для любого $x \in E$, и поэтому $f = 0$, что приводит к противоречию. Следовательно, $E(V)$ плотно в E . Поскольку $E(V) \subset D(A)$, то и $D(A)$ плотно в E .

Аналогично устанавливается, что в E плотно множество элементов, на которых определены все степени оператора A . Теорема доказана. $\square$

Теорема 2. Пусть $Y_k(t)$ — операторная функция Бесселя и A — ее генератор. Тогда для любых $t, s \geq 0$ и $x \in D(A)$ справедливы равенства

$$Y_k(t)Y_k(s) = Y_k(s)Y_k(t), \quad (1)$$

$$AY_k(t)x = Y_k(t)Ax. \quad (2)$$

Доказательство. Равенство (1) следует из определения семейства ОФБ и свойств оператора обобщенного сдвига T_s^t . Покажем далее, что

$$B_{k,s}Y_k(s)Y_k(t)x = Y_k(t)B_{k,s}Y_k(s)x, \quad x \in D(A). \quad (3)$$

Действительно, в силу теоремы 1 и характеристического свойства оператора обобщенного сдвига (см. [13])

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{T_s^h Y_k(s)x - Y_k(s)x}{h^2} = \frac{1}{2(k+1)} B_{k,s}Y_k(s)x,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} B_{k,s}Y_k(s)Y_k(t)x &= 2(k+1) \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{T_s^h Y_k(s)Y_k(t)x - Y_k(s)Y_k(t)x}{h^2} = \\ &= 2(k+1) \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{Y_k(t)(Y_k(h)Y_k(s)x - Y_k(s)x)}{h^2} = 2(k+1)Y_k(t) \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{T_s^h Y_k(s)x - Y_k(s)x}{h^2} = \\ &= Y_k(t)B_{k,s}Y_k(s)x, \end{aligned}$$

и тем самым равенство (3) установлено.

Переходя в (3) к пределу при $s \rightarrow 0+$, получим равенство (2). Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. Пусть $Y_k(t)$ — операторная функция Бесселя и A — ее генератор. Если $x \in D(A)$ и $t > 0$, то $Y_k(t)x \in D(A)$ и

$$AY_k(t)x = B_{k,t}Y_k(t)x. \quad (4)$$

Доказательство. Поскольку при $s > 0$ справедливы равенства

$$B_{k,s}Y_k(s)Y_k(t)x = B_{k,s}T_t^s Y_k(t)x = B_{k,t}T_t^s Y_k(t)x = B_{k,t}Y_k(s)Y_k(t)x = Y_k(s)B_{k,t}Y_k(t)x,$$

то, переходя к пределу при $s \rightarrow 0+$, получим требуемые утверждения. Теорема доказана. $\square$

3. Задача Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. Обратимся теперь к задаче Коши, с которой связана ОФБ $Y_k(t)$.

Определение 3. Решением линейного дифференциального уравнения второго порядка с операторным коэффициентом A называется функция $u(t)$, которая при $t \geq 0$ дважды непрерывно дифференцируема, при $t > 0$ принимает значения, принадлежащие $D(A)$, т.е., $u(t) \in C^2(\bar{R}_+, E) \cap C(R_+, D(A))$, и удовлетворяет этому уравнению.

Теорема 4. Пусть $Y_k(t)$ — операторная функция Бесселя, A — ее генератор и $u_0 \in D(A)$. Тогда функция $Y_k(t)u_0$ является решением уравнения ЭПД

$$B_k u(t) \equiv u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad (5)$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \quad (6)$$

Доказательство. Если $u_0 \in D(A)$, то в силу равенства (4), установленного в теореме 3, функция $Y_k(t)u_0$ является решением уравнения (5) и, очевидно, удовлетворяет первому начальному условию в (6). Чтобы проверить, что она удовлетворяет и второму условию в (6), следует уравнение (5) записать в виде

$$(t^k u'(t))' = t^k Au(t). \quad (7)$$

После интегрирования (7) для производной функции $Y_k(t)u_0$ получим представление

$$Y_k'(t)u_0 = t^{-k} \int_0^t s^k Y_k(s) Au_0 ds,$$

из которого и следует требуемое утверждение. $\square$

Теорема 5. Если $Y_k(t)$ — операторная функция Бесселя, то ее генератор A замкнут.

Доказательство. Пусть $x_n \in D(A)$ и $x_n \rightarrow x_0$, $Ax_n \rightarrow y_0$. Тогда, в силу теорем 2 и 4 справедливы равенства

$$\lim_{t \rightarrow 0+} B_{k,t} Y_k(t) x_0 = \lim_{t \rightarrow 0+} \lim_{n \rightarrow \infty} B_{k,t} Y_k(t) x_n = \lim_{t \rightarrow 0+} \lim_{n \rightarrow \infty} A Y_k(t) x_n = \lim_{t \rightarrow 0+} Y_k(t) y_0 = y_0.$$

Поэтому $x_0 \in D(A)$ и $Ax_0 = y_0$. Теорема доказана. $\square$

Определение 4. Задача Коши (5), (6) называется равномерно корректной, если для любого $u_0 \in D(A)$ существуют заданная на E коммутирующая с A операторная функция $\tilde{Y}_k(t)$ (разрешающий оператор) и числа $M \geq 1$, $\omega \geq 0$, такие, что для любого $u_0 \in D(A)$ функция $u(t) = \tilde{Y}_k(t)u_0$ является ее единственным решением и при этом справедливы оценки

$$\|\tilde{Y}_k(t)\| \leq M \exp(\omega t), \quad (8)$$

$$\|\tilde{Y}_k'(t)u_0\| \leq M t \exp(\omega t) \|Au_0\|. \quad (9)$$

Множество операторов A , для которых задача (5), (6) равномерно корректна, обозначим через G_k , при этом G_0 — множество генераторов операторной косинус-функции и $C(t) = Y_0(t)$.

Укажем, что случай абстрактного волнового уравнения ($k = 0$ в (5)) подробно рассмотрен в [20, 21, 23]. В этих работах установлено, что задача (5), (6) при $k = 0$ равномерно корректна только тогда, когда оператор A является генератором операторной косинус-функции $C(t)$. В этих же работах приводятся необходимые и достаточные условия того, что оператор A является генератором операторной косинус-функции, которые формулируются в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ оператора A и ее производных.

Пусть задача Коши (5), (6) равномерно корректна, т.е., $A \in G_k$. Введем в рассмотрение разрешающий оператор $\tilde{Y}_k(t)$, ставящий в соответствие элементу $u_0 \in D(A)$ значение решения $u(t)$ этой задачи в момент $t > 0$. В силу определения 4, этот оператор линейный непрерывный и может

быть по непрерывности расширен до линейного ограниченного оператора, определенного на всем банаховом пространстве E . В дальнейшем будет установлено, что разрешающий оператор $\tilde{Y}_k(t)$ представляет собой ОФБ, т.е., удовлетворяет условиям (а)–(с) определения 1, а оператор A — ее генератор.

Подробное доказательство формулируемых далее теорем 6–12 приведено в [12].

Теорема 6. Если задача (5), (6) равномерно корректна и $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, то λ^2 принадлежит регулярному множеству $\rho(A)$ и для любого $x \in E$ справедливо представление

$$\lambda^{(1-k)/2} R(\lambda^2)x = \frac{2^{(1-k)/2}}{\Gamma(k/2 + 1/2)} \int_0^\infty K_\nu(\lambda t) t^{(k+1)/2} \tilde{Y}_k(t)x dt, \quad (10)$$

где $K_\nu(\cdot)$ — функция Макдональда или модифицированная функция Бесселя третьего рода порядка $\nu = (k-1)/2$.

Таким образом, спектр $\sigma(A)$ оператора $A \in G_k$ всегда лежит левее некоторой параболы.

Теорема 7. Пусть задача (5), (6) равномерно корректна и пусть $\tilde{Y}_k(t)$ — разрешающий оператор для этой задачи. Тогда оператор A является генератором C_0 -полугруппы $T(t)$, и для этой полугруппы справедливо представление

$$T(t)x = \frac{1}{2^k \Gamma(k/2 + 1/2)} \int_0^\infty s^k \exp(-s^2/(4t)) \tilde{Y}_k(s)x ds, \quad x \in E. \quad (11)$$

Из представления (11) следует, что полугруппу $T(t)$ можно продолжить до операторной функции, аналитической в некотором секторе, поэтому при нахождении критерия равномерной корректности задачи (5), (6) можно ограничиться классом операторов, которые являются генераторами аналитических C_0 -полугрупп $T(t)$. Обозначим этот класс операторов через G . Критерии того, что $A \in G$ могут быть найдены в обзорной работе [1].

В работе [22] показано, что если $A \in G$, то при $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ для $\alpha > 0$ существует дробная степень резольвенты $R(\lambda)$, которая имеет вид

$$R^\alpha(\lambda)x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-\lambda t) T(t)x dt, \quad x \in E.$$

Помимо установленного в теореме 6, сформулируем далее еще одно необходимое условие равномерной корректности задачи (5), (6).

Теорема 8. Если задача (5), (6) равномерно корректна и $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, то λ^2 принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A , для дробной степени резольвенты справедливо представление

$$R^{1+k/2}(\lambda^2) = \frac{1}{\Gamma(k+1)\lambda} \int_0^\infty t^k \exp(-\lambda t) \tilde{Y}_k(t) dt, \quad (12)$$

и при этом выполняются оценки

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\lambda R^{1+k/2}(\lambda^2) \right) \right\| \leq \frac{M \Gamma(k+n+1)}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{k+n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

В действительности, оценки (13) будут являться и достаточным условием равномерной корректности задачи (5), (6).

Теорема 9. Пусть $A \in G$, выполнены оценки (13) и $F_k(\lambda) = \Gamma(k+1)\lambda R^{1+k/2}(\lambda^2)$. Тогда задача (5), (6) равномерно корректна, и при этом разрешающий оператор $\tilde{Y}_k(t)$ для этой задачи определяется равенством

$$\tilde{Y}_k(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nt} \left(I + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{n^{k+2m+2}}{m! \Gamma(k+m+2)} t^{m+1} F_k^{(m)}(n) \right).$$

В частности, на элементах из области определения оператора A он имеет вид

$$\tilde{Y}_k(t)u_0 = \frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i t^k} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} \lambda R^{1+k/2}(\lambda^2) u_0 d\lambda, \quad u_0 \in D(A), \quad \sigma > \omega.$$

Теоремы 8 и 9 объединяются в следующий критерий.

Теорема 10 (критерий равномерной корректности). Пусть оператор A является генератором аналитической C_0 -полугруппы. Для того чтобы задача (5), (6) была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы при некоторых постоянных $M \geq 1$, $\omega \geq 0$ число λ^2 с $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ принадлежало резольвентному множеству оператора A и для дробной степени резольвенты оператора A были выполнены оценки (13).

Теорема 11. Пусть задача Коши (5), (6) равномерно корректна и $\tilde{Y}_k(t)$ — разрешающий оператор для этой задачи. Тогда $\tilde{Y}_k(t)$ удовлетворяет условиям (а)–(с) определения 1 и, следовательно, является ОФБ, т.е., $\tilde{Y}_k(t) = Y_k(t)$.

Итак, если при изучении задачи Коши (5), (6) ограничиться только замкнутым оператором A с плотной областью определения, то класс уравнений, для которых эта задача равномерно корректна, совпадает с классом уравнений, у которых оператор A является генератором ОФБ $Y_k(t)$, а сама ОФБ при этом является разрешающим оператором $\tilde{Y}_k(t) = Y_k(t)$ для рассматриваемой задачи. Примеры ОФБ и соответствующих генераторов приводятся в [12].

Семейство ОФБ $Y_k(t)$ зависит от параметра $k > 0$. Указанная зависимость содержится в приводимой далее формуле сдвига по этому параметру.

Теорема 12. Пусть $0 \leq m < k$ и $A \in G_m$ — генератор ОФБ $Y_m(t)$. Тогда $A \in G_k \supset G_m$, при этом соответствующая ОФБ $Y_k(t)$ имеет вид

$$Y_k(t) = \frac{2\Gamma(k/2 + 1/2)}{\Gamma(m/2 + 1/2)\Gamma(k/2 - m/2)} \int_0^1 s^m (1-s^2)^{(k-m)/2-1} Y_m(ts) ds. \quad (14)$$

В частности, если $A \in G_0 \subset G_k$ является генератором КОФ $C(t)$, то

$$Y_k(t) = \frac{2\Gamma(k/2 + 1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(k/2)} \int_0^1 (1-s^2)^{k/2-1} C(ts) ds, \quad k > 0, \quad (15)$$

при этом (см. [4]) равномерно по $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$

$$\lim_{k \rightarrow 0} Y_k(t)x = C(t)x, \quad x \in E.$$

Ранее в работах [11, 18] именно равенство (15) было использовано при построении ОФБ, интерпретируемой как разрешающий оператор для рассматриваемых в этих работах дифференциальных уравнений. Дальнейшее обобщение формулы сдвига по параметру приводится в [10].

Из равенства (14) вытекают следующие формулы для производных ОФБ:

$$Y'_k(t)u_0 = \frac{t}{k+1} Y_{k+2}(t)Au_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} Y''_k(t)u_0 = \frac{1}{k+1} Au_0, \quad u_0 \in D(A).$$

Завершая этот раздел, отметим, что случай возмущения оператора $A \in G_k$ ограниченным оператором исследован в [2], а если $A \in G_k$ и $B \in G_m$, $m < k$, то вопрос о принадлежности оператора $A + B$ некоторому классу корректности рассмотрен в [5].

4. Заключение. В этом разделе мы укажем на связи ОФБ $Y_k(t)$ с рядом других разрешающих операторов.

При $k < 0$ и $A \in G_{2-k}$ операторная функция

$$Z_k(t) = \frac{t^{1-k}}{1-k} Y_{2-k}(t)$$

определяет решение уравнения ЭПД (5), удовлетворяющее условиям

$$u(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} t^k u'(t) = u_1, \quad (16)$$

и поэтому она названа операторной функцией Бесселя с отрицательным индексом. В работе [9] доказано, что множество G_{2-k} является классом корректности весовой задачи (5), (16), а функция $Z_k(t)u_1$, $u_1 \in D(A)$ — ее единственное решение.

Отметим, что при $k < 0$ задача Коши для уравнения ЭПД (5) с условиями

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = u_1$$

не является корректной ввиду потери единственности (см. [19]).

В [8] при $k > 0$ введена в рассмотрение операторная функция Струве $L_k(t)$, которая связана с ОФБ $Y_k(t)$ формулой

$$L_k(t)x = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1/2)} \int_0^t {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}; 1; 1 - \frac{t^2}{\tau^2}\right) Y_k(\tau)x d\tau, \quad A \in G_k, \quad x \in E,$$

где ${}_2F_1(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Если $k > 0$, $A \in G_k$, $u_0, u_1 \in D(A)$, то функция $u(t) = Y_k(t)u_0 + L_k(t)u_1$ будет единственным решением уравнения Бесселя—Струве

$$u''(t) + \frac{k}{t}(u'(t) - u'(0)) = Au(t), \quad t > 0, \quad (17)$$

удовлетворяющим условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \quad (18)$$

Важно отметить, что наличие в уравнении (17) заданной при $t = 0$ нагрузки $u'(0)$ меняет постановку начальной задачи при $k > 0$. Вместо корректной для уравнения ЭПД (5) весовой задачи с условием (16), для уравнения Бесселя—Струве (17) следует рассматривать обычную задачу Коши с условием (18).

Укажем далее на связь ОФБ $Y_k(t)$ с разрешающим оператором задачи Коши для уравнения Лежандра

$$u''(t) + k \operatorname{cth} t u'(t) + (k/2)^2 u(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad k > 0. \quad (19)$$

Дифференциальный оператор в левой части уравнения (19) возникает при решении уравнения Лапласа в координатах вытянутого эллипсоида вращения. Как следует из результатов работы [6], корректная постановка начальных условий для абстрактного уравнения Лежандра (19), так же как и для уравнения ЭПД (5), состоит в задании в точке $t = 0$ начальных условий

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \quad (20)$$

В [6] также доказано, что множество операторов A , с которыми задача (19), (20) равномерно корректна, совпадает с множеством G_k , и приведены формулы, связывающие разрешающий оператор этой задачи с ОФБ $Y_k(t)$.

Укажем, наконец, на формулу связи ОФБ $Y_k(t)$ с проинтегрированной операторной косинус-функцией (ПКОФ), которая установлена в [7]. Пусть $k = 2\alpha > 0$ и оператор A является генератором α раз ПКОФ $C_\alpha(t)$, $u_0 \in D(A)$. Тогда задача (5), (6) равномерно корректна, т.е. $A \in G_k$, и соответствующая ОФБ представима в виде

$$Y_k(t)u_0 = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi} t^\alpha} \left(C_\alpha(t)u_0 - \int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau) C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau \right),$$

где $P_\nu(t)$ — сферическая функция Лежандра (см. [15, с. 205]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И. Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения// Итоги науки и техн. Мат. анализ. — 1990. — 28. — С. 87–202.
2. Глушак А. В. О возмущении абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Мат. заметки. — 1996. — 60, № 3. — С. 363–369.
3. Глушак А. В. Операторная функция Бесселя// Докл. РАН. — 1997. — 352, № 5. — С. 587–589.
4. Глушак А. В. Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Мат. заметки. — 1999. — 66, № 3. — С. 364–371.
5. Глушак А. В. Операторная функция Бесселя и связанные с нею полугруппы и модифицированное преобразование Гильберта// Диффер. уравн. — 1999. — 35, № 1. — С. 128–130.
6. Глушак А. В. Операторная функция Лежандра// Изв. РАН. Сер. мат. — 2001. — 65, № 6. — С. 3–14.
7. Глушак А. В. О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя// Диффер. уравн. — 2006. — 42, № 5. — С. 583–589.
8. Глушак А. В. Абстрактная задача Коши для уравнения Бесселя—Струве// Диффер. уравн. — 2017. — 53, № 7. — С. 891–905.
9. Глушак А. В. Критерий разрешимости весовой задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Диффер. уравн. — 2018. — 54, № 5. — С. 627–637.
10. Глушак А. В. Операторная формула сдвига решения задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Мат. заметки. — 2019. — 105, № 5. — С. 656–665.
11. Глушак А. В., Кононенко В. И., Шмелевич С. Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши// Изв. вузов. Мат. — 1986. — № 6. — С. 55–56.
12. Глушак А. В., Покручин О. А. Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 1. — С. 41–59.
13. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Вища школа, 1989.
14. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
15. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.: Физматгиз, 1963.
16. Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье// Усп. мат. наук. — 1951. — 1, № 2 (42). — С. 102–143.
17. Мельникова И. В., Филингов А. И. Интегрированные полугруппы и C -полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач// Усп. мат. наук. — 1994. — 49, № 6 (300). — С. 111–150.
18. Орлов В. П. О слабо вырождающихся гиперболических уравнениях// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 10. — С. 1409–1419.
19. Bresters D. W. On the Euler–Poisson–Darboux equation// SIAM J. Math. Anal. — 1973. — 4, № 1. — P. 31–41.
20. Da Prato G., Giusti E. Una caratterizzazione dei generatori di funzioni coseno astratte// Boll. Union. Mat. Ital. — 1967. — 22. — P. 357–362.
21. Fattorini H. O. Ordinary differential equations in linear topological space, II// J. Differ. Equ. — 1969. — 6. — P. 50–70.
22. Fattorini H. O. A note on fractional derivatives of semigroups and cosine functions// Pac. J. Math. — 1983. — 109, № 2. — P. 335–347.
23. Sova M. Cosine operator functions// Rozpr. mat. — 1966. — 49. — P. 1–47.

Глушак Александр Васильевич

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: aleglu@mail.ru, Glushak@bsu.edu.ru