Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Денисов, Об асимптотике решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 187, 44–49

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-187-44-49>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 12:00:48

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 44–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-44-49

УДК 517.956.2

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

© 2020 г. П. В. ДЕНИСОВ

Аннотация. Работа посвящена изучению асимптотического поведения при больших значениях переменной y решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $E_+^{N+1} \equiv \{x, y : x \in E^N, y > 0\}$.

Ключевые слова: задача Дирихле, полупространство, асимптотическое поведение решений.

ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION IN THE HALF-SPACE

© 2020 P. V. DENISOV

ABSTRACT. This paper is devoted to the study of the asymptotic behavior of the solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation in the half-space $E_+^{N+1} \equiv \{x, y : x \in E^N, y > 0\}$ for large values of the variable y .

Keywords and phrases: Dirichlet problem, half-space, asymptotic behavior of solutions.

AMS Subject Classification: 35J05, 35C20

В полупространстве $\overline{E}_+^{N+1} \equiv \{x, y : x \in E^N, y \geq 0\}$ рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \Delta u(x, y) = 0 \quad (x, y) \in E_+^{N+1}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in E^N, \quad (2)$$

где

$$\Delta = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Предполагается, что граничная функция $u_0(x)$ является непрерывной и ограниченной в E^N :

$$u_0(x) \in C(E^N), \quad |u_0(x)| \leq C. \quad (3)$$

Под решением задачи Дирихле (1), (2) будем понимать ограниченное классическое решение задачи (1), (2), т.е. функция $u(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и y в E_+^{N+1} и удовлетворяет в классическом смысле уравнению (1) и граничному условию (2).

Автор выражает глубокую признательность проф. М. В. Шамолину за внимание и ценные советы.

При сделанных предположениях ограниченное решение задачи Дирихле (1), (2) существует, единственно и представимо в виде интеграла Пуассона (см. [2, 4]):

$$u(x, y) = \frac{\Gamma((N+1)/2)y}{\pi^{(N+1)/2}} \int_{E^N} \frac{u_0(z) dz}{[y^2 + |x - z|^2]^{(N+1)/2}}. \quad (4)$$

Символом $S_R^\alpha u_0(x)$ обозначим шаровые средние Рисса порядка $\alpha \geq 0$ от граничной функции (2) (см. [1, 5]):

$$\begin{aligned} S_R^\alpha u_0(x) &= \frac{2}{B(\alpha+1, N/2)w_N R^N} \int_{r \leq R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^\alpha u_0(y) dy = \\ &= \frac{2}{B(\alpha+1, N/2)R^N} \int_0^R \rho^{N-1} M(x, \rho; u_0) \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)^\alpha d\rho, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$r = |x - y| = \left[\sum_{k=1}^N (x_k - y_k)^2 \right]^{1/2}, \quad w_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$$

и $M(x, \rho; u_0)$ — сферическое среднее функции $u_0(x)$ по поверхности сферы с центром в точке x радиуса ρ :

$$M(x, \rho; u_0) = \frac{1}{w_N \rho^{N-1}} \int_{|x-y|=\rho} u_0(y) dS_y. \quad (6)$$

Изучим вопрос о достаточных условиях существования при некотором $\nu > 0$ асимптотики решения задачи Дирихле (1), (2) при $y \rightarrow +\infty$, т.е. вопрос о существовании предела

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^\nu u(x, y) = A(x), \quad (7)$$

и покажем, что эти условия выражаются в терминах существования шаровых средних Рисса порядка $\alpha \geq 0$, согласованной степенной асимптотики по R , при $R \rightarrow +\infty$.

Вначале выясним важные свойства предельной функции $A(x)$ в равенстве (7).

Теорема 1. Если предел (7) существует равномерно относительно x на каждом компакте K в E^N , то функция $A(x)$ является гармонической функцией в E^N .

Следствие 1. Если $u_0(x)$ — ограниченная, непрерывная функция в E^N , в задаче (1), (2) и предел (7) существует равномерно по x на каждом компакте K в E^N , то $A(x) = A$ — постоянная в E^N .

Теорема 2. Если граничная функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в E^N и шаровые средние Рисса (5) порядка α от $u_0(x)$ имеют при некотором $\nu > 0$, удовлетворяющем неравенствам

$$0 < \nu < N + 2\alpha + 2, \quad (8)$$

асимптотику

$$S_R^\alpha u_0(x) = \frac{A}{R^\nu} + \frac{Q(x, R)}{R^\nu}, \quad (9)$$

где

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} Q(x, R) = 0 \quad (10)$$

равномерно на каждом компакте $K \in E^N$ или равномерно по x во всем E^N , то решение задачи Дирихле (1), (2) имеет при $y \rightarrow +\infty$ асимптотику

$$u(x, y) = \frac{A \cdot C_1}{y^\nu} + \frac{Q_1(x, y)}{y^\nu}, \quad (11)$$

где

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} Q_1(x, y) = 0 \quad (12)$$

существует равномерно по x на каждом компакте $K \in E^N$ или равномерно по x во всем E^N ,

$$C_1 = B\left(\frac{N+2\alpha+2-\nu}{2}, \frac{1+\nu}{2}\right) / B\left(\frac{N+2\alpha+2}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (13)$$

Доказательство теоремы 1. Пусть шар $\{|x-z| \leq R\}$ целиком принадлежит компакту K , для которого существует равномерный по x предел (7). Введем обозначение

$$V(x, y) = y^\nu u(x, y). \quad (14)$$

Для функции (14), очевидно принадлежащей классу $C^2(K)$, имеет место формула

$$V(x, y) = \frac{1}{w_N R^{N-1}} \int_{r=R} V(z, y) dS_z + \frac{1}{(N-2)} \int_{r \leq R} (r^{2-N} - R^{2-N}) \Delta V(z, y) dz, \quad (15)$$

где $r = |x-z|$ (см. [2]). Из этой формулы, уравнения (1) и из существования равномерного на K предела (7) следует, что существует равномерный по $x \in K$ предел

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{r \leq R} (r^{2-N} - R^{2-N}) [y^\nu u_{yy}(z, y)] dz = B(x). \quad (16)$$

Докажем, что предел (16) равен нулю хотя бы для одной последовательности $y_n \rightarrow +\infty$. Используя формулу (15), существование равномерных пределов (7), (16), а также интегрирование по частям (см. [3]), получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{\tau+1} d\tau \int_\tau^{n+1} \left[\int_{r \leq R} (r^{2-N} - R^{2-N}) y^\nu u_{yy}(z, y) dz \right] dy = \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{r \leq R} (r^{2-N} - R^{2-N}) \left[\int_n^{n+1} d\tau \int_\tau^{\tau+1} y^\nu u_{yy}(z, y) dy \right] dz. \end{aligned}$$

Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} d\tau \int_\tau^{\tau+1} y^\nu u_{yy}(z, y) dy = 0, \quad |x-z| \leq R. \quad (17)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} K = \int_n^{n+1} d\tau \int_\tau^{\tau+1} y^\nu u_{yy}(z, y) dy = \\ = [(n+2)^n u(z, n+2) - (n+1)^n u(z, n+1)] - [(n+1)^n u(z, n+1) - n^n u(z, n)] - \\ - \nu \int_n^{n+1} (\tau+1)^{\nu-1} u(z, \tau+1) - \nu^{\nu-1} u(z, \tau) d\tau + \\ + \nu(\nu-1) \int_n^{n+1} d\tau \int_\tau^{\tau+1} y^{\nu-2} u(z, y) dy = K_1 + K_2 + K_3 + K_4. \quad (18) \end{aligned}$$

Из существования равномерного предела (7) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} K_2 = 0. \quad (19)$$

Применяя в K_3 и K_1 в (18) первую формулу среднего значения (см. [3, т. 1]) и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим, что существует предел

$$\begin{aligned} \lim K_3 + \lim K_4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\tau_* + 1)^\nu u(z, \tau_* + 1) - \tau_*^\nu u(z, \tau_*) \left[\ln \frac{n+1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n} \right] + \\ + \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\nu - 1) \tau_{**}^\nu u(z, \tau_{**}) \int_n^{n+1} \int_\tau^{\tau+1} \frac{dy}{y^2} = 0, \end{aligned}$$

т.е. доказано, что существует предел при $y_n \rightarrow \infty$ в формуле (16), и предел $B(x)$ равен нулю.

Таким образом доказано, что предельная функция в (7) удовлетворяет формуле среднего арифметического

$$A(x) = \frac{1}{w_N R^{N-1}} \int_{|x-z|=R} A(z) dS_z.$$

Тогда из [2, 4] следует, что $A(x)$ является гармонической в E^N . Теорема 1 доказана. $\square$

Доказательство следствия 1. Так как $u_0(x)$ по условию непрерывна и ограничена в E^N , решение (4) задачи Дирихле также является ограниченным в E^{N+1} . Тогда из теоремы Лиувилля (см. [2]) и теоремы 1 получим, что $A(x) = A$ — постоянная в E^N . $\square$

Лемма 1. Если граничная функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в E^N , то для решения задачи Дирихле (1), (2) справедлива формула

$$u(x, y) = Cy \int_0^{+\infty} \rho^{N+2\alpha+1} S_\rho^\alpha u_0(x) \frac{d\rho}{[\rho^2 + y^2]^{(N+2\alpha+3)/2}}, \quad (20)$$

где

$$C = 2/B \left(\frac{N+2\alpha+2}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

и $S_\rho^\alpha u_0(x)$ — шаровые средние Рисса порядка α от $u_0(x)$, определенные в (5).

Доказательство. Переходя к сферическим N -мерным координатам под знаком интеграла Пуассона, получим

$$u(x, y) = \frac{2y}{B(N/2, 1/2)} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{N-1} M(x, \rho; u_0) d\rho}{[\rho^2 + y^2]^{(N+1)/2}},$$

где $M(x, \rho; u_0)$ — сферическое среднее (6) граничной функции $u_0(x)$. Совершая под знаком последнего интеграла замену переменной $\rho = yz$, а затем выполняя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{2y}{B(N/2, 1/2)} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dz} \left[\int_0^z \sigma^{N-1} M(x, y\sigma; u_0) d\sigma \right] (1+z^2)^{-(N+1)/2} dz = \\ &= \frac{2}{B(N/2, 1/2)} \lim_{z \rightarrow +\infty} (1+z^2)^{-(N+1)/2} \cdot \int_0^z \sigma^{N-1} M(x, y\sigma; u_0) d\sigma \Big|_{z=0}^2 + \\ &\quad + \frac{2(N+1)}{B(N/2, 1/2)} \int_0^{+\infty} z(1+z^2)^{-(N+3)/2} \left[\int_0^z \sigma^{N-1} M(x, y\sigma; u_0) d\sigma \right] dz. \end{aligned}$$

Так как $u_0(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию ограниченности (3), подстановка при $z \rightarrow +\infty$, очевидно, обращается в нуль, поэтому получим

$$u(x, y) = \frac{2(N+1)}{B(N/2, 1/2)} \int_0^{+\infty} z(1+z^2)^{-(N+3)/2} \left[\int_0^z \sigma^{N-1} M(x, y\sigma, u_0) d\sigma \right] dz.$$

Проинтегрируем по частям правую часть этого неравенства, при этом аналогично получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{2(N+1)}{B(N/2, 1/2)} \int_0^\infty (1+z^2)^{-(N+3)/2} \frac{d}{dz} \left[\int_0^z \sigma_1 d\sigma_1 \int_0^{\sigma_1} \sigma^{N-1} M(x, y\sigma, u_0) d\sigma \right] dz = \\ &= \frac{2(N+1)(N+3)}{B(N/2, 1/2)} \int_0^{+\infty} (1+z^2)^{-(N+5)/2} z \left[\int_0^z \sigma_1 d\sigma_1 \int_0^{\sigma_1} \sigma^{N-1} M(x, y\sigma, u_0) d\sigma \right] dz. \end{aligned}$$

При этом мы учли, что в силу непрерывности и ограниченности функции $u_0(x)$ и убывания функции $(1+z^2)^{-(N+3)/2}$ при $z \rightarrow +\infty$, подстановки при $z \rightarrow +\infty$ обратились в нуль. Продолжая n раз аналогичный процесс интегрирования по частям и учитывая на каждом шаге факт обращения подстановок в нуль, получим формулу:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{2(N+1)(N+3) \dots (N+2n+1)}{B(N/2, 1/2)} \int_0^\infty \frac{z}{(1+z^2)^{(N+2n+3)/2}} \times \\ &\times \left(\int_0^z \sigma_{n+1} d\sigma_{n+1} \int_0^{\sigma_{n+1}} \sigma_n d\sigma_n \int_0^{\sigma_n} \dots \sigma_2 d\sigma_2 \int_0^{\sigma_2} \sigma_1^{N-1} M(x, y\sigma_1; u_0) d\sigma_1 \right). \quad (21) \end{aligned}$$

Учитывая известную формулу

$$\int_0^z \sigma_{n+1} d\sigma_{n+1} \int_0^{\sigma_{n+1}} \dots \sigma_2 d\sigma_2 \int_0^{\sigma_2} \sigma_1^{N-1} M(x, y\sigma_1; u_0) d\sigma_1 = \frac{1}{2^n n!} \int_0^z (z^2 - \sigma^2)^n \sigma^{N-1} M(x, y\sigma; u_0) d\sigma$$

и преобразуя числовой коэффициент при (21) по рекуррентным формулам для B - и Γ -функций (см. [3, т. 2]), получим требуемый результат. Лемма 1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. В силу регулярности шаровых средних Рисса достаточно доказать теорему 2 для случая, когда порядок средних Рисса (9) является натуральным: $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

Представляя решение Дирихле (1), (2) по формуле (20), при $\alpha = n$ будем иметь

$$u(x, y) = C_1 \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{N+2n+1}}{(\rho y)^\nu} [(\rho y)^\nu S_{\rho y}^n u_0(x)] \frac{d\rho}{(1+\rho^2)^{(N+2n+3)/2}}, \quad (22)$$

где

$$C_1 = B\left(\frac{N+2n-\nu}{2}, \frac{1+\nu}{2}\right) / B\left(\frac{N+2n+2}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Учитывая, что по условию теоремы существует предел (9), заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $R_0(\varepsilon) > 0$, что для всех $R > R_0$ справедливо равенство

$$R^\nu S_R^n u_0(x) = A + \varepsilon(x, R), \quad (23)$$

где $|\varepsilon(x, R)| < \varepsilon/2$ в точке x или равномерно по x во всем E^N .

Выбрав $R > R_0$, разобьем интеграл (22) на два интеграла:

$$y^\nu u(x, y) = C_1 \int_0^{\delta(y)} \rho^{N+2n+1-\nu} [(y\rho)^\nu S_{y\rho}^n u_0(x)] (1 + \rho^2)^{(N+2n+3)/2} d\rho + \\ + C_1 \int_{\delta(y)}^{+\infty} \rho^{N+2n+1-\nu} [(y\rho)^\nu S_{y\rho}^n u_0(x)] (1 + \rho^2)^{-(N+2n+3)/2} d\rho = J_1 + J_2, \quad (24)$$

где $\delta(y) = 1/\sqrt{y}$.

Для оценки второго интеграла J_2 в (24) применим интегральную формулу среднего значения (см. [3, т. 1]):

$$J_2 = C_1 \int_{\delta(y)}^{+\infty} \rho^{N+2n+1-\nu} (1 + \rho^2)^{-(N+2n+3)/2} d\rho \cdot [(y\rho_*)^\nu S_{y\rho_*}^n u_0(x)],$$

где $\rho_* \geq \delta(y)$. Так как $y\rho_* \geq y\delta(y) = \sqrt{y} \rightarrow +\infty$ при $y \rightarrow +\infty$, в силу (23) и того факта, что $\delta(y) = 1/\sqrt{y} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$, получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $y_1(\varepsilon)$, что при всех $y \geq y_1$ имеем

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} |J_2 - A \cdot C_1| = |\varepsilon_1(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (25)$$

Оценим теперь J_1 в (24). Очевидно, из оценки (3) для $u_0(x)$ и равенства (24) следует оценка

$$|\rho^\nu y^\nu S_{y\rho}^n u_0(x)| < C_3.$$

Учитывая в J_1 эту оценку и тот факт, что $\delta(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$, очевидно, получим, что существует предел

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} J_1(x, y) = 0 \quad (26)$$

в точке x или равномерно по $x \in E^N$. Из (25) и (26) вытекает, что теорема 2 доказана. $\square$

Теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2 настоящей работы, для задачи Коши для уравнения теплопроводности были доказаны в работе [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов В. Н. Об асимптотике при большом времени решения задачи Коши для уравнения теплопроводности // Докл. РАН. — 1995. — 351, № 6. — С. 736–738.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. — М.-Л.: ГТТИ, 1945.
3. Никольский С. М. Курс математического анализа. — М.: Наука, 1983, 1984.
4. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. — М., 1966.
5. Харди Г. Расходящиеся ряды. — М., 1951.

Денисов Петр Васильевич

Московский педагогический государственный университет

E-mail: denisov.piter@gmail.com