Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Солдатов, О задаче Шварца для системы Моисила—Теодореско, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 188, 3–13

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-188-3-13>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:05:27

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 3–13
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-3-13

УДК 517.95

О ЗАДАЧЕ ШВАРЦА ДЛЯ СИСТЕМЫ МОИСИЛА—ТЕОДОРЕСКО

© 2020 г. А. П. СОЛДАТОВ

Аннотация. Задача Шварца для классической системы Коши—Римана в плоской области заключается в определении ее решения по заданной первой компоненте этого решения на границе области. В работе изучен аналог этой задачи для системы Моисила—Теодореску в трехмерной области, ограниченной гладкой поверхностью. Описаны в явном виде ядро и коядро этой задачи через топологические инварианты области, а также ядро и коядро интегрального представления решений системы Моисила—Теодореску, тесно связанные с задачей Шварца.

Ключевые слова: система Моисила—Теодореску, задача Шварца, ядро, коядро, многосвязная область.

ON THE SCHWARZ PROBLEM FOR THE MOISIL—TEODORESCO SYSTEM

© 2020 А. P. SOLDATOV

ABSTRACT. The Schwarz problem for the classical Cauchy—Riemann system in a flat domain is to determine its solution by the known first component of this solution on the boundary of the domain. In this paper, we consider an analog of this problem for the Moisil—Teodoresco system in a three-dimensional domain bounded by a smooth surface. We propose explicit expressions of the kernel and cokernel of this problem in terms of topological invariants of the domain and the kernel and cokernel of the integral representation of solutions of the Moisil—Teodoresco system that are closely related to the Schwarz problem.

Keywords and phrases: Moisil—Teodoresco system, Schwarz problem, kernel, cokernel, multiply connected domain.

AMS Subject Classification: 35J56, 35J46

В ограниченной области $D \subseteq \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\Gamma = \partial D$ рассмотрим систему Моисила—Теодореско для четырехкомпонентного вектора $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in C^1(D)$, где положено $\tilde{u} = (u_2, u_3, u_4)$

$$\operatorname{div} \tilde{u} = 0, \quad \operatorname{grad} u_1 + \operatorname{rot} \tilde{u} = 0. \quad (1)$$

Для решений этой системы справедливы основные факты теории аналитических функций на плоскости, включая интегральную теорему и формулу Коши, теорему Морера и др. Основы этой теории были заложены в работах Г. К. Моисила и Н. Теодореску [12, 13]. Нетрудно показать, что все компоненты компоненты u_j решения $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ системы являются гармоническими функциями. В этом смысле она является примером многомерной обобщенной системы Коши—Римана (см. [14]). В рамках кватернионного и клиффордова анализа решения этих систем как многомерные аналоги аналитических функций (называемые часто гипераналитическими функциями) исследовались многими авторами (см. [9, 10, 15, 16] и особенно [11], где приведена обширная библиография).

После появления статьи Г. К. Моисила и Н. Теодореску [12] дальнейшее развитие теория получила в работах А. В. Бицадзе [1, 2]. В частности, им было введено понятие интеграла типа Коши для системы (1) и указаны различные его приложения.

Задача Шварца для этой системы определяется краевым условием

$$u_1^+ = f_1, \quad \tilde{u}^+ n = f_2, \quad (2)$$

где $+$ означает граничное значение изнутри D , n — единичная внешняя нормаль и $u^+ n$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. В дальнейшем предполагается, что поверхность Γ принадлежит классу $C^{2,\nu}$, $0 < \nu < 1$, так что вектор $n \in C^{1,\nu}(\Gamma)$, и решение данной задачи рассматривается в классе Гельдера $C^\mu(\overline{D})$ с некоторым $0 < \mu < \nu$.

С задачей Шварца свяжем однородную сопряженную задачу для «сопряженной» системы

$$\operatorname{div} \tilde{v} = 0, \quad \operatorname{grad} v_1 - \operatorname{rot} \tilde{v} = 0, \quad (3)$$

краевое условие которой определяется с помощью некоторого конечного открытого покрытия $\Gamma_{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, поверхности Γ . Это покрытие строится так, чтобы на каждом множестве $\Gamma_{(k)}$ можно было выбрать такие трехкомпонентные вектор-функции $p_{(k)}, q_{(k)} \in C^{1,\nu}(\Gamma_{(k)})$, что вместе с единичным вектором нормали n они образовывали тройку ортов в каждой точке. В этих обозначениях однородное сопряженное краевое условие определяется на этих множествах равенствами

$$\tilde{v}^+(y)p_{(k)}(y) = \tilde{v}^+(y)q_{(k)}(y) = 0, \quad y \in \Gamma_{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Поскольку в точках $y \in \Gamma_{(k)} \cap \Gamma_{(r)}$ каждый из векторов $p_{(k)}(y)$ и $q_{(k)}(y)$ является линейной комбинацией $p_{(r)}(y)$ и $q_{(r)}(y)$, это краевое условие корректно.

Систему (1) можно записать в форме

$$M \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) u(x) = 0$$

с матрицей

$$M(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & 0 & -\zeta_3 & \zeta_2 \\ \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & -\zeta_1 \\ \zeta_3 & -\zeta_2 & \zeta_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (5)$$

система (3) по отношению к транспонированной матрице $M^\top$ записывается аналогично. Согласно формуле Грина соотношение двойственности между решениями этих систем заключается в тождестве

$$\int_{\Gamma} u(y)[M^\top(n)v](y)d_2(y) = 0,$$

где $d_2 y$ — элемент площади. Краевое условие (2) можно записать в форме $B_0 u^+ = f$ с матрицей

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что по отношению к решениям $v \in C^\mu(\overline{D})$ однородной задачи (3), (4) это тождество принимает вид

$$\int_{\Gamma} (B_0 u)(y)[B_0 M^\top(n)v](y)d_2(y) = 0.$$

Поскольку

$$B_0 M^\top(n) = \begin{pmatrix} 0 & n_1 & n_2 & n_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

последнее тождество принимает вид

$$\int_{\Gamma} [u_1^+(\tilde{v}^+ n) + (\tilde{u}^+ n)v_1]d_2 y = 0.$$

Таким образом, условие ортогональности

$$\int_{\Gamma} [f_1(\tilde{v}^+ n) + f_2 v_1] d_2 y = 0 \quad (7)$$

всем решениям $v \in C^\mu(\overline{D})$ однородной задачи (3), (4) необходимо для разрешимости неоднородной задачи (1), (2).

Пользуясь общей эллиптической теорией, можно получить следующий результат (см. [4, 5]).

Теорема 1.

- (а) Пространства $U_0 \subseteq C^\mu(\overline{D})$ решений однородной задачи (1), (2) (с $f = 0$) и $V_0 \subseteq C^\mu(\overline{D})$ решений однородной задачи (3), (4) конечномерны.
- (б) Неоднородная задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда для всех $v \in V_0$ выполнены условия ортогональности (7).

Таким образом, задача (1), (2) фредгольмова в пространстве $C^\mu(\overline{D})$. Заметим, что число линейно независимых условий (5) для функций $v \in V_0$ в точности равно размерности $\dim V_0$, поскольку условия $v_1^+ = 0$, $\tilde{v}^+ n = 0$ совместно с (4) означают, что $v^+ = 0$; для решения системы (3) это возможно лишь при $v = 0$. Следовательно, индекс $\varkappa$ задачи Шварца равен $\varkappa = \dim U_0 - \dim V_0$.

Конечномерные пространства U_0 и V_0 описываются явно, причем их размерности являются топологическими инвариантами области D .

Пусть s — число связных компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$ поверхности Γ . Тогда открытое множество $D' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ состоит также из s областей $D'_1, \dots, D'_s$, где предполагается, что $\partial D'_j = \Gamma_j$ и область D'_s является окрестностью ∞ .

Каждая замкнутая связная поверхность Γ_j гомеоморфна сфере с некоторым числом m_j ручек, так что помимо s число $m = m_1 + \dots + m_s$ также является топологическим инвариантом области D .

Число m тесно связано с первой группой когомологий де Рама $H^1(D) = H_{DR}^1(D)$, которая определяется следующим образом (см., например, [3]). Рассмотрим в области D пространство $A(D)$ замкнутых дифференциальных 1-форм $a = a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + a_3(x)dx_3$ с коэффициентами $a_j \in C^{1,\mu}(\overline{D})$ и его подпространство $A_0(D)$ точных форм. Тогда первая группа когомологий $H^1(D)$ определяется как фактор-пространство A/A_0 . Обозначим через $W(D)$ класс многозначных гармонических функций w , частные производные которых однозначны и нормальная производная которых обращается в нуль на Γ . Каждая такая функция в односвязной подобласти $D_0 \subseteq D$ однозначна и принадлежит $C^{1,\mu}(\overline{D}_0)$. Она корректно определяет дифференциальную форму

$$dw = \sum_i \frac{\partial w}{\partial x_i} dx_i \in A(D).$$

В силу краевого условия Неймана однозначные функции $w \in W(D)$ могут быть только постоянными. Другими словами, если форма dw точна, то $dw = 0$.

Теорема 2.

- (а) Имеет место равенство $m = \dim H^1(D)$.
- (б) Пространство $\{dw, w \in W(D)\}$ имеет размерность m .

Доказательство. (а) Пространство $A(\Gamma) = A(\Gamma_1) \oplus \dots \oplus A(\Gamma_s)$ замкнутых 1-форм, его подпространство $A_0(\Gamma)$ и фактор-пространство $H^1(\Gamma)$ естественным образом вводятся и для гладкой поверхности Γ . Хорошо известно, что размерность последнего пространства четна и дается равенством $\dim H^1(\Gamma) = 2m$. Кроме того, первая группа гомологий $H_1(\Gamma)$ на этой поверхности изоморфна $H^1(\Gamma)$.

В частности, дело сводится к равенству

$$2 \dim H^1(D) = \dim H^1(\Gamma), \quad (8)$$

которое считается известным в алгебраической топологии. Поскольку точную ссылку привести трудно, приведем схему его доказательства.

Очевидно, естественное отображение сужения $a \rightarrow a_\Gamma$ действует $A(D) \rightarrow A(\Gamma)$, причем точность формы a_Γ влечет точность a в области D . Другими словами, прообраз $A_0(\Gamma)$ при отображении $a \rightarrow a_\Gamma$ совпадает с $A_0(D)$. В результате приходим к индуцированному вложению векторных пространств $H^1(D) \rightarrow H^1(\Gamma)$, образ которого обозначим $\tilde{H}^1(D)$.

Одноточечная компактификация $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ позволяет рассматривать ее как гладкое трехмерное многообразие, гомеоморфное трехмерной сфере в $\mathbb{R}^4$. Открытое множество $D' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ состоит из попарно непересекающихся областей D'_i , $1 \leq i \leq s$, где D'_i имеет своей границей Γ_i . Аналогично предыдущему можно ввести пространство замкнутых форм $A(D') = A(D'_1) \oplus \dots \oplus A(D'_s)$, его подпространство $A_0(D')$ точных форм и первую группу когомологий $H^1(D')$. Как и выше имеем вложение $H^1(D') \rightarrow H^1(\Gamma)$ с образом $\tilde{H}^1(D')$. Согласно двойственности Александера (см., например, [8, теорема 3.44]) все пространство $H_1(\Gamma)$ первой группы гомологий изоморфно прямой сумме пространств $\tilde{H}^1(D)$ и $\tilde{H}^1(D')$. Поскольку $H_1(\Gamma)$ и $H^1(\Gamma)$ изоморфны, отсюда

$$H^1(\Gamma) = \tilde{H}^1(D) \oplus \tilde{H}^1(D'). \quad (9)$$

Рассмотрим на произведении $H^1(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$ билинейную форму

$$([a], [b]) = \int_{\Gamma} a \wedge b,$$

где замкнутые формы a, b являются представителями соответствующих классов. Легко видеть, что интеграл здесь обращается в нуль, если одна из форм a или b точна. Поэтому данное определение корректно. Нетрудно убедиться (см. [8, п. 3.2]), что эта билинейная форма невырождена и, очевидно, кососимметрична. Если $[a]$ и $[b]$ принадлежат одному пространству в правой части (9), то в силу замкнутости 2-формы $a \wedge b$ и теоремы Стокса имеем $([a], [b]) = 0$. Отсюда следует, что размерности пространств в правой части (9) совпадают и, значит, имеет место равенство (8).

(b) Пусть задана замкнутая форма $a = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 \in A(D)$ с коэффициентами $a_i \in C^{1,\mu}(\overline{D})$. Достаточно убедиться, что класс смежности $[a]$ содержит форму dw для некоторого $w \in W(D)$. Другими словами, найдется такая функция $w \in W(D)$, что форма $b = b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3$ с коэффициентами $b_j = \partial w / \partial x_j$ точна. С этой целью введем функции

$$F = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \in C^\mu(\overline{D}), \quad f = \sum_i a_i n_i \in C^\mu(\Gamma)$$

и рассмотрим задачу Неймана

$$\Delta u = F, \quad \frac{\partial u^+}{\partial n} = f. \quad (10)$$

В силу формулы Грина имеем

$$\int_D F(x) d_3 x - \int_{\Gamma} f(y) d_2 y = 0;$$

как известно, это условие необходимо и достаточно для разрешимости задачи (10). $\square$

Рассмотрим теперь дифференциальную форму $b = \sum b_i dx_i$ с коэффициентами $b_i = a_i - \partial u / \partial x_i$, которая, очевидно, принадлежит тому же классу смежности, что и a . В силу ее замкнутости существует многозначная функция w , для которой $b_i = \partial w / \partial x_i$. На основании (10) эта функция гармонична и удовлетворяет однородному условию Неймана, т.е. принадлежит $W(D)$.

Теорема 3.

- (a) Пространство U_0 имеет размерность t и состоит из вектор-функций u с компонентами $u_1 = 0$, $\tilde{u} = \text{grad } w$, где $w \in W(D)$.
- (b) Пространство V_0 имеет размерность s и состоит из вектор-функций $v_1 = c$, $\tilde{v} = \text{grad } w$, где $c \in \mathbb{R}$ и $w \in C^{1,\nu}(\overline{D})$ — гармоническая функция, принимающая на связных компонентах Γ постоянные значения.

Доказательство. (а) В одну сторону утверждение очевидно. Обратно, пусть задано решение $u = (u_1, \tilde{u}) \in C^\mu(\overline{D})$ задачи (1), (2) с правой частью $f = 0$, т.е. удовлетворяющее краевым условиям

$$u_1^+ = 0, \quad \tilde{u}^+ n = 0. \quad (11)$$

В силу общей теоремы о гладкости вплоть до границы решений эллиптических задач функция u в действительности принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Поскольку функция u_1 гармонична в области D и обращается в нуль на Γ , она равна нулю в области D и система (1) переходит в соотношения

$$\operatorname{div} \tilde{u} = 0, \quad \operatorname{rot} \tilde{u} = 0, \quad (12)$$

для вектора $\tilde{u}$. Поэтому существует такая гармоническая функция w , многозначная в области D , частные производные которой однозначны и градиент которой совпадает с $\tilde{u}$. По отношению к этой функции второе краевое условие (11) переходит в $\partial w^+ / \partial n = 0$, так что $w \in W(D)$, и остается воспользоваться теоремой 2(b).

(b) В одну сторону утверждение очевидно. Обратно, пусть v является решением задачи (3), (4). В принятом предположении вектор-функции $p_{(k)}$ и $q_{(k)}$ можно выбрать в классе $C^{1,\mu}(\Gamma_{(k)})$, так что на основании теоремы о гладкости вплоть до границы краевых задач из общей эллиптической теории любое решение $v = (v_0, \tilde{v}) \in C^\mu(\overline{D})$ задачи (3), (4) в действительности принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Для фиксированного k рассмотрим односвязную поверхность $S \subseteq \Gamma_{(k)}$ с гладким краем и применим к вектор-функции $\tilde{v}^+ \in C^1(S)$ на этой поверхности теорему Стокса. Тогда

$$\int_S (\operatorname{rot} \tilde{v})^+(x) n(x) d_2 x = \int_{\partial S} \tilde{v}^+(y) e(y) d_1 y,$$

где $e(y)$ — единичный касательный вектор к контуру ∂S , ориентированный положительно по отношению к n (т.е. обход этого контура, если смотреть из конца вектора n , осуществляется против часовой стрелки). В соответствии с краевым условием (4) вектор $\tilde{v}^+$ пропорционален n на Γ и, следовательно, подинтегральное выражение в правой части последнего равенства обращается в нуль. Поэтому на основании второго уравнения (4) оно примет вид

$$\int_S \frac{\partial v_1^+}{\partial n} d_2 x = 0.$$

Так как оно верно для любой односвязной области $S \subseteq \Gamma_{(k)}$ и поверхности $\Gamma_{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, покрывают Γ ; отсюда заключаем, что нормальная производная обращается в нуль всюду на Γ :

$$\frac{\partial v_1^+}{\partial n} = 0.$$

Вспоминая, что все компоненты системы уравнений (3) являются гармоническими функциями, отсюда выводим, что функция v_1 постоянна в области D и система (3) превращается в систему (12) для вектора $\tilde{v}$.

Поэтому функцию $\tilde{v}$ можно представить в виде $\tilde{v} = \operatorname{grad} w$ с некоторой многозначной гармонической функцией w , частные производные которой однозначны. При этом в силу краевого условия (4) ее частные производные по касательным направлениям p и q равны нулю на границе, так что функция w^+ постоянна на каждой связной компоненте поверхности Γ . Следовательно, гармоническая функция w однозначна во всей области D , что завершает доказательство п. (b) теоремы. $\square$

Согласно теореме 3(b) условия ортогональности (7) сводятся к соотношениям

$$\int_{\Gamma} f_1(y) \frac{\partial w}{\partial n} d_2(y) = 0, \quad \int_{\Gamma} f_2(y) d_1 y = 0 \quad (13)$$

для всех гармонических функций w , принимающих на связных компонентах Γ постоянные значения. Конечно, второе равенство в (13) непосредственно вытекает из формулы Грина, примененной к первому уравнению (1).

Из формулы Грина, примененной к системе Моисила—Теодореску $M(\partial u/\partial x) = 0$, определяемой матрицей (5), в области D , следует равенство

$$\int_{\Gamma} M[n(y)]u^+(y)d_2y = 0,$$

которое является аналогом теоремы Коши для системы Коши—Римана. Матрица функция $|x|^{-3}M^\top(x)$ удовлетворяет уравнению $M(\partial u/\partial x) = 0$ при $x \neq 0$; легко видеть, что

$$\int_{|y|=1} |y|^{-3}M^\top(y)M(n)d_2y = 4\pi,$$

поскольку на единичной сфере внешняя нормаль имеет вид $n = y/|y|$ и $M^\top(y)M(y) = 1$. Поэтому обычным образом для решений системы Моисила—Теодореску устанавливается аналог формулы Коши

$$\frac{1}{4\pi} \int |y-x|^{-3}M^\top(y-x)M(n)u^+(y)d_2y = u(x), \quad x \in D.$$

Эти и другие основные факты теории аналитических функций на плоскости, включая интегральную теорему и формулу Коши, теорему Морера и др. были перенесены на систему Моисила—Теодореску в работах Г. К. Моисила и Н. Теодореску (см., например, [13]).

По аналогии с интегралом формулы Коши можно ввести интеграл типа Коши

$$(I\psi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{M^\top(y-x)}{|y-x|^3} M[n(y)]\psi(y)d_2y, \quad x \in D, \quad (14)$$

с произвольной плотностью $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_4) \in C(\Gamma)$. По отношению к $x \in D' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ этот интеграл удобно записывать в форме $I'\psi$.

Если функция ψ удовлетворяет условию Гельдера и поверхность Γ ляпуновская, то, как показал А. В. Бицадзе (см. [1]), существуют односторонние предельные значения

$$u^\pm(y_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow y_0, \\ x \in D^\pm}} u(x), \quad y_0 \in \Gamma,$$

интеграла $u = I\psi$ изнутри $D^+ = D$ и извне $D^- = D'$, для которых справедлив аналог формул Сохоцкого—Племеля

$$(I\psi)^+ = \psi + K\psi, \quad (I'\psi)^- = -\psi + K\psi, \quad (15)$$

где двумерный сингулярный интеграл $(K\psi)(y_0)$ определяется аналогично (14) по отношению к точке $y_0 \in \Gamma$ поверхности.

Можно показать (см. [6]), что в предположении $\Gamma \in C^{1,\nu}$ оператор $I_D : C^\mu(\Gamma) \rightarrow C^\mu(\overline{D})$, $0 < \mu < \nu$, ограничен.

В равенстве $u = I_D\psi$ четырехкомпонентный вектор ψ определяется заведомо не единственным образом. Например, если решение u_1 системы Моисила—Теодореску в открытом множестве D' имеет поведение $O(|x|^{-2})$ при $|x| \rightarrow \infty$, то u не меняется от замены ψ на $\psi + u_1^-$.

В этой связи, исходя из вектор-функции $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C(\Gamma)$, в обозначениях (6) четырехкомпонентный вектор ψ запишем в форме $\psi = B_0^\top \varphi$; соответственно, введем модифицированный интеграл типа Коши $I_0\varphi = I(B_0^\top \varphi)$. В явном виде в обозначениях векторного поля (1) этот оператор действует по формуле

$$\begin{aligned} (I_0\varphi)_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{n(y)(y-x)}{|y-x|^3} \varphi_1(y)d_2y, \\ (\widetilde{I_0\varphi})(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{y-x}{|y-x|^3} \varphi_2(y)d_2y + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{[n(y), y-x]}{|y-x|^3} \varphi_1(y)d_2y, \end{aligned} \quad (16)$$

где, как и выше, вектор $\widetilde{I_0\varphi}$ составлен из последних трех компонент вектора $I_0\varphi$ и $[\cdot, \cdot]$ означает векторное произведение.

Этот оператор тесно связан с оператором $R_0u = B_0u^+$ задачи (1), (2). Именно, согласно (6) имеем очевидное соотношение $B_0B_0^\top = 1$, где 1 означает единичную (2×2) -матрицу. Поэтому в соответствии с (15) приходим к равенству

$$R_0I_0 = 1 + K_0 \quad (17)$$

с оператором K_0 , действующим по формуле $K_0\varphi = B_0K(B_0^\top\varphi)$; в явном виде

$$(K_0\varphi)(y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{b_0(y, y_0)}{|y - y_0|^2} \varphi(y) d_2y, \quad y_0 \in \Gamma,$$

с (2×2) -матрицей-функцией

$$b_0(y_0, y) = \frac{1}{|y - y_0|^{-1}} \begin{pmatrix} n(y)(y - y_0) & 0 \\ n(y_0)[n(y), y - y_0] & n(y_0)(y - y_0) \end{pmatrix}.$$

Для ляпуновской поверхности функция $b_0(y, y_0)$ удовлетворяет условию Гельдера по обоим переменным и обращается в нуль при $y = y_0$, так что интеграл здесь существует в обычном смысле. В действительности этот факт можно уточнить (см. [7]).

Лемма 1. *Если поверхность Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$, то оператор $I_0 : C^\mu(\Gamma) \rightarrow C^\mu(\overline{D})$ ограничен, а оператор K_0 компактен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$.*

Согласно этой лемме и теореме Рисса оператор $1 + K_0$ фредгольмов в пространстве $C^\mu(\Gamma)$ и его индекс равен нулю. Поэтому из теорем 1, 3, соотношения (17) и общих свойств фредгольмовых операторов следует, что операторы R_0 и I_0 фредгольмовы и их индексы

$$\text{ind } R_0 = -\text{ind } I_0 = m - s. \quad (18)$$

В действительности аналогично теореме 3 ядро и образ оператора I_0 можно описать явно. Предварительно введем специальную гармоническую функцию w_s в области D'_s , которая принимает постоянное значение 1 на границе Γ_s и ведет себя как $w_s(x) = O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Она строится следующим образом. Не ограничивая общности, можно считать, что точка $x = 0$ принадлежит D . Тогда инверсия $x \rightarrow x^* = x/|x|^2$ переводит область D'_s в ограниченную область D_0 , содержащую эту точку. Пусть гармоническая в D_0 функция $u_0 \in C^{1,\nu}(\overline{D}_0)$ решает задачу Дирихле $u_0(y) = |y|^{-1}$, $y \in \partial D_0$. Очевидно, она определяется единственным образом, причем в силу принципа максимума $c = u_0(0) > 0$. Поэтому функция w_s , определяемая равенством $w_s(x) = |x|^{-1}u_0(x^*)$, удовлетворяет всем требованиям.

Заметим, что производные по касательным направлениям к поверхности Γ_s от функции w_s равны нулю, так что вектор $a = (\text{grad } w_s^+)(y)$ параллелен вектору нормали $n(y)$ в точке $y \in \Gamma_s$ и, следовательно, $a = (an)n$. Поэтому

$$\text{grad } w_s^- = \left(\frac{\partial w_s^-}{\partial n} \right) n. \quad (19)$$

Теорема 4.

- (а) Ядро $\ker I_0 = \{\varphi, I_0\varphi = 0\}$ состоит из функций $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, для которых φ_1 постоянна на Γ_j , $1 \leq j \leq s-1$, и обращается в нуль на Γ_s , а $\varphi_2 = 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_s$ и $\varphi_2 = \lambda(\partial w_s/\partial n)$ на Γ_s с некоторым $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (б) Пространство $C^\mu(\Gamma)$ решений (1) раскладывается в прямую сумму образа $\text{Im } I_0$ этого оператора и ядра U_0 оператора R_0 . В частности, любое решение $u \in C^\mu(\overline{D})$ системы (1) единственным образом представимо в виде

$$u = I_0\varphi + u_0, \quad u_0 \in U_0, \quad (20)$$

с вектор-функцией $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, удовлетворяющей условиям

$$\int_{\Gamma_i} \varphi_1(y) d_2y = 0, \quad 1 \leq i \leq s-1; \quad \int_{\Gamma_s} \varphi_2 \frac{\partial w_s^-}{\partial n} d_2y = 0. \quad (21)$$

Доказательство. (а) Обозначим для краткости через $X(\Gamma)$ класс скалярных функций, постоянных на Γ_j , $1 \leq j \leq s-1$, и равных нулю на Γ_s , и пусть $X(D')$ имеет аналогичный класс по отношению к D'_j . Обозначим далее через $\tilde{X}(\Gamma)$ класс скалярных функций φ , обращающихся в нуль на $\Gamma \setminus \Gamma_s$ и равных $\lambda(\partial w_s / \partial n)$ на Γ_s с некоторой постоянной $\lambda = \lambda(\varphi) \in \mathbb{R}$. Наконец, пусть класс $\tilde{X}(D')$ состоит из вектор-функций $\tilde{u}$, обращающихся в нуль на $D' \setminus D'_s$ и равных $\lambda = \lambda(\tilde{u}) \operatorname{grad} w_s$ на D'_s с некоторой постоянной λ .

Важно заметить, что в силу (19) операция $\tilde{u} \rightarrow n\tilde{u}^-$ осуществляет изоморфизм классов $\tilde{X}(D')$ на $\tilde{X}(\Gamma)$ в следующем смысле. Если $\tilde{u} \in \tilde{X}(D')$, то $\varphi = n\tilde{u}^+ \in \tilde{X}(\Gamma)$ и $\lambda(\varphi) = \lambda(\tilde{u})$. Обратно, если $\varphi \in \tilde{X}(\Gamma)$, то функция $\tilde{u} \in \tilde{X}(D')$ с $\lambda(\tilde{u}) = \lambda(\varphi)$, удовлетворяет условию $n\tilde{u}^+ = \varphi$.

Наряду с I_0 аналогично (15) введем соответствующий оператор $(I'_0\varphi)(x)$, $x \in D'$. Пусть $\varphi \in \ker I_0$, т.е. функция $I_0\varphi = I(B_0^\top \varphi)$ равна нулю в области D . Рассмотрим в D' функцию

$$u(x) = -(I'_0\varphi)(x), \quad x \in D', \quad (22)$$

для которой согласно (15) ее граничное значение $u^- = B_0^\top \varphi$.

Краевое условие (4) на $\Gamma_{(k)}$ можем записать в форме $C_{(k)}v^+ = 0$ с матрицей

$$C_{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & p_{(k)1} & p_{(k)2} & p_{(k)3} \\ 0 & q_{(k)1} & q_{(k)2} & q_{(k)3} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $C_{(k)}B_0^\top = 0$, функция u удовлетворяет однородному краевому условию

$$(C_{(k)}u^-)(y) = 0, \quad y \in \Gamma_{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (23)$$

На основании теоремы о гладкости заключаем, что $u \in C^{1,\mu}(\overline{D'_j})$, $1 \leq j \leq s$. С учетом (23) совершенно аналогично доказательству теоремы 3(b) убеждаемся, что нормальная производная $\partial u_1^- / \partial n = 0$ на Γ . Поэтому в конечных областях D'_j , $1 \leq j \leq s-1$, эта функция постоянна. Согласно (22) функция u_1 исчезает на бесконечности, так что из тех же соображений $u_1 = 0$ в D'_s . Таким образом, в принятых обозначениях $u_1 \in X(D')$.

В результате система Моисила—Теодореску переходит в (12) для вектора $\tilde{u}$, так что его можно представить в виде градиента $\operatorname{grad} w$ некоторой многозначной гармонической функции w , частные производные которой однозначны. В силу краевого условия (23) ее частные производные по касательным направлениям на Γ равны нулю, так что функция w^- постоянна на каждой поверхности Γ_j . В частности, w постоянна в областях D'_j , $1 \leq j \leq s-1$. Согласно (22) в области D'_s функция $\tilde{u}$ ведет себя как $O(|x|^{-2})$ на бесконечности и, следовательно, $w(x) = O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$. Поэтому $w = \lambda w_s$ с некоторой постоянной λ .

Итак, в принятых обозначениях $\tilde{u} \in \tilde{X}(D')$. Вспоминая, что $u^- = B_0^\top \varphi$, т.е. $u_1^- \varphi_1$ и $\tilde{u}^- = n\varphi_2$, отсюда $\varphi_1 \in X(\Gamma)$ и $\varphi_2 \in \tilde{X}(\Gamma)$.

Обратно, пусть $\varphi_1 \in X(\Gamma)$ и $\varphi_2 \in \tilde{X}(\Gamma)$. Тогда с учетом (19) вектор $B_0^\top \varphi$ является граничным значением u^- решения u системы (1), для которого $u_1 \in X(D')$ и $\tilde{u} \in \tilde{X}(D')$. Поэтому в областях D'_j можно воспользоваться аналогом теоремы Коши и в результате получить равенство $(Iu^-)(x) = 0$, $x \in D$. Поскольку $u^- = B_0^\top \varphi$, отсюда $I(B_0^\top \varphi) = I_0\varphi = 0$.

(б) В силу (18) и утверждения (а) коразмерность образа $\operatorname{Im} I_0$ оператора I_0 равна m . По теореме 3(а) размерность пространства U_0 также равна m . Поэтому для завершения доказательства достаточно убедиться, что

$$(\operatorname{Im} I_0) \cap U_0 = \{0\}. \quad (24)$$

Пусть $I_0\varphi \in U_0$, где в силу (а) не ограничивая общности можно считать, что φ удовлетворяет условиям (21). Тогда на основании (16) и теоремы 3(а)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{n(y)(y-x)}{|y-x|^3} \varphi_1(y) d_2 y = 0, \quad x \in D, \quad (25)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{y-x}{|y-x|^3} \varphi_2(y) d_2 y + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{[n(y), y-x]}{|y-x|^3} \varphi_1(y) d_2 y = \operatorname{grad} w(x), \quad x \in D, \quad (26)$$

с некоторой гармонической функцией $w \in W(D)$.

Первый интеграл здесь представляет собой обобщенный потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа. Очевидно, для $\varphi_1 \in X(\Gamma)$ это равенство всегда справедливо. Рассматривая задачу Неймана для уравнения Лапласа в областях D'_j , обычным образом устанавливается, что и обратно, равенство (25) влечет $\varphi_1 \in X(\Gamma)$. По предположению φ_1 удовлетворяет условиям (21), так что в действительности $\varphi_1 = 0$. Но тогда (26) переходит в

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_2(y) d_2 y}{|y-x|} - w(x) \right] = 0, \quad x \in D, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Поэтому функция $w \in W(D)$ однозначна и, следовательно, постоянна. Таким образом, потенциал простого слоя

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_2(y) d_2 y}{|y-x|} - w(x) = c, \quad x \in D, \quad (27)$$

с некоторой постоянной c .

Рассмотрим в D' гармоническую функцию u , равную нулю в $D' \setminus D'_s$ и cw_s в D'_s . На основании формулы Грина, примененной к функциям $u(y)$ и $|y-x|^{-1}$ переменной $y \in D'$, получим:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial u^-}{\partial n} \frac{d_2 y}{|y-x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{n(y)(y-x)}{|y-x|^3} u^-(y) d_2 y.$$

Поскольку $u^-(y) = 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_s$ и $u^-(y) = c$ на Γ_s , интеграл в правой части этого равенства равен c . Совместно с (27) отсюда следует, что потенциал простого слоя с плотностью $\psi = \varphi_2 - \partial u^- / \partial n$ равен нулю в области D , что возможно только когда $\psi = 0$. Следовательно, $\varphi_2 = 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_s$ и $u^-(y) = c \partial w_s^- / \partial n$ на Γ_s . На основании последнего условия (21) отсюда $c = 0$, что завершает доказательство (24) и теоремы. $\square$

Для полноты изложения приведем доказательство свойств потенциалов простого и двойного слоя, использованные выше. Обозначим эти потенциалы в краткой операторной форме

$$(J_0 \psi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\psi(y) d_2 y}{|y-x|}, \quad (J_1 \psi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{n(y)(y-x)}{|y-x|^3} \psi(y) d_2 y, \quad x \in D.$$

со скалярной плотностью φ . Из курса математической физики хорошо известно, что если Γ является ляпуновской поверхностью и функция φ удовлетворяет условию Гельдера, то существуют предельные значения гармонической функции $J_1 \varphi$ и нормальной производной функции $J_0 \varphi$, определяемые равенствами

$$(J_1 \varphi)^+ = \varphi + K \varphi, \quad \frac{\partial (J_0 \varphi)^+}{\partial n} = \varphi - K^* \varphi. \quad (28)$$

Интегральные операторы здесь действуют по формулам

$$(K \varphi)(y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{k(y_0, y)}{|y-y_0|^2} \varphi(y) d_2 y, \quad (K^* \varphi)(y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{k^*(y_0, y)}{|y-y_0|^2} \varphi(y) d_2 y,$$

с функциями $k(y_0, y) = |y-y_0|^{-1} n(y)(y-y_0)$ и $k^*(y_0, y) = k(y, y_0)$. Эти функции удовлетворяют условию Гельдера на $\Gamma \times \Gamma$ и обращаются в нуль при $y = y_0$.

Аналогичные соотношения справедливы и для соответствующих потенциалов на D' , обозначения которых как и выше снабжаем штрихом:

$$(J'_1 \varphi)^- = -\varphi + K \varphi, \quad \frac{\partial (J'_0 \varphi)^-}{\partial n} = -\varphi - K^* \varphi. \quad (29)$$

Аналог леммы 1 справедлив и для этих операторов, т.е. предположении $\Gamma \in C^{1,\nu}$ операторы J_0 и J_1 ограничены, соответственно, $C^\mu(\Gamma) \rightarrow C^{1,\mu}(\overline{D})$ и $C^\mu(\Gamma) \rightarrow C^\mu(\overline{D})$, а операторы K_1 и K_1^* компактны в $C^\mu(\Gamma)$. Кроме того, из формул Грина, примененных к гармоническим функциям в областях D и D'_j , $1 \leq j \leq s$, вытекает следующее предложение. Пусть функция u задана и

гармонична в областях D и D'_j , принадлежит классу $C^{1,\mu}$ в замыкании эти областей, и исчезает на ∞ . Тогда

$$u(x) = 2 \begin{cases} (J_0\varphi_1 - J_1\varphi_0)(x), & x \in D, \\ (J'_0\varphi_0 - J'_1\varphi_1)(x), & x \in D', \end{cases} \quad (30)$$

с плотностями

$$\varphi_0 = u^+ - u^-, \quad \varphi_1 = \frac{\partial u^+}{\partial n} - \frac{\partial u^-}{\partial n}.$$

Стоит отметить, что граничные значения функций $J_0\varphi$ и $J'_0\varphi$ совпадают на Γ . Поэтому с учетом единственности решения задачи Дирихле для гармонических функций из соотношений (30) следует, что операторы J_0 и J'_0 взаимно однозначны, т.е.

$$\ker J_0 = \ker J'_0 = 0. \quad (31)$$

Утверждается, что

$$X(\Gamma) \subseteq \ker J_1 = \ker(1 + K_1), \quad J'_0[\ker(1 + K_1^*)] = X(D'). \quad (32)$$

В самом деле, из формулы (30), примененной к кусочно постоянным функциям u , равным нулю на $D \cup D'_s$, следует, что $X \subseteq \ker J_1$. Равенство $\ker J_1 = \ker(1 + K_1)$ непосредственно следует из (28) и единственности решения задачи Дирихле.

В силу (28) равенство $\psi + K_1^*\psi = 0$ равносильно тому, что нормальная производная функции $u^1 = J'_0\psi$ обращается в нуль на Γ . С учетом того, что $u^1 = J'_0\psi$ исчезает на ∞ отсюда заключаем, что $u^1 \in X(D')$. Класс функций u^1 этого типа обозначим Y , так что оператор J'_0 действует $\ker(1 + K_1^*) \rightarrow X(D')$. Обратно, если $u^1 \in X(D')$ и функция $u \in C^{1,\mu}(\overline{D})$ есть решение задачи Дирихле с правой частью $(u^1)^-$, то на основании (29) имеем равенство $u^1 = J'_0\psi$ с функцией $\psi = -\partial u^- / \partial n$.

Из (31), (32) следует, что

$$s - 1 = \dim [\ker(1 + K_1^*)] \leq \dim [\ker(1 + K_1)].$$

Но по теореме Рисса $\ker(1 + K_1) = \ker(1 + K_1^*)$, так что первое включение в (32) в действительности является точным равенством:

$$\ker J_1 = X(\Gamma).$$

Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы, позволяют легко решить вопрос о представлении гармонических функций потенциалом двойного слоя, который обычно обходится в курсах математической физики.

Пусть функции $\psi_1, \dots, \psi_{s-1}$ образуют базис $\ker(1 + K_1^*)$. Тогда согласно альтернативе Фредгольма разрешимость уравнения $\varphi + K^1\varphi = f$ или, что равносильно, представимость решения $u \in C^\mu(\overline{D})$ задачи Дирихле с правой частью f потенциалом $J_1\varphi$, равносильны выполнению условий ортогональности

$$\int_{\Gamma} f(y)\psi_j(y) = 0, \quad 1 \leq j \leq s-1.$$

Пусть система функций $f_1, \dots, f_{s-1}$ биортогональна к $\psi_1, \dots, \psi_{s-1}$ и гармонические функции $u_j \in C^\mu(\overline{D})$ решают задачу Дирихле $u^+ = f_j$. Тогда любая гармоническая функция $u \in C^\mu(\overline{D})$ единственным образом представима в виде

$$u = J_1\varphi + \sum_{j=1}^{s-1} \xi_j u_j, \quad \xi_j \in \mathbb{R},$$

где функция $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma_i} \varphi(y) d_2 y = 0, \quad 1 \leq i \leq s-1.$$

Конечно, в случае, когда поверхность Γ связна, второе слагаемое в этом представлении отсутствует и условия на φ можно опустить, т.е. оператор J_1 в этом случае обратим.

Закключение. Как известно, задача Шварца для классической системы Коши—Римана в плоской области заключается в определении ее решения по заданной первой компоненте этого решения на границе области. В работе изучен аналог этой задачи для системы Моисила—Теодореску в трехмерной области. Таким образом, аналогия между этими решениями распространяется не только на качественные свойства этих систем, но и на краевые задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения// Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 3. — С. 389–392.
2. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. — М.: Наука, 1966.
3. Ботт Р., Ту Л. В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. — М.: Наука, 1989.
4. Полушин В. А., Солдатов А. П. Задача Римана—Гильберта для системы Моисила—Теодореску в конечной области// в кн.: Неклассические уравнения математической физики. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010. — С. 192–201.
5. Полушин В. А., Солдатов А. П. О сопряженной задаче Римана—Гильберта для системы Моисила—Теодореску// Науч. вед. Белгород. ун-та. — 2011. — 5, № 22. — С. 106–111.
6. Полушин В. А., Солдатов А. П. Трехмерный аналог интеграла типа Коши// Диффер. уравн. — 2011. — 47, № 5. — С. 366–375.
7. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи// Совр. мат. Фундам. напр. — 2017. — 63. — С. 1–189.
8. Хатчер А. Алгебраическая топология. — М.: Изд-во МЦНМО, 2011.
9. Grigor'ev Yu. Quaternionic functions and their applications in a viscous fluid flow// Complex Anal. Oper. Theory. — 2018. — 12. — С. 491–508.
10. Grigor'ev Yu., Gürlebeck K., Legatiuk D. Quaternionic formulation of a Cauchy problem for the Lamé equation// AIP Conf. Proc. — 2017. — 280007.
11. Gürlebeck K., Habetha K., Sprossig W. Holomorphic Functions in the Plane and n -dimensional Space. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2008.
12. Moisil G. C., Theodorescu N. Fonction holomorphe dans l'espace// Bul. Soc. St. Cluj. — 1931. — 6. — С. 177–194.
13. Moisil G. C., Theodorescu N. Fonctions holomorphes dans l'espace// Math. Cluj. — 1931. — 5. — С. 142–159.
14. Stein E. M., Weiss G. Generalization of the Cauchy–Riemann equation and representations of the rotation group// Am. J. Math. — 1968. — 90. — С. 163–196.
15. Shapiro M., Vasilevski N. Quaternionic Ψ -hyperholomorphic functions, singular integral operators, and boundary-value problems, I. Ψ -Hyperholomorphic function theory// Compl. Var. Ellipt. Equ. — 1995. — 27, № 1. — С. 17–46.
16. Shapiro M., Vasilevski N. Quaternionic Ψ -hyperholomorphic functions, singular integral operators, and boundary-value problems, II. Algebras of singular integral operators and Riemann-type boundary-value problems// Compl. Var. Ellipt. Equ. — 1995. — 27, № 1. — С. 67–96.

Солдатов Александр Павлович

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына,

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление», Москва

E-mail: soldatov@bsu.edu.ru