Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Федоров, А. А. Абдрахманова, Начальная задача для уравнений распределенного порядка с ограниченным оператором, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 188, 14–22

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-188-14-22>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 11:35:50

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 14–22
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-14-22

УДК 517.9

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА С ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

© 2020 г. В. Е. ФЕДОРОВ, А. А. АБДРАХМАНОВА

Аннотация. Методами теории преобразования Лапласа доказана теорема о существовании единственного решения начальной задачи для дифференциального уравнения распределенного порядка с дробной производной Римана—Лиувилля и с ограниченным оператором при искомой функции, рассматриваемого в банаховом пространстве. Найден вид этого решения, задаваемый интегралами типа Данфорда—Тейлора. Полученные результаты вносят вклад в развитие теории разрешающих семейств операторов уравнений в банаховых пространствах, включая дифференциальные уравнения дробного порядка, эволюционные интегральные уравнения, и, в частности, обобщают некоторые результаты теории полугрупп операторов на случай уравнений распределенного порядка. Абстрактные результаты для уравнения в банаховом пространстве использованы при исследовании одного класса начально-краевых задач для уравнений в частных производных распределенного порядка по времени с многочленами от самосопряженного эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора.

Ключевые слова: уравнение распределенного порядка, дробная производная Римана—Лиувилля, преобразование Лапласа, начальная задача, начально-краевая задача.

INITIAL-VALUE PROBLEM FOR DISTRIBUTED-ORDER EQUATIONS WITH A BOUNDED OPERATOR

© 2020 V. E. FEDOROV, A. A. ABDRAKHMANOVA

ABSTRACT. Using methods of the theory of the Laplace transform, we prove a theorem on the existence of a unique solution to an initial-value problem for a distributed-order differential equation in a Banach space, which involves a fractional Riemann—Liouville derivative and a bounded operator acting on the unknown function. We find this solution in the form of Dunford—Taylor-type integrals. The results obtained contribute to the theory of resolving operator families for equations in Banach spaces, including fractional-order differential equations and evolutionary integral equations; in particular, we generalize some results of the theory of semigroups of operators to the case of equations of distributed order. Abstract results for equations in Banach spaces are applied to a class of initial-boundary-value problems for distributed-order partial differential equations with polynomials in a self-adjoint elliptic differential operator with respect to the spatial variables.

Keywords and phrases: distributed-order equation, fractional Riemann—Liouville derivative, Laplace transform, initial-value problem, initial-boundary-value problem.

AMS Subject Classification: 34K30, 35R11, 34G10

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (постановление № 211 от 16.03.2013, соглашение № 02.A03.21.0011), Министерства образования и науки РФ (задание № 1.6462.2017/БЧ) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-41-450001).

1. Введение. В последние два-три десятилетия интерес исследователей стали вызывать дифференциальные уравнения распределенного порядка, в которых содержится интеграл по порядку дробной производной. Насколько известно авторам, первыми работами, посвященными таким уравнениям, стали работы А. М. Нахушева (см. [1] и др.). Изначально такие уравнения встречались в основном в работах, посвященных моделированию некоторых реальных процессов: в теории вязкоупругости (см. [14]), в кинетической теории (см. [16]), в других прикладных задачах (см. [5, 7, 8, 11]). В то же время уравнения распределенного порядка все чаще становятся объектом исследования в чисто математических работах. Помимо работ А. М. Нахушева отметим в этом смысле работы А. В. Псху [2], С. Умарова и Р. Горенфлю [18], С. Пилиповича с соавторами [4], А. Н. Кочубея [12] и др. Отметим работы [3, 9], в которых исследовались вопросы однозначной разрешимости задачи Коши $z^{(k)}(0) = z_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения распределенного порядка

$$\int_a^b \omega(\alpha) {}^C D_t^\alpha z(t) d\alpha = Az(t) + g(t), \quad t \in [0, T),$$

с производной Герасимова—Капуто ${}^C D_t^\alpha$ и с линейным ограниченным в банаховом пространстве $\mathfrak{Z}$ оператором A в правой части уравнения, где $m-1 < b \leq m \in \mathbb{N}$, $a < b$, $T > 0$, $g \in C([0, T]; \mathfrak{Z})$. Доказана теорема об однозначной разрешимости этой задачи и найдено решение в операторном виде с использованием контурных интегралов типа Данфорда—Тейлора. Полученные результаты использованы при исследовании начальных задач для уравнений в банаховых пространствах с вырожденным линейным оператором при производной распределенного порядка, а также при изучении одного класса начально-краевых задач для уравнений в частных производных распределенного порядка по времени.

В настоящей работе аналогичным образом исследуется уравнение распределенного порядка

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha = Az(t) + g(t), \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

с производной Римана—Лиувилля D_t^α . Здесь также A является линейным ограниченным оператором в банаховом пространстве $\mathfrak{Z}$, $a \leq 0 \leq m-1 < b \leq m \in \mathbb{N}$, $T > 0$, $g \in C([0, T]; \mathfrak{Z})$. Показано, что естественной начальной задачей для такого уравнения является задача вида

$$\int_k^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-k-1} z(0) d\alpha = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2)$$

Методами теории преобразования Лапласа доказана теорема о существовании единственного решения задачи (1), (2), найден вид этого решения. Полученные результаты вносят вклад в развитие теории разрешающих семейств операторов уравнений в банаховых пространствах, включая уравнения дробного порядка (см. [6]), эволюционные интегральные уравнения (см. [13, 15]), и, в частности, обобщают некоторые результаты теории полугрупп операторов (см. [10]) на случай уравнений распределенного порядка. Абстрактные результаты для задачи (1), (2) использованы при исследовании одного класса начально-краевых задач для уравнений в частных производных распределенного порядка по времени с многочленами от самосопряженного эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора.

2. Начальная задача для уравнения в банаховом пространстве. Введем следующие обозначения: $g_\delta(t) := t^{\delta-1}/\Gamma(\delta)$ при $\delta > 0$, $t > 0$, J_t^0 — тождественный оператор,

$$J_t^\delta h(t) := (g_\delta * h)(t) := \int_0^t g_\delta(t-s)h(s)ds,$$

где $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D_t^m — обычная производная порядка m , D_t^α — дробная производная Римана—Лиувилля, т.е. $D_t^\alpha h(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha} h(t)$, кроме того, по определению $D_t^{-\alpha} h(t) := J_t^\alpha h(t)$.

Пусть $\mathfrak{Z}$ — банахово пространство. Преобразование Лапласа функции $h : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathfrak{Z}$ будем обозначать символом $\mathfrak{L}[h]$. Известно, что при $\alpha > 0$

$$\mathfrak{L}[J_t^\alpha h](\lambda) = \lambda^{-\alpha} \mathfrak{L}[h](\lambda), \quad \mathfrak{L}[D_t^\alpha h](\lambda) = \lambda^\alpha \mathfrak{L}[h](\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k D_t^{\alpha-k-1} h(0). \quad (3)$$

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{Z}$. При $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ рассмотрим начальную задачу

$$\int_k^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-k-1} z(0) d\alpha = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4)$$

для уравнения распределенного порядка

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha = Az(t) + g(t), \quad t \in (0, T), \quad (5)$$

где $-\infty < a \leq 0 \leq m-1 < b \leq m \in \mathbb{N}$, $\omega : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$. Под решением задачи (4), (5) будем понимать функцию $z \in C((0, T); \mathfrak{Z})$, для которой существует

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha \in C((0, T); \mathfrak{Z})$$

и выполняются равенства (4) и (5).

Замечание 2.1. Понятно, что если уравнение (5) имеет нижний предел в интеграле $a > 0$, то оно может быть сведено к рассматриваемому случаю $a \leq 0$ доопределением нулем функции ω на соответствующем промежутке.

Введем также обозначение

$$\gamma := \bigcup_{k=1}^3 \gamma_k,$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_0, \arg \lambda \in (-\pi, \pi)\}, \quad \gamma_2 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pi, \lambda \in [-r_0, -\infty)\}, \\ \gamma_3 &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -r_0]\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(\lambda) &:= \int_a^b \omega(\alpha) \lambda^\alpha d\alpha, \quad W_c^d(\lambda) := \int_c^d \omega(\alpha) \lambda^\alpha d\alpha, \\ Z_k(t) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^k (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Через $\text{Lap}(\mathfrak{Z})$ будем обозначать линейное пространство функций $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{Z}$, для которых определено преобразование Лапласа $\mathfrak{L}[z]$.

Теорема 2.1. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $\omega \in L_1(a, b)$, при некотором $\beta > 1$ функции $W(\lambda)$, $W_a^k(\lambda)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, аналитичны на множестве $S_\beta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \beta, \arg \lambda \in (-\pi, \pi)\}$ и удовлетворяют условиям

$$\exists C_1 > 0 \quad \exists \delta \in (0, b - m + 1) \quad \forall \lambda \in S_\beta \quad |W(\lambda)| \geq C_1 |\lambda|^{m-1+\delta}, \quad (6)$$

$$\exists C_2 > 0 \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, m-1\} \quad \forall \lambda \in S_\beta \quad |W_a^k(\lambda)| |W(\lambda)|^{-1} \leq C_2 |\lambda|^{k-m+1-\delta}, \quad (7)$$

$$r_0 = \max \left\{ \beta, (2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}/C_1)^{1/(m-1+\delta)} \right\}, \quad z_k \in \mathfrak{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad g \in C([0, T]; \mathfrak{Z}).$$

Тогда функция

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t) z_k + \int_0^t Z_0(t-s) g(s) ds$$

является единственным решением задачи (4), (5) в пространстве $\text{Lap}(\mathfrak{Z})$.

Доказательство. Для $\lambda \in \gamma$ при заданном в условиях теоремы r_0 выполняется неравенство $|W(\lambda)| \geq 2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}$, поэтому существует обратный оператор $(W(\lambda)I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, при этом

$$\left\| \lambda^k (W(\lambda)I - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \leq \frac{|\lambda|^{m-1}}{|W(\lambda)| \left(1 - \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}}{|W(\lambda)|} \right)} \leq \frac{2}{C_1 |\lambda|^\delta}. \quad (8)$$

Таким образом, при $t > 0$ интегралы $Z_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, сходятся.

Пусть $R > r_0$,

$$\Gamma_R = \bigcup_{k=1}^4 \Gamma_{k,R}, \quad \Gamma_{1,R} = \gamma_1, \quad \Gamma_{2,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = R, \arg \lambda \in (-\pi, \pi)\},$$

$$\Gamma_{3,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pi, \lambda \in [-r_0, -R]\}, \quad \Gamma_{4,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = -\pi, \lambda \in [-R, -r_0]\}.$$

Получаем ориентированный в отрицательном направлении замкнутый контур Γ_R . Определим также контуры

$$\Gamma_{5,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pi, \lambda \in (-R, -\infty)\}, \quad \Gamma_{6,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -R)\};$$

тогда $\gamma = \Gamma_{5,R} \cup \Gamma_{6,R} \cup \Gamma_R \setminus \Gamma_{2,R}$.

В силу (8) имеем

$$\|Z_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \leq \frac{1}{C_1 \pi} \int_{\gamma} \frac{e^{t \operatorname{Re} \lambda}}{|\lambda|^\delta} ds \leq K e^{r_0 t} t^{\delta-1}, \quad t > 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (9)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1} \frac{e^{t \operatorname{Re} \lambda}}{|\lambda|^\delta} ds &\leq \frac{e^{r_0 t}}{\pi r_0^{\delta-1}} \int_0^{2\pi} e^{r_0 t (\cos \varphi - 1)} d\varphi \leq 2e^{r_0 t} r_0^{1-\delta}, \quad t \geq 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_l} \frac{e^{t \operatorname{Re} \lambda}}{|\lambda|^\delta} ds &\leq \frac{t^{\delta-1}}{\pi} \int_{-\infty}^{-tr_0} \frac{e^x}{|x|^\delta} dx \leq \frac{t^{\delta-1} \Gamma(1-\delta)}{\pi}, \quad l = 2, 3, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Поэтому $Z_k \in \text{Lap}(\mathfrak{Z})$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

При условии $\operatorname{Re} \mu > r_0$ получим равенства

$$\mathfrak{L}[Z_k](\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\lambda^k}{\mu - \lambda} (W(\lambda)I - A)^{-1} d\lambda.$$

Согласно (6) эти интегралы сходятся и

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{s,R}} \frac{\lambda^k}{\mu - \lambda} (W(\lambda)I - A)^{-1} d\lambda = 0, \quad s = 2, 5, 6.$$

Следовательно, по интегральной формуле Коши с учетом отрицательной ориентации контура Γ_R

$$\mathfrak{L}[Z_k](\mu) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\lambda^k}{\mu - \lambda} (W(\lambda)I - A)^{-1} d\lambda = \mu^k (W(\mu)I - A)^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Поэтому для $c < b$

$$\mathfrak{L} \left[\int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m} Z_k(t) d\alpha \right] (\mu) = \int_c^b \omega(\alpha) \mu^{\alpha-m+k} (W(\mu)I - A)^{-1} d\alpha = \mu^{k-m} W_c^b(\mu) (W(\mu)I - A)^{-1}$$

и $\mathfrak{L}[Z_k]$ аналитически продолжимы на множество $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > r_0, \arg \mu \in (-\pi, \pi)\}$,

$$\int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m} Z_k(t) d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{k-m} W_c^b(\lambda) (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda.$$

Имеем при $b > 1, k = 0, 1, \dots, m-2, \lambda \in \gamma$

$$\left\| \lambda^{k-m} W_c^b(\lambda) (W(\lambda)I - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(3)} \leq \frac{C}{|\lambda|^2}, \quad (10)$$

поэтому

$$\int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m} Z_k(0) d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_R} + \int_{\Gamma_{5,R}} + \int_{\Gamma_{6,R}} - \int_{\Gamma_{2,R}} \right) \lambda^{k-m} W_c^b(\lambda) (W(\lambda)I - A)^{-1} d\lambda = 0,$$

так как интеграл по Γ_R равен нулю по теореме Коши, а остальные интегралы стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$ в силу (10). Аналогично при $k = m-1$ получим

$$\begin{aligned} \int_{m-1}^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m} Z_{m-1}(t) e^{\lambda t} d\alpha &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{W_{m-1}^b(\lambda)}{\lambda} (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1 - \frac{W_a^{m-1}(\lambda)}{W(\lambda)}}{\lambda} e^{\lambda t} d\lambda \cdot I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{W_{m-1}^b(\lambda)}{\lambda W(\lambda)} \sum_{k=1}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k e^{\lambda t} d\lambda = \\ &= I - \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_R} + \int_{\Gamma_{5,R}} + \int_{\Gamma_{6,R}} - \int_{\Gamma_{2,R}} \right) \left(\frac{W_a^{m-1}(\lambda)}{\lambda W(\lambda)} e^{\lambda t} \cdot I - \frac{1 - \frac{W_a^{m-1}(\lambda)}{W(\lambda)}}{\lambda W(\lambda)} A \sum_{k=0}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k e^{\lambda t} \right) d\lambda \rightarrow I \end{aligned}$$

при $t \rightarrow 0+$. При этом используется оценка

$$\left\| \frac{W_a^{m-1}(\lambda)}{\lambda W(\lambda)} \cdot I - \frac{1 - \frac{W_a^{m-1}(\lambda)}{W(\lambda)}}{\lambda W(\lambda)} A \sum_{k=0}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k \right\|_{\mathcal{L}(3)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1+\delta}}$$

на S_β , справедливая в силу (6), (7). Теперь

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} \left[\int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m+1} Z_k(t) d\alpha \right] (\mu) &= \mu^{k-m+1} W_c^b(\mu) (W(\mu)I - A)^{-1} - \int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m+1} Z_k(0) d\alpha, \\ \int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m+1} Z_k(t) d\alpha &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{k-m+1} W_c^b(\lambda) (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda. \end{aligned}$$

При $b > 2$

$$\int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m+1} Z_k(0) d\alpha = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-3, \quad \int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m+1} Z_{m-2}(0) d\alpha = I,$$

$$\begin{aligned} \int_{m-2}^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m+1} Z_{m-1}(t) d\alpha &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} W_{m-2}^b(\lambda) (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\lambda t} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} W_a^{m-2}(\lambda) (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda. \end{aligned}$$

Первый из полученных двух интегралов равен нулю по теореме Коши, а второй — стремится к нулю при $t \rightarrow 0+$ в силу неравенства (7).

Рассуждая, как выше, получим

$$\int_l^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-l-1} Z_k(0) d\alpha = 0, \quad l > 0, \quad k = 0, 1, \dots, l-1, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \int_l^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-l-1} Z_l(t) e^{\lambda t} d\alpha = I.$$

При $k = l+1, l+2, \dots, m-1$ имеем

$$\int_l^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-l-1} Z_k(t) d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{k-l-1} e^{\lambda t} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{k-l-1} W_a^l(\lambda) (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow 0+$. Согласно формуле (3) для преобразования Лапласа имеем для $k = 0, 1, \dots, m-1$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} \left[\int_a^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha} Z_k(t) z_k d\alpha \right] (\mu) &= \\ &= \mu^k W(\mu) (W(\mu)I - A)^{-1} z_k - \sum_{l=0}^{m-1} \mu^l \int_l^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-l-1} Z_k(0) z_k d\alpha = \\ &= \mu^k A (W(\mu)I - A)^{-1} z_k = \mathfrak{L}[AZ_k(t)z_k](\mu). \end{aligned}$$

Поддействуем обратным преобразованием Лапласа на обе части полученного равенства; тогда

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha} Z_k(t) z_k d\alpha = AZ_k(t)z_k$$

во всех точках непрерывности функции $Z_k(\cdot)z_k$, т.е. при всех $t > 0$. Таким образом, функция

$$\sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k$$

является решением задачи (4) для однородного ($g \equiv 0$) уравнения (5).

Введем обозначение

$$z_g(t) := \int_0^t Z_0(t-s)g(s)ds,$$

в силу неравенства (9) этот интеграл сходится. Определим $g(t) = 0$ при $t \notin [0, T]$; тогда мы имеем свертку $z_g = Z_0 * g$, при этом

$$\mathfrak{L}[z_g] = \mathfrak{L}[Z_0]\mathfrak{L}[g], \quad \|\mathfrak{L}[g](\mu)\|_3 \leq C \int_0^T e^{-\mu t} dt \leq \frac{C}{\mu}.$$

Понятно, что при $\alpha \in (a, b)$

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-m} z_g](\mu) = \mu^{\alpha-m} (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu), \quad \left\| \mu^{\alpha-m} (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu) \right\|_3 \leq C |\mu|^{-m-\delta},$$

поэтому $D_t^{\alpha-m} z_g(0) = 0$, а значит, и

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-m+1} z_g](\mu) = \mu^{\alpha-m+1} (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu).$$

Продолжая эти рассуждения и учитывая, что

$$\left\| \mu^{\alpha-l-1} (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu) \right\|_3 \leq C |\mu|^{-1-\delta},$$

получим

$$D_t^{\alpha-l-1} z_g(0) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, m-1,$$

так что

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-l} z_g](\mu) = \mu^{\alpha-l} (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu), \quad l = 0, 1, \dots, m.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{L} \left[\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z_g d\alpha \right] (\mu) = W(\mu) (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu) = \mathfrak{L}[g](\mu) + A (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu).$$

Действуя обратным преобразованием Лапласа на обе части этого равенства, получим

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z_g(t) d\alpha = g(t) + A(Z_0 * g)(t) = g(t) + Az_g(t)$$

в силу непрерывности оператора A . Поэтому z_g — решение неоднородного уравнения (4) с нулевыми данными в условиях (5).

Если предположить, что существуют два решения z_1, z_2 задачи (4), (5) из класса $\text{Lap}(\mathfrak{Z})$, то их разность $y = z_1 - z_2 \in \text{Lap}(\mathfrak{Z})$ является решением уравнения

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha y(t) d\alpha = Ay(t)$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$\int_k^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-k-1} y(0) d\alpha = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям этого уравнения, получим равенство

$$W(\lambda) \mathfrak{L}[y](\lambda) = A \mathfrak{L}[y](\lambda).$$

Поэтому при $\lambda \in S_\beta$ имеем $\mathfrak{L}[y](\lambda) \equiv 0$. Отсюда $y \equiv 0$. $\square$

Замечание 2.2. Можно показать, что, например, функция $\omega \in C([a, b]; \mathbb{R})$, для которой $\omega(b) \neq 0$, удовлетворяет условиям (6), (7) (см. [9]).

3. Приложение к начально-краевым задачам. Пусть заданы многочлены

$$P_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i, \quad Q_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n d_i \lambda^i,$$

$c_i, d_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $c_n \neq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, пучок операторов $\Lambda, B_1, B_2, \dots, B_r$ регулярно эллиптичен (см. [17]), где

$$\begin{aligned} (\Lambda u)(s) &= \sum_{|q| \leq 2r} a_q(s) \frac{\partial^{|q|} u(s)}{\partial^{q_1} s_1 \partial^{q_2} s_2 \dots \partial^{q_d} s_d}, \quad a_q \in C^\infty(\bar{\Omega}), \\ (B_l u)(s) &= \sum_{|q| \leq r_l} b_{lq}(s) \frac{\partial^{|q|} u(s)}{\partial^{q_1} s_1 \partial^{q_2} s_2 \dots \partial^{q_d} s_d}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1, 2, \dots, r, \end{aligned}$$

$q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Определим оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{Cl}(L_2(\Omega))$ с областью определения $D_{\Lambda_1} = H_{\{B_l\}}^{2r}(\Omega)$ равенством $\Lambda_1 u = \Lambda u$ (см. [17]). Предположим, что Λ_1 — самосопряженный оператор с ограниченным справа спектром. Тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ действительный, дискретный, конечнократный и сгущается только на $-\infty$. Пусть $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$; обозначим через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ систему ортонормированных в смысле $L_2(\Omega)$ собственных функций оператора Λ_1 , занумерованных по неубыванию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\int_t^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-l-1} v(s, 0) = v_l(s), \quad l = 0, 1, \dots, m-1, \quad s \in \Omega, \quad (11)$$

$$B_l \Lambda^k v(s, t) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (12)$$

$$\int_a^b D_t^\alpha P_n(\Lambda) v(s, t) d\alpha = Q_n(\Lambda) v(s, t) + f(s, t), \quad (s, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (13)$$

где $a \leq 0 \leq m-1 < b \leq m \in \mathbb{N}$, $\omega : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \Omega \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$.

Пусть $P_n(\lambda_k) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$; тогда положим

$$\mathfrak{Z} = \left\{ u \in H^{2rn}(\Omega) : B_l \Lambda^k u(s) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad s \in \partial\Omega \right\},$$

$$L = P_n(\Lambda), \quad M = Q_n(\Lambda), \quad A = L^{-1}M, \quad g(t) = L^{-1}f(\cdot, t), \quad z_l = v_l(\cdot), \quad l = 0, 1, \dots, m-1.$$

Тогда $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, задача (11)–(13) представима в виде (4), (5) и по теореме 2.1 получим следующий результат.

Теорема 3.1. Пусть спектр $\sigma(\Lambda_1)$ не содержит корней многочлена $P_n(\lambda)$. Тогда существует единственное решение задачи (11)–(13) в пространстве $\text{Lap}(\mathfrak{Z})$.

Доказательство. Осталось заметить, что в данном случае $\omega \equiv 1$,

$$W(\lambda) = \frac{\lambda^b - \lambda^a}{\ln \lambda}, \quad W_a^k(\lambda) = \frac{\lambda^k - \lambda^a}{\ln \lambda}$$

удовлетворяют условиям теоремы 2.1 и условиям (6), (7). $\square$

Пусть $a = -1$, $b = 3/2$, $n = 2$, $P_2(\lambda) = c_0^2 + \lambda^2$, $Q_1(\lambda) = d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2$, $\Lambda u = \Delta u$, $r = 1$, $B_1 = I$, $f \equiv 0$. Тогда задача (11)–(13) имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^{3/2} D_t^{\alpha-1} v(s, 0) = v_0(s), \quad \int_1^{3/2} D_t^{\alpha-2} v(s, 0) = v_1(s), \quad s \in \Omega, \\ v(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \int_{-1}^{3/2} D_t^\alpha (c_0^2 + \Delta^2) v(s, t) d\alpha = (d_0 + d_1\Delta + d_2\Delta^2) v(s, t), \quad (s, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев А. М. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования, весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Диффер. уравн. — 1998. — 34, № 1. — С. 103–112.
2. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
3. Стрелецкая Е. М., Федоров В. Е., Дебуш А. Задача Коши для уравнения распределенного порядка в банаховом пространстве // Мат. заметки СВФУ. — 2018. — 25, № 1. — С. 63–72.
4. Atanacković T. M., Oprić L., Pilipović S. On a nonlinear distributed order fractional differential equation // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — 328. — P. 590–608.

5. *Bagley R. L., Torvik P. J.* On the existence of the order domain and the solution of distributed order equations. Part 2// *Int. J. Appl. Math.* — 2000. — 2, № 8. — P. 965–987.
6. *Bajlekova E. G.* Fractional Evolution Equations in Banach Spaces/ Ph.D. thesis. — Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2001.
7. *Caputo M.* Mean fractional order derivatives. Differential equations and filters// *Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII. Sci. Mat.* — 1995. — 41. — P. 73–84.
8. *Diethelm K., Ford N. J.* Numerical solution methods for distributed order time fractional diffusion equation// *Fract. Calc. Appl. Anal.* — 2001. — 4. — P. 531–542.
9. *Fedorov V. E., Streletskaia E. M.* Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces// *Electron. J. Differ. Equ.* — 2018. — 2018, № 176. — P. 1–17.
10. *Hille E., Phillips R. S.* Functional Analysis and Semigroups. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1957.
11. *Jiao Z., Chen Y., Podlubny I.* Distributed-order dynamic system// in: *Stability, Simulations, Applications and Perspectives.* — London: Springer-Verlag, 2012.
12. *Kochubei A. N.* Distributed-order calculus and equations of ultraslow diffusion// *J. Math. Anal. Appl.* — 2008. — 340. — P. 252–280.
13. *Kostić M.* Abstract Volterra Integro-Differential Equations. — Boca Raton: CRC Press, 2015.
14. *Lorenzo C. F., Hartley T. T.* Variable order and distributed-order fractional operators// *Nonlin. Dyn.* — 2002. — 29. — P. 57–98.
15. *Prüss J.* Evolutionary Integral Equations and Applications. — Basel: Springer-Verlag, 1993.
16. *Sokolov I. M., Chechkin A. V., Klafter J.* Distributed-order fractional kinetics// *Acta Phys. Pol. B.* — 2004. — 35. — P. 1323–1341.
17. *Triebel H.* Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators. — Berlin, 1977.
18. *Umarov S., Gorenflo R.* Cauchy and nonlocal multi-point problems for distributed order pseudo-differential equations// *Z. Anal. Anw.* — 2005. — 24. — P. 449–466.

Федоров Владимир Евгеньевич

Челябинский государственный университет;

Южно-Уральский государственный университет

(национальный исследовательский университет), Челябинск

E-mail: kar@csu.ru

Абдрахманова Алия Айдаровна

Челябинский государственный университет

E-mail: urazaeva_anna@mail.ru