Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Пятков, О некоторых классах обратных задач об определении функции источников для систем тепломассопереноса, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 188, 23–42

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-188-23-42>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 11:38:18

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 23–42
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-23-42

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ СИСТЕМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

© 2020 г. С. Г. ПЯТКОВ

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева задачи определения функции источников в системе тепломассопереноса, состоящей из системы Навье—Стокса, параболического уравнения для температуры и параболической системы для концентраций переносимых веществ. В качестве условия переопределения берутся интегралы от решения с весом по пространственной области. Доказана локальная (по времени) теорема существования решения задачи в нелинейном случае и получены оценки устойчивости, для линеаризованной системы получена глобальная теорема существования.

Ключевые слова: система тепломассопереноса, обратная задача, интегральное переопределение, существование, единственность, начально-краевая задача.

ON SOME CLASSES OF INVERSE PROBLEMS ON DETERMINING SOURCE FUNCTIONS FOR HEAT AND MASS TRANSFER SYSTEMS

© 2020 S. G. PYATKOV

ABSTRACT. In this paper, we consider the question on the well-posedness in Sobolev spaces of the problem of determining the source function in a heat and mass transfer system consisting of the Navier–Stokes system, a parabolic equation for temperature, and a parabolic system for the concentrations of substances being transferred. Weighted integrals solution over the spatial domain serve as overdetermination conditions. A local (in time) existence theorem for the solution of the problem in the nonlinear case is proved and stability estimates are obtained; for a linearized system, a global existence theorem is obtained.

Keywords and phrases: heat and mass transfer system, inverse problem, integral overdetermination, existence, uniqueness, initial-boundary-value problem.

AMS Subject Classification: 35R30, 35K51, 35Q35, 80A20, 80A23

1. Введение. Рассматривается система

$$u_t - \nu \Delta u + (u, \nabla)u + \nabla p = f + \beta_c C + \beta_\theta \Theta, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (1)$$

$$\Theta_t - \lambda_\theta \Delta \Theta + (u, \nabla)\Theta = f_\theta, \quad (2)$$

$$C_t + (u, \nabla)C - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} C_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i C_{x_i} + a_0 C = f_c, \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Ханты-Мансийского автономного округа—Югры (проект № 18-41-860003 p_урал_a).

где $\nu = \text{const} > 0$, $(x, t) \in Q = G \times (0, T)$ ($G \subset \mathbb{R}^n$, $T < \infty$), u , Θ , p , C , f_c суть вектор скорости, температура жидкости, давление, вектор концентраций примесей (органических или неорганических) в жидкости и объемная плотность источников примесей, соответственно. Здесь a_{ij} , a_i , a_0 — матрицы размерности $(h \times h)$, где h — это количество примесей, β_C — матрица размерности $(n \times h)$, β_Θ — вектор-функция длины n , $\lambda_\Theta > 0$ — скалярная функция. Описание таких моделей имеется, например, в [8], где на основе термодинамики необратимых процессов выведена система дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса в самом общем виде. В частности, там рассматриваются и системы, где система Навье—Стокса заменена более общей системой. Система (1)–(3) описывает распространение примесей в жидкости. В частности, в класс систем (1)–(3) входит классическая модель Обербека—Буссинеска (см. [9, 20, 38, 44]). Функции f_θ и f являются плотностями источников тепла и внешних сил соответственно, а коэффициент λ_θ есть коэффициент теплопроводности. В модели Обербека—Буссинеска β_c и β_θ суть коэффициенты переноса массы и тепла, умноженные на ускорение свободного падения. Здесь считаем, что β_c — произвольная матрица-функция размерности $(n \times h)$ и β_θ — вектор-функция длины n .

Система (1)–(3) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u|_S = 0, \quad \Gamma = \partial G, \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad (4)$$

$$\Theta|_{t=0} = \Theta_0, \quad B_1\Theta|_S = g_2(t, x), \quad C|_{t=0} = C_0, \quad B_2C|_S = g_3(t, x), \quad (5)$$

где

$$B_1u = u \quad \text{или} \quad B_1u = \sum_{i=1}^n \gamma_{1i}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma_1(x, t)u,$$

γ_{1i} , σ_1 — некоторые функции,

$$B_2u = u \quad \text{или} \quad B_2u = \sum_{i=1}^n \gamma_{2i}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma_2(x, t)u,$$

γ_{2i} , σ_2 — некоторые матрицы-функции размерности $(h \times h)$ и $S = (0, T) \times \Gamma$. Таким образом, мы рассматриваем одно из классических граничных условий Дирихле, Неймана, Робена или условие с косой производной. Правая часть в (3) имеет вид

$$f_c = f_0(x, t) + \sum_{i=1}^s f_i(x, t)q_i(t), \quad (x, t) \in Q, \quad (6)$$

где f_i ($i = 0, 1, \dots, m$) — известные функции. Числовые функции $q_i(t)$ в данном представлении неизвестны и находятся с использованием условий переопределения:

$$\int_G (C, \varphi_i(x)) dx = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (7)$$

где скобки обозначают скалярное произведение в $\mathbb{R}^h$, $\varphi_i(x)$ — вектор-функции длины h , $\psi_i(t)$ — некоторые функции.

Обратные задачи такого типа возникают в химии, биологии и других областях при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации. Описание некоторых численных методов решения краевых задач для системы (1)–(3) можно найти в [9]. Отметим работу [1], где для системы (1)–(3) рассмотрено большое количество обратных и экстремальных задач в стационарном случае. Подобные модели, в упрощённой постановке, рассматривались в [23–48]. Отметим, что в реальных моделях, используемых в региональных системах поддержки принятия решений, даже в одномерном случае используется несколько уравнений относительно различных примесей в жидкости. В них учитываются такие параметры воды, как фитопланктон, эпифитон и различные химические составляющие (различные подходы к построению таких моделей и библиография описаны в [24]). Вопросы корректности обратных задач для параболических уравнений и систем с условиями переопределения вида (7) (включая численные методы) рассматривались во многих работах. По-видимому, одной из первых работ где

рассматривался вопрос об определении правой части вида $f = q(t)g(x, t) + f_0(x, t)$ в параболическом уравнении (неизвестной функцией является функция $q(t)$) была работа [10]. В качестве основных пространств рассматривались пространства Гельдера. Далее, вопрос об определении правой части такого вида по интегральным условиям рассматривался в [4, 22, 28, 35, 37]. Вопросы определения того или иного коэффициента, зависящего от времени, в параболическом уравнении по интегральным условиям переопределения был рассмотрен, например, в [3, 5, 40, 41, 43, 46] и многих других. Выделим книгу [42], где в случае $n = 1$, был исследован ряд коэффициентных обратных задач (см., например, [42, теорема 4.114]). Стоит отметить, что работ, посвященных многомерным обратным задачам в более или менее общих постановках, мало. Можно отметить книгу [50], где рассматривались задачи такого типа и имеется обширная библиография. Опишем ряд результатов из этой книги. Была рассмотрена задача с условиями переопределения вида (7) в задаче определения функции источника вида $f(t)g(x, t)$ в модельном параболическом уравнении второго порядка (см. [50, § 1.5]). Та же задача была рассмотрена отдельно для системы Навье—Стокса (см. [50, § 4.4]) и ее аналог для операторно-дифференциального уравнения первого порядка вида

$$u_t - A(t)u = \Phi(t)p(t) + F(t),$$

где $A(t)$ — оператор, вообще говоря, с постоянной областью определения, являющийся генератором аналитической полугруппы или полугруппы класса C_0 (см. [50, § 6.2, 6.6]). Был рассмотрен и случай, когда неизвестная функция $p(t)$ входит в правую часть нелинейно а сама задача является квазилинейной. Задача в аналогичной постановке была рассмотрена и в работе автора [13], в случае когда область определения $A(t)$ может зависеть от времени и условия гладкости на этот оператор минимальны. Среди последних работ выделим результаты работ [11–51], где задачи вида (1)–(7) рассмотрены для параболических систем уравнений, как в случае определения функции источника, так и в случае коэффициентных обратных задач. Среди монографий, посвященных обратным задачам для параболических и эллиптических уравнений и систем, можно отметить монографии [2, 21, 39, 47, 49, 50], в которых можно найти постановки и ряд результатов. Обратные задачи для системы (1)–(3) с данными переопределения на пространственных многообразиях или в отдельных точках были рассмотрены в [6, 52]. Данная работа является дополнением к уже полученным в указанных работах результатам. Мы приведем теоремы существования и единственности и оценки устойчивости решений, как в нелинейной, так и в линеаризованной постановке.

2. Обозначения и вспомогательные утверждения. Пусть E — банахово пространство. Обозначим через $L_p(G; E)$ (G область $\mathbb{R}^n$) пространство сильно измеримых функций, определенных на G со значениями в E и конечной нормой $\| \|u(x)\|_E \|_{L_p(G)}$ (см., например, [54, §1.18.4]). Также используются пространства $C^k(\overline{G}; E)$ состоящие из функций, обладающих всеми производными до k включительно, непрерывных и ограниченных в G , имеющих непрерывное продолжение на $\overline{G}$. Пространства Соболева $W_p^k(G; E)$, $W_p^k(Q; E)$ определены стандартным образом (см. [18, 19, 25, 54]). Если $E = \mathbb{C}$ или $E = \mathbb{C}^n$, то используется обозначение $W_p^k(G)$, или $C^k(\overline{G})$. Принадлежность $u \in W_p^k(G)$ (или $u \in C^k(\overline{G})$) для заданной вектор-функции $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ означает, что каждая компонента u_i принадлежит $W_p^k(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). Норма в соответствующем пространстве — сумма норм координат, если не указано противное. Аналогичное соглашение примем для матриц: принадлежность $a \in W_p^k(G)$ ($a = \{a_{ij}\}_{j,i=1}^k$) означает, что $a_{ij}(x) \in W_p^k(G)$ для всех i, j . Для заданного интервала $J = (0, T)$ положим

$$W_p^{k,r}(Q) = W_p^r(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^k(G)), \quad W_p^{k,r}(S) = W_p^r(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^k(\Gamma)).$$

Обозначим через $L_{p,\sigma}(G)$ замыкание соленоидальных C_0^∞ -вектор-функций по норме $L_p(G)$ и положим

$$W_{p,\sigma}^k(G) = W_p^k(G) \cap L_{p,\sigma}(G), \quad W_{p,\sigma}^{k,k/2}(Q) = W_p^{k,k/2}(Q) \cap L_p(0, T; L_{p,\sigma}(G)), \quad k \geq 0.$$

Символ $\mathring{W}_q^k(G)$ обозначает замыкание $C_0^\infty(G)$ по норме пространства $W_q^k(G)$ и

$$\mathring{W}_q^1(G) = \{p \in L_{q,loc}(G) : \nabla p \in L_q(G)\}.$$

Мы отождествляем функции, отличающиеся на константу, и вводим в этом пространстве норму $\|p\|_{\mathring{W}_q^1(G)} = \|\nabla p\|_{L_q(G)}$; это пространство является банаховым. Символы $(A, B)_{\theta, q}$ и $[A, B]_\theta$ для заданных банаховых пространств A, B обозначают пространства, полученные при помощи вещественного и комплексного интерполяционных методов (см. [54]). Символ ∂_{x_k} обозначает частную производную $\partial/\partial x_k$.

Определение границы класса C^s стандартное (см., например, [7, гл. 1, § 1, п. 3]). В дальнейшем используем обозначения $Q^\tau = G \times (0, \tau)$, $S^\tau = \Gamma \times (0, \tau)$.

Лемма 1. Пусть $u \in W_q^{2,1}(Q^\tau)$, $q \in (1, \infty)$, $u(x, 0) = 0$. Тогда существует такая константа $c > 0$, не зависящая от u , что

$$\|u\|_{L_q(Q^\tau)} \leq c\tau \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)}, \quad \|\nabla u\|_{L_q(Q^\tau)} \leq c\tau^{1/2} \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)}.$$

Утверждение является следствием формулы Ньютона—Лейбница и интерполяционного неравенства

$$\|\nabla u\|_{L_q(G)} \leq c \|u\|_{W_q^2(G)}^{1/2} \|u\|_{L_q(G)}^{1/2}.$$

Следующая лемма является следствием леммы 1 и [7, гл. 2, лемма 3.3], где $\delta = \sqrt{\tau}$.

Лемма 2. Пусть $u \in W_q^{2,1}(Q^\tau)$. Тогда

$$\begin{aligned} u &\in L_p(Q^\tau), \quad \text{где} \quad 2 - l \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) (n+2) \geq 0, \quad p \geq q, \\ \nabla u &\in L_p(Q^\tau), \quad \text{где} \quad 1 - l \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) (n+2) \geq 0, \quad p \geq q. \end{aligned}$$

Более того,

$$\begin{aligned} u &\in C^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q^\tau}) \quad \text{для} \quad q > \frac{n+2}{\lambda}, \\ \nabla u &\in C^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q^\tau}) \quad \text{для} \quad q > n+2, \end{aligned}$$

где $\lambda \in [0, 2 - (n+2)/q]$ в первом случае и $\lambda \in [0, 1 - (n+2)/q]$ в последнем. Справедливы следующие оценки для соответствующих значений параметров:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_p(Q^\tau)} &\leq c\tau^{\beta_1} \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)}, \quad \|\nabla u\|_{L_p(Q^\tau)} \leq c\tau^{\beta_1-1/2} \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)}, \\ \|u\|_{C^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q^\tau})} &\leq c\tau^{\beta_2} \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)}, \quad \|\nabla u\|_{C^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q^\tau})} \leq c\tau^{\beta_2-1/2} \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)}, \end{aligned}$$

где

$$\beta_1 = 1 - \frac{(n+2)}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right), \quad \beta_2 = 1 - \frac{(n+2)}{2q} - \frac{\lambda}{2},$$

константа c не зависит от $\tau \leq T$ и $u \in W_q^{2,1}(Q^\tau)$.

Лемма 3. Пусть $b \in L_p(Q)$. Тогда для любого $\tau \in (0, T]$ имеют место следующие неравенства: если $q > (n+2)/2$ и $p \geq q$, то

$$\|bu\|_{L_q(Q^\tau)} \leq c\tau^{1-(n+2)/(2p)} \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)};$$

если $q > n+2$ и $p \geq q$, то

$$\|b\nabla u\|_{L_q(Q^\tau)} \leq c\tau^{1/2-(n+2)/(2p)} \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)}.$$

Константа $c > 0$ не зависит от $\tau \leq T$ и $u \in W_q^{2,1}(Q^\tau)$.

Доказательство данной леммы можно найти в доказательстве теоремы 9.1 в [7, гл. 4].

Теорема 1. Для каждой функции $f \in L_r(Q)$, $r \in (1, \infty)$, существуют единственная вектор-функция $u \in W_{r,\sigma}^{2,1}(Q) \cap L_r(0, T; \dot{W}_r^1(G))$ и функция $p \in L_r(0, \tau; \dot{W}_r^1(G))$, являющиеся решением задачи

$$u_t - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u|_S = 0, \quad u|_{t=0} = 0,$$

и удовлетворяющие неравенству

$$\|u\|_{W_{r,\sigma}^{2,1}(Q)} + \|\nabla p\|_{L_r(Q)} \leq c \|f\|_{L_r(Q)},$$

где постоянная c не зависит от f .

Следствие 1. Для каждой функции $f \in L_r(Q^\tau)$, $\tau \in (0, T]$, существуют единственная вектор-функция $u \in W_{r,\sigma}^{2,1}(Q^\tau) \cap L_r(0, \tau; \dot{W}_r^1(G))$ и функция $p \in L_r(0, \tau; \dot{W}_r^1(G))$, являющиеся решением задачи

$$u_t - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u|_S = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad (8)$$

и удовлетворяющие неравенству

$$\|u\|_{W_{r,\sigma}^{2,1}(Q^\tau)} + \|\nabla p\|_{L_r(Q^\tau)} \leq c \|f\|_{L_r(Q^\tau)},$$

где постоянная c не зависит от f и τ .

Теорема 1 вытекает из [53, теорема 1.1]; также можно сослаться на [31, теорема 1.2] и свойства проектора Гельмгольца.

В случае, когда G — ограниченная область, теорема 1 справедлива для любого r . При определенных условиях на r теорему можно установить и для более широкого класса областей, в частности, для бесконечного цилиндра (см. [29]), для полупространств (см. [26]), для целого пространства и ограниченных областей с границей класса $C^{1,1}$ (см. [31]), для плоского слоя и асимптотически плоского слоя (см. [15, 16]) и для некоторых других классов неограниченных областей (см. [17, 32, 33]). Теорема 1 является основной теоремой, используемой ниже.

Следующий результат — теорема о разрешимости параболических задач. Рассмотрим задачу

$$u_t - Lu = f, \quad Bu|_S = u_0, \quad u(x, 0) = g(x, t), \quad (9)$$

где

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^n a_i(x, t) u_{x_i} - a_0(x, t) u,$$

$Bu = u$ или

$$Bu = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(x, t) u,$$

где γ_i, σ — некоторые матрицы-функции размерности $h \times h$ и $S = (0, T) \times \Gamma$; a_{ij}, a_i, a_0 — матрицы размера $h \times h$. Предположим, что выполнены условия параболичности и Лопатинского.

Условие параболичности. Пусть

$$A_0(t, x, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Предположим, что найдется такая постоянная $\delta_1 > 0$, что все корни p полинома $\det(A_0(t, x, i\xi) + pE) = 0$ (здесь E — единичная матрица) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} p \leq -\delta_1 |\xi|^2 \quad (10)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и всех $(x, t) \in Q$.

Пусть $B_0 u = u$ в случае условий Дирихле в (2) и $B_0 u = \sum_{j=1}^n \gamma_j \partial_{x_j} u$ в противном случае.

Условие Лопатинского (см. условие (LS) в [27, с. 198]). Для любой точки $(t_0, x_0) \in S$, таких векторов $\xi \in \mathbb{R}^n$, что $(\xi, \nu(x_0)) = 0$ (здесь $\nu(x)$ — внешняя единичная нормаль к Γ в точке x), всех $h \in \mathbb{C}^h$ и таких λ , что $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ и $|\xi| + |\lambda| \neq 0$, система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\lambda E + A_0(x_0, t_0, \xi + i\nu(x_0)\partial_y))v(z) = 0, \quad B_0(x_0, t_0, \xi + i\nu(x_0)\partial_y)v(0) = h \quad (11)$$

имеет единственное убывающее на бесконечности решение класса $C([0, \infty))$.

Считаем, что

$$a_{ij} \in C(\overline{Q}), \quad a_i \in L_q(Q), \quad a_0 \in L_q(Q), \quad i, j = 1 \dots n, \quad (12)$$

$$\gamma_j, \sigma \in C^{1/2-1/2p+\varepsilon_0, 1-1/p+\varepsilon_0}(\overline{S}), \quad j = 1, \dots, n,$$

для некоторого $\varepsilon_0 > 0$,

$$u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \quad g(x, t) \in W_p^{s_0, 2s_0}(S), \quad B(x, 0, D)u_0|_\Gamma = g(x, 0), \quad (13)$$

где $s_0 = 1 - 1/2p$ в случае задачи Дирихле и $s_0 = 1/2 - 1/2p$ в случае оставшихся краевых условий.

Теорема 2. Пусть $\partial G \in C^2$, $q > n + 2$, $\gamma \in (0, T]$ и условия параболичности и Лопатинского, а также (12), (13) выполнены. Тогда для каждого $f \in L_q(Q)$ существует единственное решение $u \in W_q^{2,1}(Q^\gamma)$ задачи (9), удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq c(\|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)}),$$

где постоянная c не зависит от f , u_0 , g .

Теорема является следствием [7, гл. 7, теорема 10.4] (см. также [14] или [27, теорема 2.1]).

Теорема 3. Пусть $\partial G \in C^2$, $q > n + 2$, $u_0 = 0$, $g = 0$, $\gamma \in (0, T]$ и условия параболичности, Лопатинского и (12) выполнены. Тогда для каждого $f \in L_q(Q)$ существует единственное решение $u \in W_q^{2,1}(Q^\gamma)$ задачи (9), удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} \leq c\|f\|_{L_q(Q)},$$

где константа c не зависит от $\gamma \in (0, T)$.

Данная теорема — очевидное следствие теоремы 2. Мы применяем теорему 2, где берем нулевые начальные и граничные данные и правую часть $f_\gamma = f(x, t)$ при $t \in (0, \gamma)$ и $f_\gamma = 0$ при $t \in (\gamma, T)$.

3. Формулировка основных результатов.

Всюду ниже считаем, что $q > n + 2$. Условие согласования и гладкости могут быть записаны в следующей форме:

$$u_0 \in W_q^{2-2/q}(G), \quad \operatorname{div} u_0 = 0, \quad u_0|_\Gamma = 0; \quad (14)$$

$$C_0(x) \in W_q^{2-2/q}(G), \quad g_3(x, t) \in W_q^{s_0, 2s_0}(S), \quad B_2(x, 0, D)C_0|_\Gamma = g_3(x, 0); \quad (15)$$

$$\Theta_0(x) \in W_q^{2-2/q}(G), \quad g_2(x, t) \in W_q^{1-1/2q, 2-1/q}(S), \quad B_1(x, 0, D)\Theta_0|_\Gamma = g_2(x, 0); \quad (16)$$

$$f, f_\theta, f_0 \in L_q(Q); \quad (17)$$

$$\psi_i(t) \in W_q^1(0, T), \quad \psi_i(0) = \int_{G_i} C_0(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, s; \quad (18)$$

$$a_i(t, x) \in L_q(Q), i = 0, 1, \dots, n; \quad a_{ij} \in C([0, T]; C^{\varepsilon_0}(\overline{G})), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (19)$$

$$\gamma_{ij}, \sigma \in C^{1/2-1/2p+\varepsilon_0, 1-1/p+\varepsilon_0}(\overline{S}), \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — некоторая положительная постоянная;

$$f_i(x, t) \in L_\infty(0, T; L_q(G)), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (21)$$

Пусть $\{G_j\}$ — набор областей с границей класса C^1 , вложенных в G . Предположим, что

$$\varphi_j \in W_r^{\varepsilon_1}(G), \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (22)$$

для некоторого $\varepsilon_1 > 0$.

Определим элементы $b_{ij}(t)$ матрицы B равенством

$$b_{ij} = \int_G (f_j, \varphi_i(x)) dx.$$

Полагаем, что существует такая постоянная $\delta_0 > 0$, что

$$|\det B| \geq \delta_0 > 0 \quad \text{п.в. на } (0, T). \quad (23)$$

Также будем считать, что найдется такая постоянная $\delta_1 > 0$, что

$$\lambda_\theta(x, t) \geq \delta_1 > 0, \quad (x, t) \in Q, \quad \lambda_\theta \in C(\overline{Q}); \quad \beta_c, \beta_\theta \in L_q(Q). \quad (24)$$

Введем множество B_R данных $\mathbf{U} = (u_0, C_0, \Theta_0, g_2, g_3, f, f_0, f_\theta, \psi_1, \dots, \psi_s)$, удовлетворяющих условиям (14)–(18) и неравенству

$$\begin{aligned} & \|u_0\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|C_0\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|\Theta_0\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|g_2\|_{W_q^{1-1/2q, 2-1/q}(S)} + \\ & + \|g_3\|_{W_q^{s_0, 2s_0}(S)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f_\theta\|_{L_q(Q)} + \|f_0\|_{L_q(Q)} + \sum_{i=1}^s \|\psi_i\|_{W_q^1(0, T)} \leq R, \end{aligned}$$

где функция Φ_1 удовлетворяет условиям (14).

Теорема 4. Пусть $\Gamma \in C^2$, $p > n+2$, и выполнены условия (19)–(24). Фиксируем $R_0 > 0$. Тогда существует такое число $\tau_0 = \tau_0(R_0) \in (0, T]$, что для каждого набора данных $\mathbf{U}$ из множества B_{R_0} существует единственное решение $(u, p, \Theta, C, q_1, \dots, q_m)$ задачи (1)–(7) из класса

$$u \in W_q^{2,1}(Q^{\tau_0}), \quad p \in L_q(0, \tau_0; \dot{W}_q^1(G)), \quad q_j \in L_q(Q_0^{\tau_0}), \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

и найдется такая постоянная $c = c(R_0)$, что для любых двух решений $u^i, \Theta^i, C^i, q^i, q^i = (q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{im})$, $i = 1, 2$, из этого класса, отвечающих наборам

$$\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \in B_{R_0}, \quad \mathbf{U}_i = (u_0^i, C_0^i, \Theta_0^i, g_2^i, g_3^i, f^i, f_0^i, f_\theta^i, \psi_1^i, \dots, \psi_s^i), \quad i = 1, 2,$$

справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|u^1 - u^2\|_{W_q^{2,1}(Q^{\tau_0})} + \|\Theta^1 - \Theta^2\|_{W_q^{2,1}(Q^{\tau_0})} + \|C^1 - C^2\|_{W_q^{2,1}(Q^{\tau_0})} + \sum_{j=1}^s \|q_{1j} - q_{2j}\|_{L_q(0, \tau_0)} \leq \\ & \leq c \left(\|u_0^1 - u_0^2\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|f^1 - f^2\|_{L_q(Q^{\tau_0})} + \|f_\theta^1 - f_\theta^2\|_{L_q(Q^{\tau_0})} + \|f_0^1 - f_0^2\|_{L_q(Q^{\tau_0})} + \right. \\ & + \|C_0^1 - C_0^2\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|\Theta_0^1 - \Theta_0^2\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|g_2^1 - g_2^2\|_{W_q^{1-1/2q, 2-1/q}(S^{\tau_0})} + \\ & \left. + \|g_3^1 - g_3^2\|_{W_q^{s_0, 2s_0}(S^{\tau_0})} + \sum_{i=1}^s \|\psi_i^1 - \psi_i^2\|_{W_q^1(0, \tau_0)} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим линеаризованную постановку. Рассматривается система уравнений

$$u_t - \nu \Delta u + \nabla p = \sum_{j=1}^n B_j u_{x_j} + B_0 u + f + \beta_C C + \beta_\theta \Theta, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (25)$$

$$\Theta_t - \lambda_\theta \Delta \Theta + \sum_{j=1}^n b_j \Theta_{x_j} + b_0 \Theta = f_\theta + \sum_{j=1}^n b^j u_j, \quad (26)$$

$$C_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} C_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^n a_j C_{x_j} + a_0 C = f_c + \sum_{j=1}^n a^j u_j. \quad (27)$$

Полагаем далее, что

$$B_0, b^j, b_0, a^j, B_j, b_j \in L_q(Q), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

Теорема 5. Пусть $\Gamma \in C^2$, $p > n+2$, выполнены условия (19)–(24), (28) и набор данных U удовлетворяет условиям (14)–(18). Тогда существует единственное решение $(u, p, \Theta, C, q_1, \dots, q_m)$ задачи (25)–(27), (4)–(7) из класса

$$u \in W_q^{2,1}(Q), \quad p \in L_q(0, T; \dot{W}_q^1(G)), \quad q_j \in L_q(Q), \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Решение удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} & \|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\Theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|C\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \sum_{j=1}^s \|q_j\|_{L_q(0,T)} \leq \\ & \leq c \left(\|u_0\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f_\theta\|_{L_q(Q)} + \|f_0\|_{L_q(Q)} + \|C_0\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|\Theta_0\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \right. \\ & \quad \left. \|g_2\|_{W_q^{1-1/2q, 2-1/q}(S)} + \|g_3\|_{W_q^{s_0, 2s_0}(S)} + \sum_{i=1}^s \|\psi_i^1 - \psi_i^2\|_{W_q^1(0,T)} \right). \end{aligned}$$

4. Доказательство основных результатов. Доказательство теоремы 4. Построим функции $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \in W_q^{2,1}(Q)$, удовлетворяющие начально-краевым условиям (4), (5), т.е.

$$\Phi_1|_{t=0} = u_0, \quad \Phi_2|_{t=0} = \Theta_0, \quad \Phi_3|_{t=0} = C_0, \quad \Phi_1|_S = 0, \quad \Phi_i|_S = g_i, \quad i = 2, 3.$$

Используя теоремы 1, 2, строим эти функции как решения соответствующих начально-краевых задач с нулевыми правыми частями. Сделаем замену $u = v + \Phi_1$, $\Theta = \Theta_1 + \Phi_2$, и $C = C_1 + \Phi_3$. Получим

$$\begin{aligned} L_{01}(v, p) &= v_t - \nu \Delta v + \nabla p = g + \beta_c C_1 + \beta_\theta \Theta_1 - (\Phi_1, \nabla)v - (v, \nabla)v - (v, \nabla)\Phi_1, \\ \operatorname{div} v &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$L_{02}\Theta_1 = \Theta_{1t} - \lambda_\theta \Delta \Theta_1 = g_\theta - (v, \nabla)\Theta_1 - (\Phi_1, \nabla)\Theta_1 - (v, \nabla)\Phi_2, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} L_{03}C_1 &= C_{1t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}C_{1x_i x_j} + \sum_{j=1}^n a_j C_{1x_j} + a_0 C_1 = \\ &= g_c - (v, \nabla)C_1 - (\Phi_1, \nabla)C_1 - (v, \nabla)\Phi_3 + \sum_{j=1}^m f_j q_j, \end{aligned} \quad (31)$$

где новая функция g_θ и вектор-функции g, g_c имеют вид

$$\begin{aligned} g &= f - \Phi_{1t} + \nu \Delta \Phi_1 - (\Phi_1, \nabla)\Phi_1 + \beta_c \Phi_3 + \beta_\theta \Phi_2, \\ g_\theta &= f_\theta - L_{02}\Phi_2 - (\Phi_1, \nabla)\Phi_2, \quad g_c = f_0 - L_{03}\Phi_3 - (\Phi_1, \nabla)\Phi_3. \end{aligned}$$

Новые функции v, θ_1 и вектор-функция C_1 удовлетворяют однородным краевым условиям (4), (5), (7), причем выполнены условия переопределения

$$\int_G (C_1, \varphi_j(x)) dx = \psi_j(t) - \int_G (\Phi_3, \varphi_j(x)) dx = \tilde{\psi}_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (32)$$

Мы свели задачу к эквивалентной задаче. Пусть $\gamma \in (0, T]$. Используя теоремы 1, 2, можем переписать уравнения (29), (30), (31) в следующей форме:

$$(v, p) = (L_{01})^{-1}g + (L_{01})^{-1}(\beta_c C_1 + \beta_\theta \Theta_1 - (\Phi_1, \nabla)v - (v, \nabla)v - (v, \nabla)\Phi_1), \quad (33)$$

$$\Theta_1 = (L_{02})^{-1}g_\theta - (L_{02})^{-1}\left((v, \nabla)\Theta_1 + (\Phi_1, \nabla)\Theta_1 + (v, \nabla)\Phi_2\right), \quad (34)$$

$$C_1 = (L_{03})^{-1}g_c + (L_{03})^{-1}\left(-(v, \nabla)C_1 - (\Phi_1, \nabla)C_1 - (v, \nabla)\Phi_3 + \sum_{j=1}^m f_j q_j\right). \quad (35)$$

Здесь оператор $(L_{01})^{-1}$ отображает элемент $g \in L_q(Q^\gamma)$ в пару (v, p) , являющуюся решением уравнения $L_{01}(v, p) = g$ и удовлетворяющую условиям

$$\operatorname{div} v = 0, \quad v \in W_q^{2,1}(Q^\gamma), \quad p \in L_q(0, \gamma; \dot{W}_q^1(G)),$$

где вектор-функция v удовлетворяет однородным начальным и краевым условиям. Операторы $(L_{0i})^{-1}$ ($i = 2, 3$) определяются аналогично с использованием теоремы 2. Пусть $(L_{01})^{-1}g = (v_0, p_0)$. Определим пространство H^γ , содержащее векторы (v, p, Θ, C) , где $v \in W_q^{2,1}(Q^\gamma)$ — соленоидальная вектор-функция длины n , удовлетворяющая однородным условиям (4), $C, \Theta \in W_q^{2,1}(Q^\gamma)$ — вектор длины h и скалярная функция, удовлетворяющие однородным условиям (5), p — скалярная функция из $L_q(0, \gamma; \dot{W}_q^1(G))$. Введем в этом пространстве норму

$$\|(v, p, \Theta, C)\|_{H^\gamma} = \|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + \|p\|_{L_q(0, \gamma; \dot{W}_q^1(G))} + \|\Theta\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + \|C\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Пусть $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s) \in B_\gamma = \{\mathbf{q} \in L_p(0, \gamma) : \|\mathbf{q}\|_{L_p(0, \gamma)} \leq R_0\}$. Параметр R_0 мы уточним ниже. Имеем очевидную оценку (см. теорему 3 и условия (21) на функции f_j)

$$\left\| (L_{03})^{-1} \sum_{j=1}^m f_j q_j \right\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \leq c_1 \left\| \sum_{j=1}^m f_j q_j \right\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq c_2 \|\mathbf{q}\|_{L_p(0, \gamma)} \leq c_2 R_0. \quad (36)$$

Положим

$$R = 3 \left(\|v_0, p_0, (L_{02})^{-1}g_\theta, (L_{03})^{-1}g_c\|_{H^\gamma} + c_2 R_0 \right).$$

Будем искать решение системы (33)–(35) при данном фиксированном $\mathbf{q} \in B_\gamma$:

$$\omega = A(\omega, \mathbf{q}), \quad \omega = (v, p, \Theta, C), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s), \quad (37)$$

где оператор A определен правой частью системы (33)–(35). Будем считать, что

$$\omega \in B_{R, \gamma} = \{\omega \in H^\gamma : \|\omega\|_{H^\gamma} \leq R\}.$$

Оценим $\|A(\omega, \mathbf{q})\|_{H^\gamma}$. Из теорем 1, 3, определения величины R и (36) имеем

$$\begin{aligned} \|A(\omega, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} &\leq \frac{R}{3} + c \left(\left\| \beta_c C_1 + \beta_\theta \Theta_1 - (\Phi_1, \nabla)v - (v, \nabla)v - (v, \nabla)\Phi_1 \right\|_{L_q(Q^\gamma)} + \right. \\ &\quad \left. + \left\| (v, \nabla)\Theta_1 + (\Phi_1, \nabla)\Theta_1 + (v, \nabla)\Phi_2 \right\|_{L_q(Q^\gamma)} + \left\| (v, \nabla)C_1 + (\Phi_1, \nabla)C_1 + (v, \nabla)\Phi_3 \right\|_{L_q(Q^\gamma)} \right). \end{aligned}$$

Оценим по отдельности каждое из слагаемых, используя лемму 2:

$$\|\beta_c C_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq \|\beta_c\|_{L_q(Q)} \|C_1\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \leq c_1 \gamma^{\beta_1} \|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично имеем

$$\|\beta_\theta \Theta_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq c_2 \gamma^{\beta_2} \|\Theta_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Оценим следующее слагаемое:

$$\|(\Phi_1, \nabla)v\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq \|\Phi_1\|_{L_q(Q^T)} \|\nabla v\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \leq c_3 \gamma^{\beta_3} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично получим

$$\|(\Phi_1, \nabla)\Theta_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq c_4 \gamma^{\beta_4} \|\Theta_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}, \quad \|(\Phi_1, \nabla)C_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq c_5 \gamma^{\beta_5} \|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Имеем

$$\|(v, \nabla)\Phi_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq \|\nabla \Phi_1\|_{L_q(Q^T)} \|v\|_{C(Q^\gamma)} \leq c_6 \gamma^{\beta_6} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Кроме того,

$$\|(v, \nabla)\Phi_2\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq c_7 \gamma^{\beta_7} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}, \quad \|(v, \nabla)\Phi_3\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq c_8 \gamma^{\beta_8} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Наконец,

$$\|(v, \nabla)v\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq \|\nabla v\|_{C(Q^\gamma)} \|v\|_{C(Q^\gamma)} \leq c_9(R) \gamma^{\beta_9} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)},$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\|(v, \nabla)\Theta_1\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_{10}(R)\gamma^{\beta_{10}}\|\Theta_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}, \\ \|(v, \nabla)C_1\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_{11}(R)\gamma^{\beta_{11}}\|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.\end{aligned}$$

Суммируя, получим

$$\|A(\omega, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq \frac{R}{3} + c_1(R)\gamma^{\beta_1}\|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + c_2(R)\gamma^{\beta_2}\|\Theta_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + c_3(R)\gamma^{\beta_3}\|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Так как $\gamma \in (0, T]$, то, выбрав $\beta = \min(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, имеем

$$\|A(\omega, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq \frac{R}{3} + c_0(R)\gamma^\beta\|\omega\|_{H^\gamma}, \quad (38)$$

где постоянная c_1 не зависит от R и β . Выберем такую константу $\gamma_0 \leq T$, что $c_0(R)\gamma^\beta \leq R/3$ для всех $\gamma \leq \gamma_0$. Тогда неравенство (38) можно переписать в виде

$$\|A(\omega, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq R \quad \forall \omega \in B_{R,\gamma}, \quad \mathbf{q} \in B_\gamma.$$

Это означает, что для каждого $\mathbf{q} \in B_\gamma$ оператор $A(\omega, \mathbf{q})$ переводит шар $B_{R,\gamma}$ в себя. Аналогично рассуждая, можем получить оценку для $\|A(\omega^1, \mathbf{q}) - A(\omega^2, \mathbf{q})\|_{H^\gamma}$, где $\omega^i = (v^i, p^i, \Theta^i, C^i)$, $i = 1, 2$. Имеем

$$\begin{aligned}\|A(\omega^1, \mathbf{q}) - A(\omega^2, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} &\leq c \left(\left\| \beta_c(C^1 - C^2) + \beta_\theta(\Theta^1 - \Theta^2) - (\Phi_1, \nabla)(v^1 - v^2) - (v^1, \nabla)v^1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (v^2, \nabla)v^2 - (v^1 - v^2, \nabla)\Phi_1 \right\|_{L_q(Q^\gamma)} + \right. \\ &\quad \left. + \left\| \left((v^1, \nabla)\Theta^1 - (v^2, \nabla)\Theta^2 \right) + (\Phi_1, \nabla)(\Theta^1 - \Theta^2) + (v^1 - v^2, \nabla)\Phi_2 \right\|_{L_q(Q^\gamma)} + \right. \\ &\quad \left. + \left\| (v^1, \nabla)C^1 - (v^2, \nabla)C^2 + (\Phi_1, \nabla)(C^1 - C^2) + (v^1 - v^2, \nabla)\Phi_3 \right\|_{L_q(Q^\gamma)} \right).\end{aligned}$$

Используя лемму 2, оценим по отдельности каждое из слагаемых:

$$\begin{aligned}\|\beta_c(C^1 - C^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_1\gamma^{\beta_1}\|C^1 - C^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}, \\ \|\beta_\theta(\Theta^1 - \Theta^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_2\gamma^{\beta_2}\|\Theta^1 - \Theta^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}\end{aligned}$$

Кроме того, имеем

$$\|(\Phi_1, \nabla)(v^1 - v^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq \|\Phi_1\|_{L_q(Q^T)}\|\nabla(v^1 - v^2)\|_{C(\overline{Q^\gamma})} \leq c_3\gamma^{\beta_3}\|v^1 - v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично можно оценить

$$\begin{aligned}\|(\Phi_1, \nabla)(\Theta^1 - \Theta^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_4\gamma^{\beta_4}\|\Theta^1 - \Theta^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}, \\ \|(\Phi_1, \nabla)(C^1 - C^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_5\gamma^{\beta_5}\|C^1 - C^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.\end{aligned}$$

Оценим следующее слагаемое:

$$\|(v^1 - v^2, \nabla)\Phi_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq \|\nabla\Phi_1\|_{L_q(Q^T)}\|v^1 - v^2\|_{C(\overline{Q^\gamma})} \leq c_6\gamma^{\beta_6}\|v^1 - v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned}\|(v^1 - v^2, \nabla)\Phi_2\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_7\gamma^{\beta_7}\|v^1 - v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} \\ \|(v^1 - v^2, \nabla)\Phi_3\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_8\gamma^{\beta_8}\|v^1 - v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$(v^1, \nabla)v^1 - (v^2, \nabla)v^2 = (v^1 - v^2, \nabla)v^1 + (v^2, \nabla)(v^1 - v^2),$$

находим

$$\begin{aligned}\|(v^1 - v^2, \nabla)v^1\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq \|\nabla v^1\|_{C(Q^\gamma)}\|v^1 - v^2\|_{C(Q^\gamma)} \leq c(R)\gamma^\beta\|v^1 - v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}, \\ \|(v^2, \nabla)(v^1 - v^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq \|v^2\|_{C(Q^\gamma)}\|\nabla(v^1 - v^2)\|_{C(Q^\gamma)} \leq c(R)\gamma^\beta\|v^1 - v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.\end{aligned}$$

Далее имеем

$$\|(v^1, \nabla)v^1 - (v^2, \nabla)v^2\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq c_9(R)\gamma^{\beta_9}\|v^1 - v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\|(v^1, \nabla)\Theta_1^1 - (v^2, \nabla)\Theta_1^2\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_{10}(R)\gamma^{\beta_{10}}\|\Theta_1^1 - \Theta_1^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} \\ \|(v^1, \nabla)C^1 - (v^2, \nabla)C^2\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_{11}(R)\gamma^{\beta_{11}}\|C^1 - C^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.\end{aligned}$$

Выбрав соответствующее β , окончательно имеем:

$$\|A(\omega^1, \mathbf{q}) - A(\omega^2, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq c_4(R)\gamma^\beta\|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma}, \quad (39)$$

что означает, что оператор A является сжимающим при $c_4(R)\gamma^\beta = r_0 < 1$. В частности, имеем

$$\|A(\omega^1, \mathbf{q}) - A(0, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq c_4(R)\gamma^\beta\|\omega^1\|_{H^\gamma}.$$

Зафиксируем константу $r_0 < 1$ и найдем такую постоянную $\gamma_1 \leq \gamma_0$, что $c_4(R)\gamma^\beta \leq r_0$ для $\gamma \leq \gamma_1$. Как прямое следствие теоремы о неподвижной точке, имеем, что для любого $\mathbf{q} \in B_\gamma$ при $\gamma \leq \gamma_1$ система (37) и система (33)–(35) соответственно имеет единственное решение ω в шаре $B_{R,\gamma}$. Решение удовлетворяет неравенству

$$\|\omega\|_{H^\gamma} \leq \|A(0, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} + \|A(\omega, \mathbf{q}) - A(0, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq \frac{R}{3} + r_0\|\omega\|_{H^\gamma}.$$

Это неравенство означает, что

$$\|\omega\|_{H^\gamma} \leq \frac{R}{3(1-r_0)}. \quad (40)$$

Рассмотрим два вектора $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2 \in B_\gamma$ и найдем два решения ω^1, ω^2 ($\omega^i = (v^i, p^i, \Theta^i, C^i)$, $i = 1, 2$) системы (33)–(35). Их разность $\omega^1 - \omega^2$ удовлетворяет равенству

$$\omega^1 - \omega^2 = A(\omega^1, \mathbf{q}^1) - A(\omega^2, \mathbf{q}^1) + A(\omega^2, \mathbf{q}^1) - A(\omega^2, \mathbf{q}^2),$$

из которого следует

$$\|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma} \leq r_0\|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma} + c_1\|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0,\gamma)}$$

и

$$\|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma} \leq \frac{c_1}{1-r_0}\|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0,\gamma)}. \quad (41)$$

Пусть $\gamma \leq \gamma_1$. Умножим уравнение (31) скалярно на вектор φ_k и проинтегрируем результат по G , считая, что условия (32) выполнены. Получаем равенство

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}'_k - \int_G \left(\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} C_{1x_i x_j} + \sum_{j=1}^n a_j C_{1x_j} + a_0 C_1 \right), \varphi_k(x) \right) dx = \\ = (g_c, \varphi_k)_0 - \int_G \left(\left((v, \nabla)C_1 + (\Phi_1, \nabla)C_1 + (v, \nabla)\Phi_3 \right), \varphi_k \right) dx + \sum_{j=1}^s q_j \int_G (f_j, \varphi_k) dx, \quad (42)\end{aligned}$$

где

$$(g_c, \varphi_k)_0 = \int_G (g_c, \varphi_k) dx.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\mathbf{q} = B^{-1}S_0(\mathbf{q}) = S(\mathbf{q}), \quad (43)$$

где k -я координата s_k вектора S_0 записывается в виде

$$\begin{aligned} \alpha_k(\mathbf{q}) = & - \int_G \left(\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} C_{1x_i x_j} + \sum_{j=1}^n a_j C_{1x_j} + a_0 C_1 \right), \varphi_k(x) \right) dx + \\ & + \int_G \left(\left((v, \nabla) C_1 + (\Phi_1, \nabla) C_1 + (v, \nabla) \Phi_3 \right), \varphi_k \right) dx, \\ s_k = & F_k + \alpha_k(\mathbf{q}), \quad F_k = \tilde{\psi}'_k - (g_c, \varphi_k)_0, \end{aligned}$$

Вектор-функции C_1 , v , входящие в выражение $S(\mathbf{q})$, выражаются через вектор $\mathbf{q}$ через решение системы (37). Выберем параметр R_0 и соответственно параметр R . Положим $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ и определим $R_0 = 2\|B^{-1}F\|_{L_q(0,T)}$. Тогда параметр R , определенный выше, вычисляется через величину R_0 и нормы исходных данных. По параметру R мы определили величину γ_1 . Величина γ_1 будет зависеть только от норм данных. Тогда при всех $\gamma \leq \gamma_1$ оператор S определен корректно. Докажем разрешимость уравнения (43). Пусть $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2 \in B_\gamma$ с $\gamma \leq \gamma_1$. Приведем необходимые оценки и покажем, что оператор S переводит шар B_γ в себя и является в нем сжимающим, если параметр γ мал. Основные слагаемые, входящие в функцию α_k , имеют вид

$$J_k = \int_G (a_{ij} C_{1x_i x_j}, \varphi_k(x)) dx.$$

Возьмем $\varepsilon < \min(1/r, \varepsilon_0)$ (см. условие (19)). Пусть символ $\overset{\circ}{W}_r^s(G)$ ($s \leq 1$) обозначает пространство функций из $W_r^s(G)$, обращающихся в нуль на Γ при $s > 1/r$, а $W_p^{-s}(G)$ — двойственное пространство. В силу двойственности (неравенство Шварца) имеем

$$|J_k| \leq \|C_{1x_i x_j}\|_{W_q^{-\varepsilon}(G)} \|a_{ij}^* \varphi_k\|_{\overset{\circ}{W}_r^{\varepsilon}(G)}, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1,$$

где a_{ij}^* — сопряженная матрица. Ее элементы (см. условие (19)) принадлежат классу $C([0, T]; C^{\varepsilon_0}(\overline{G}))$. Тогда в соответствии с теоремой о точечных мультипликаторах (см. [55, теорема 3.3.2, с. 198]; можно также использовать определение нормы) имеем

$$\|a_{ij}^* \varphi_k\|_{\overset{\circ}{W}_r^{\varepsilon}(G)} \leq c \|\varphi_k\|_{\overset{\circ}{W}_r^{\varepsilon}(G)} \leq c_1,$$

где c, c_1 — некоторые постоянные, не зависящие от времени. Отметим, что $\overset{\circ}{W}_r^{\varepsilon}(G) = W_r^s(G)$ при $s < 1/r$, поэтому правая часть предыдущего неравенства конечна. С другой стороны, имеет место неравенство

$$\|C_{1x_i x_j}\|_{W_q^{-\varepsilon}(G)} \leq c \|C_1\|_{W_q^{2-\varepsilon}(G)}. \quad (44)$$

Неравенства такого вида возникают часто. Они вытекают из интерполяционных свойств линейных операторов. Поясним доказательство. Рассмотрим отображение $M : v \rightarrow v_{x_j}$. Очевидно, $M \in L(L_q(G), W_q^{-1}(G)) \cap L(W_q^1(G), L_q(G))$. Следовательно,

$$M \in L\left((L_q(G), W_q^{-1}(G))_{\theta, q}, (W_q^1(G), L_q(G))_{\theta, q}\right), \quad \theta \in (0, 1).$$

Однако

$$(W_q^1(G), L_q(G))_{\theta, q} = W_q^{1-\theta}(G), \quad (L_q(G), W_q^{-1}(G))_{\theta, q} = W_q^{-\theta}(G)$$

(см. [54]). Таким образом, имеет место неравенство

$$\|v_{x_j}\|_{W_q^{-\varepsilon}(G)} \leq c \|v\|_{W_q^{1-\varepsilon}(G)}.$$

Отсюда и вытекает неравенство (44). Из полученных неравенств вытекает оценка

$$\|J_k\|_{L_q(0, \gamma)} \leq c \|C_1\|_{L_q(0, \gamma; W_q^{2-\varepsilon}(G))}.$$

Далее используем интерполяционные неравенства (см. [54]) и лемму 1. Получаем

$$\|J_k\|_{L_q(0, \gamma)} \leq c \|C_1\|_{L_q(0, \gamma; W_q^{2-\varepsilon}(G))} \leq c_1 \|C_1\|_{L_q(Q\gamma)}^{\varepsilon} \|C_1\|_{L_q(0, \gamma; W_q^2(G))}^{2-\varepsilon} \leq c_2 \gamma^{\varepsilon} \|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q\gamma)}.$$

Оставшиеся слагаемые в выражении α_k оцениваются гораздо проще. Рассмотрим, например, выражение

$$I_k = \int_G (a_j C_{1x_j}, \varphi_k(x)) dx.$$

Имеем

$$|I_k| \leq c \|\varphi_k(x)\|_{L_r(G)} \|a_j C_{1x_j}\|_{L_q(G)} \leq c_1 \|a_j\|_{L_q(G)} \|C_{1x_j}\|_{L_\infty(Q)}.$$

Далее, обращаясь к лемме 2 получим неравенство

$$\|I_k\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c_2 \gamma^\beta \|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q\gamma)},$$

где β — некоторая положительная постоянная. Оставшиеся слагаемые в выражении $\alpha_k(\mathbf{q})$ оцениваются аналогично. Положим $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)^T$. Таким образом, можем сказать, что найдется такое число $\beta_0 > 0$, что имеет место неравенство

$$\|B^{-1}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c\gamma^{\beta_0} (\|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q\gamma)} + \|v\|_{W_q^{2,1}(Q\gamma)}) \leq C(R)\gamma^{\beta_0}. \quad (45)$$

Теперь возьмем, два различных вектора $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2$. Запишем разность $S_0(\mathbf{q}^1) - S_0(\mathbf{q}^2)$. Обозначим через C^i, v^i (где $v^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)$, $i = 1, 2$) решения системы (37), соответствующие этим векторам. Отметим, что данные векторы входят в функции α_k почти линейно. Поэтому легко увидеть, что будет справедлива аналогичная оценка, но в правой части уже будут нормы разностей $C^1 - C^2, v^1 - v^2$. Используя (41), получим

$$\|B^{-1}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}^1) - B^{-1}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}^2)\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c(R)\gamma^{\beta_1} \|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0,\gamma)}, \quad (46)$$

где β_1 — некоторая положительная постоянная. Используя определение величины R_0 имеем неравенство

$$\|S(\mathbf{q})\| \leq R_0/2 + C(R)\gamma^{\beta_0}, \quad \|S(\mathbf{q}^1) - S(\mathbf{q}^2)\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c(R)\gamma^{\beta_1} \|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0,\gamma)}. \quad (47)$$

Остается выбрать такую постоянную $\gamma_2 \leq \gamma_1$, что если $\gamma \leq \gamma_2$, то $C(R)\gamma^{\beta_0} \leq R_0/2$ и $c(R)\gamma^{\beta_1} \leq 1/2$. Тогда при $\gamma \leq \gamma_2$ уравнение (43) имеет единственное решение в шаре B_γ . Векторы C_1, v и функцию Θ_1 находим как решение системы (37). Покажем, что условия переопределения для функции C_1 выполняются. Умножим уравнение (31) скалярно на вектор-функцию φ_k и проинтегрируем результат по G . Вычитая полученное равенство из k -го уравнения в (42), получим равенство

$$\int_G (C_{1t}, \varphi_k) dx = \tilde{\psi}_k,$$

а это как раз и есть наше условие переопределения. Таким образом, мы построили решение нашей задачи локально по времени.

Рассмотрим вопрос об устойчивости решений. Фиксируем шар радиуса R в пространстве данных. В силу выбора шара, в котором мы ищем вектор $\mathbf{q}$ и решения C_1, v, Θ_1 , можем считать, что величина R_0 фиксирована и соответственно величина R , введенная в доказательстве, также фиксирована. Они определяются радиусом шара, в котором расположены данные задачи. Тогда, повторяя рассуждения, получим, что можно взять параметр γ_2 одним и тем же для всех данных из нашего класса. Будут справедливы оценки (46), (41), (40). Возьмем два решения, отвечающие двум различным наборам данных $(C^i, \Theta^i, v^i, q^i)$, где $v^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)$, $i = 1, 2$. Каждое из них удовлетворяет системе (33)–(35), где справа вместо функций g, g_θ, g_{0c} стоят соответствующие функции $g^i, g_\theta^i, g_{0c}^i$. Вычитая эти две системы друг из друга, можем оценить норму разности решений, и вместо оценки (41) получим оценку вида

$$\|\omega^1 - \omega^2\|_{H\gamma} \leq c_1 (\|q^1 - q^2\|_{L_q(0,\gamma)} + \|g^1 - g^2\|_{L_q(Q\gamma)} + \|g_\theta^1 - g_\theta^2\|_{L_q(Q\gamma)} + \|g_{0c}^1 - g_{0c}^2\|_{L_q(Q\gamma)}). \quad (48)$$

Далее рассмотрим равенства (43), записанные для этих двух решений. Вычитая их друг из друга и повторяя использованные выше рассуждения, придем к оценкам

$$\|q^1 - q^2\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c(R)\gamma^\beta \|\omega^1 - \omega^2\|_{H\gamma} + \|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\|_{L_q(0,\gamma)}, \quad (49)$$

где $\beta > 0$, $c(R)$ — положительные постоянные и векторы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ — определенный выше вектор $\mathbf{F}$, записанный для двух наборов данных. Выбирая такое $\gamma_3 \leq \gamma_2$, что $c_1 c(R) \gamma^\beta \leq 1/2$ при $\gamma \leq \gamma_3$, и используя неравенство (49) в правой части (48), придем к неравенству

$$\|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma} \leq c_2(\|g^1 - g^2\|_{L_q(Q^\gamma)} + \|g_\theta^1 - g_\theta^2\|_{L_q(Q^\gamma)} + \|g_{0c}^1 - g_{0c}^2\|_{L_q(Q^\gamma)} + \|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\|_{L_q(0, \gamma)}),$$

где $\gamma \leq \gamma_3$. Используя это неравенство в правой части (49), получим

$$\|q^1 - q^2\|_{L_q(0, \gamma)} \leq c_3(\|g^1 - g^2\|_{L_q(Q^\gamma)} + \|g_\theta^1 - g_\theta^2\|_{L_q(Q^\gamma)} + \|g_{0c}^1 - g_{0c}^2\|_{L_q(Q^\gamma)} + \|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\|_{L_q(0, \gamma)}). \quad (50)$$

Последние две оценки и гарантируют выполнение оценки устойчивости из формулировки теоремы. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 5. Доказательство локальной разрешимости практически совпадает с доказательством предыдущей теоремы. Мы повторим только основные моменты. Как и ранее, строим функции Φ_i , $i = 1, 2, 3$, удовлетворяющие начальным и граничным данным, и делаем замену

$$u = v + \Phi_1, \quad \Theta = \Theta_1 + \Phi_2, \quad C = C_1 + \Phi_3.$$

Получим

$$L_{01}(v, p) = v_t - \nu \Delta v + \nabla p = g + \sum_{j=1}^n B_j v_{x_j} + B_0 v + \beta_C C_1 + \beta_\theta \Theta_1, \quad (51)$$

$$\operatorname{div} v = 0,$$

$$L_{02}\Theta_1 = \Theta_{1t} - \lambda_\theta \Delta \Theta_1 + \sum_{j=1}^n b_j \Theta_{1x_j} + b_0 \Theta_1 = g_\theta + \sum_{j=1}^n b^j v_j, \quad (52)$$

$$L_{03}C_1 = C_{1t} - \lambda_C \Delta C_1 + \sum_{j=1}^n c_j C_{1x_j} + c_0 C_1 = g_c + \sum_{j=1}^n c^j v_j + \sum_{j=1}^r f_j q_j, \quad (53)$$

где новые функции g , g_θ и вектор-функция g_c имеют вид

$$g = f - \Phi_{1t} + \nu \Delta \Phi_1 + \sum_{j=1}^n B_j \Phi_{1x_j} + B_0 \Phi_1 + \beta_C \Phi_3 + \beta_\theta \Phi_2,$$

$$g_\theta = f_\theta - L_{02}\Phi_2 + \sum_{j=1}^n b^j \Phi_{1j}, \quad g_c = f_0 - L_{03}\Phi_3 + \sum_{j=1}^n c^j \Phi_{1j}.$$

Здесь величины Φ_{1j} — координаты вектор-функции Φ_1 . Новые функции v , Θ_1 и вектор-функция C_1 удовлетворяют однородным начальным и граничным условиям, а также выполнены условия переопределения

$$\int_G (C_1, \varphi_j(x)) dx = \psi_j(t) - \int_G (\Phi_3, \varphi_j(x)) dx = \tilde{\psi}_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (54)$$

Мы свели задачу к эквивалентной задаче. Пусть $\gamma \in (0, T]$. Как и в предыдущей теореме, используя теоремы 1, 2, можем переписать уравнения (51)–(53) в следующей форме:

$$(v, p) = (L_{01})^{-1} g + (L_{01})^{-1} \left(\sum_{j=1}^n B_j v_{x_j} + B_0 v + \beta_C C_1 + \beta_\theta \Theta_1 \right), \quad (55)$$

$$\Theta_1 = (L_{02})^{-1} g_\theta - (L_{02})^{-1} \left(g_\theta + \sum_{j=1}^n b^j v_j \right), \quad (56)$$

$$C_1 = (L_{03})^{-1} g_c + (L_{03})^{-1} \left(g_c + \sum_{j=1}^n c^j v_j + \sum_{j=1}^r f_j q_j \right). \quad (57)$$

Пусть $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s) \in B_\gamma = \{\mathbf{q} \in L_p(0, \gamma) : \|\mathbf{q}\|_{L_p(0, \gamma)} \leq R_0\}$. Параметр R_0 мы уточним ниже. Будем искать решение системы (55)–(57) при данном фиксированном $\mathbf{q} \in B_\gamma$:

$$\omega = A(\omega, \mathbf{q}), \quad \omega = (v, p, \Theta, C), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s), \quad (58)$$

где оператор A определен правой частью системы (55)–(57). Будем считать, что

$$\omega \in B_{R, \gamma} = \{\omega \in H^\gamma : \|\omega\|_{H^\gamma} \leq R\},$$

где

$$R = 3 \left(\|v_0, p_0, (L_{02})^{-1}g_\theta, (L_{03})^{-1}g_c\|_{H^T} + c_2 R_0 \right).$$

Аналоги оценок (38), (39) запишутся в виде

$$\|A(\omega, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq \frac{R}{3} + c_3 \gamma^\beta \|\omega\|_{H^\gamma}, \quad (59)$$

где постоянная c_3 не зависит от R и β — некоторая положительная постоянная;

$$\|A(\omega^1, \mathbf{q}) - A(\omega^2, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq c_4 \gamma^\beta \|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma}, \quad (60)$$

что означает, что оператор A является сжимающим при $c_4 \gamma^\beta < 1$. В частности, имеем

$$\|A(\omega^1, \mathbf{q}) - A(0, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq c_4 \gamma^\beta \|\omega^1\|_{H^\gamma}.$$

Легко видеть, что постоянные c_3 и c_4 не зависят от R , а зависят от норм коэффициентов в Q . Зафиксируем константу $r_0 < 1$ и найдем такую постоянную γ_1 , что

$$c_4 \gamma^\beta \leq r_0, \quad c_3 \gamma^\beta \leq \frac{1}{3}$$

для $\gamma \leq \gamma_1$. При помощи теоремы о неподвижной точке заключаем, что для любого $\mathbf{q} \in B_\gamma$ при $\gamma \leq \gamma_1$ система (58) и система (55)–(57) имеют единственное решение ω в шаре $B_{R, \gamma}$. Решение удовлетворяет неравенству

$$\|\omega\|_{H^\gamma} \leq \|A(0, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} + \|A(\omega, \mathbf{q}) - A(0, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq \frac{R}{3} + r_0 \|\omega\|_{H^\gamma}.$$

Это неравенство означает, что

$$\|\omega\|_{H^\gamma} \leq \frac{R}{3(1-r_0)}. \quad (61)$$

Рассмотрим два вектора $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2 \in B_\gamma$ и найдем два решения ω^1, ω^2 (здесь $\omega^i = (v^i, p^i, \Theta^i, C^i)$, $i = 1, 2$) системы (55)–(57). Их разность $\omega^1 - \omega^2$ удовлетворяет равенству

$$\omega^1 - \omega^2 = A(\omega^1, \mathbf{q}^1) - A(\omega^2, \mathbf{q}^1) + A(\omega^2, \mathbf{q}^1) - A(\omega^2, \mathbf{q}^2),$$

из которого следует

$$\|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma} \leq r_0 \|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma} + c_1 \|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0, \gamma)}$$

и

$$\|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma} \leq \frac{c_1}{1-r_0} \|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0, \gamma)}. \quad (62)$$

Пусть $\gamma \leq \gamma_1$. Умножим уравнение (51) скалярно на вектор φ_k и проинтегрируем результат по G , считая, что условия (54) выполнены. Как следствие получаем равенство

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}'_k - \int_G \left(\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} C_{1x_i x_j} + \sum_{j=1}^n a_j C_{1x_j} + a_0 C_1 \right), \varphi_k(x) \right) dx = \\ = (g_c, \varphi_k)_0 - \int_G \left(g_c + \sum_{j=1}^n c^j v_j, \varphi_k \right) dx + \sum_{j=1}^s q_j \int_G (f_j, \varphi_k) dx, \end{aligned} \quad (63)$$

где

$$(g_c, \varphi_k)_0 = \int_G (g_c, \varphi_k) dx.$$

Это равенство может быть переписано в виде

$$\mathbf{q} = B^{-1}S_0(\mathbf{q}) = S(\mathbf{q}), \quad (64)$$

где k -я координата s_k вектора S_0 записывается в виде

$$\alpha_k(\mathbf{q}) = - \int_G \left(\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} C_{1x_i x_j} + \sum_{j=1}^n a_j C_{1x_j} + a_0 C_1 \right), \varphi_k(x) \right) dx + \int_G \left(g_c + \sum_{j=1}^n c^j v_j, \varphi_k \right) dx,$$

$$s_k = F_k + \alpha_k(\mathbf{q}), \quad F_k = \tilde{\psi}'_k - (g_c, \varphi_k)_0.$$

Вектор-функции C_1, v , входящие в выражение $S(\mathbf{q})$, выражаются через вектор $\mathbf{q}$ и решение системы (37). Выберем параметр R_0 и соответственно параметр R . Положим $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ и определим $R_0 = 2\|B^{-1}F\|_{L_q(0,T)}$. Тогда параметр R , определенный выше, вычисляется через величину R_0 и нормы исходных данных. По параметру R мы определили величину γ_1 . Величина γ_1 будет зависеть только от норм данных. Тогда при всех $\gamma \leq \gamma_1$ оператор S определен корректно.

Докажем разрешимость уравнения (43). Пусть $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2 \in B_\gamma$, где $\gamma \leq \gamma_1$. Приведем необходимые оценки и покажем, что оператор S переводит шар B_γ в себя и является в нем сжимающим, если параметр γ мал. Основные слагаемые, входящие в функцию α_k , имеют вид

$$J_k = \int_G (a_{ij} C_{1x_i x_j}, \varphi_k(x)) dx.$$

Возьмем $\varepsilon < \min(1/r, \varepsilon_0)$ (см. условие (19)). Пусть символ $\overset{\circ}{W}_r^s(G)$, $s \leq 1$, обозначает пространство функций из $W_r^s(G)$, обращающихся в нуль на Γ при $s > 1/r$, а $W_p^{-s}(G)$ — двойственное пространство. В силу двойственности (неравенство Шварца) имеем

$$|J_k| \leq \|C_{1x_i x_j}\|_{W_q^{-\varepsilon}(G)} \|a_{ij}^* \varphi_k\|_{\overset{\circ}{W}_r^{\varepsilon}(G)}, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1,$$

где a_{ij}^* — сопряженная матрица. Ее элементы (см. условие (19)) принадлежат классу $C([0, T]; C^{\varepsilon_0}(\overline{G}))$. Тогда в соответствии с теоремой о точечных мультипликаторах (см. [55, теорема 3.3.2, с. 198] (можно также использовать определение нормы) имеем

$$\|a_{ij}^* \varphi_k\|_{\overset{\circ}{W}_r^{\varepsilon}(G)} \leq c \|\varphi_k\|_{\overset{\circ}{W}_r^{\varepsilon}(G)} \leq c_1,$$

где c, c_1 — некоторые постоянные (не зависящие от времени). Отметим, что $\overset{\circ}{W}_r^{\varepsilon}(G) = W_r^s(G)$ при $s < 1/r$, поэтому правая часть предыдущего неравенства конечна. С другой стороны, имеет место неравенство

$$\|C_{1x_i x_j}\|_{W_q^{-\varepsilon}(G)} \leq c \|C_1\|_{W_q^{2-\varepsilon}(G)}. \quad (65)$$

Неравенства такого вида возникают часто. Они вытекают из интерполяционных свойств линейных операторов. Поясним доказательство. Рассмотрим отображение $M : v \rightarrow v_{x_j}$. Очевидно, $M \in L(L_q(G), W_q^{-1}(G)) \cap L(W_q^1(G), L_q(G))$. Следовательно,

$$M \in L\left((L_q(G), W_q^{-1}(G))_{\theta, q}, (W_q^1(G), L_q(G))_{\theta, q}\right), \quad \theta \in (0, 1).$$

Однако

$$(W_q^1(G), L_q(G))_{\theta, q} = W_q^{1-\theta}(G), \quad (L_q(G), W_q^{-1}(G))_{\theta, q} = W_q^{-\theta}(G)$$

(см. [54]). Таким образом, имеет место неравенство

$$\|v_{x_j}\|_{W_q^{-\varepsilon}(G)} \leq c \|v\|_{W_q^{1-\varepsilon}(G)}.$$

Отсюда и вытекает неравенство (65). Из полученных неравенств вытекает оценка

$$\|J_k\|_{L_q(0, \gamma)} \leq c \|C_1\|_{L_q(0, \gamma; W_q^{2-\varepsilon}(G))}.$$

Далее используем интерполяционные неравенства (см. [54]) и лемму 1. Получаем

$$\|J_k\|_{L_q(0, \gamma)} \leq c \|C_1\|_{L_q(0, \gamma; W_q^{2-\varepsilon}(G))} \leq c_1 \|C_1\|_{L_q(Q\gamma)}^{\varepsilon} \|C_1\|_{L_q(0, \gamma; W_q^2(G))}^{2-\varepsilon} \leq c_2 \gamma^{\varepsilon} \|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q\gamma)}.$$

Оставшиеся слагаемые в выражении α_k оцениваются гораздо проще. Рассмотрим, например, выражение

$$I_k = \int_G (a_j C_{1x_j}, \varphi_k(x)) dx.$$

Имеем

$$|I_k| \leq c \|\varphi_k(x)\|_{L_r(G)} \|a_j C_{1x_j}\|_{L_q(G)} \leq c_1 \|a_j\|_{L_q(G)} \|C_{1x_j}\|_{L_\infty(Q)}.$$

Далее, обращаясь к лемме 2 получим неравенство

$$\|I_k\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c_2 \gamma^\beta \|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)},$$

где β — некоторая положительная постоянная. Оставшиеся слагаемые в выражении $\alpha_k(\mathbf{q})$ оцениваются аналогично. Положим $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)^T$. Таким образом, можем сказать, что найдется такое число $\beta_0 > 0$, что имеет место неравенство

$$\|B^{-1}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c\gamma^{\beta_0} \left(\|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + \|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} \right) \leq C(R)\gamma^{\beta_0}.$$

Теперь возьмем два различных вектора $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2$. Запишем разность $S_0(\mathbf{q}^1) - S_0(\mathbf{q}^2)$. Обозначим через C^i, v^i (здесь $v^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)$, $i = 1, 2$) решения системы (37), соответствующие этим векторам. Отметим, что данные векторы входят в функции α_k почти линейно. Поэтому легко видеть, что будет справедлива аналогичная оценка, но в правой части уже будут нормы разностей $C^1 - C^2, v^1 - v^2$. Используя (41), получим

$$\|B^{-1}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}^1) - B^{-1}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}^2)\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c(R)\gamma^{\beta_1} \|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0,\gamma)}, \quad (66)$$

где β_1 — некоторая положительная постоянная. Используя определение величины R_0 , имеем неравенство

$$\|S(\mathbf{q})\| \leq R_0/2 + C(R)\gamma^{\beta_0}, \quad \|S(\mathbf{q}^1) - S(\mathbf{q}^2)\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c(R)\gamma^{\beta_1} \|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0,\gamma)}. \quad (67)$$

Остается выбрать такую постоянную $\gamma_2 \leq \gamma_1$, что если $\gamma \leq \gamma_2$, то

$$C(R)\gamma^{\beta_0} \leq \frac{R_0}{2}, \quad c(R)\gamma^{\beta_1} \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда при $\gamma \leq \gamma_2$ уравнение (43) имеет единственное решение в шаре B_γ . Векторы C_1, v и функцию Θ_1 находим как решение системы (37). Покажем, что условия переопределения для функции C_1 выполняются. Умножим уравнение (31) скалярно на вектор-функцию φ_k и проинтегрируем результат по G . Вычитая полученное равенство из k -го уравнения в (42), получим равенство

$$\int_G (C_{1t}, \varphi_k) dx = \tilde{\psi}_k,$$

а это как раз и есть условие переопределения. Таким образом, мы построили решение нашей задачи локально по времени, причем параметр γ_2 зависит только от норм коэффициентов уравнений в Q .

Покажем, что решение продолжимо на весь промежуток $[0, T]$. Построим функцию $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}$ при $t \in [0, \gamma_2]$ и $\mathbf{q}_1 = 0$ при $t > \gamma_2$. Построим также четные продолжения v^1, C^1, Θ^1, p^1 решений v, C_1, Θ_1, p относительно точки $t = \gamma_2$. Таким образом, $v^1 = v$ при $t \in [0, \gamma_2]$ и $v^1(x, t) = v(x, 2\gamma_2 - t)$ при $t \in [\gamma_2, 2\gamma_2]$. Сделаем в системе (55)–(57) замены

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \quad v = v^1 + v_2, \quad p = p^1 + p_2, \quad \Theta_1 = \Theta_2 + \Theta^1, \quad C_1 = C_2 + C^1.$$

Получим систему (55)–(57) относительно функций v_2, p_2, Θ_2, C_2 , удовлетворяющих однородным начальным и граничным данным, с новой правой частью, которая обращается в нуль на $[0, \gamma_2]$ и определена на $[0, 2\gamma_2]$. В силу единственности решения задачи на $[0, \gamma_2]$ получаем, что вектор-функция $(v_2, p_2, \Theta_2, C_2)$ равна нулю на $[0, \gamma_2]$, равно как и функция $\mathbf{q}_2$. Используя этот факт, мы повторяем рассуждения уже на промежутке $[\gamma_2, 2\gamma_2]$, причем без ограничения общности можем считать, что все оценки справедливы с теми же постоянными $c_2, \dots, c_6$ (однако радиус шара, в котором ищется решение, изменится). Это дает возможность доказать существование решений

системы (55)–(57), (64) на промежутке $[0, 2\gamma_2]$. Далее, повторяя рассуждения, установим разрешимость системы на сегменте $[0, 3\gamma_2]$ и т. д. Таким путем устанавливается разрешимость задачи на всем сегменте $[0, T]$. $\square$

Замечание 1. Утверждения теорем 4, 5 остаются в силе, если вместо условий Дирихле мы будем рассматривать другие краевые условия для вектор-функции u в уравнении (1), и имеет место соответствующий аналог теоремы соответствующий аналог теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев Г. В.* Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. — М.: Научный мир, 2010.
2. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Ненарокомов А. В.* Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. — М.: Янус-К, 2009.
3. *Искендеров А. Д., Ахундов А. Я.* Обратная задача для линейной системы параболических уравнений// Докл. РАН. — 2005. — 424, № 4. — С. 442–444.
4. *Камынин В. Л., Франчини Э.* Об одной обратной задаче для параболического уравнения высокого порядка// Мат. заметки. — 1998. — 64, № 5. — С. 680–691.
5. *Кожанов А. И.* Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2005. — 45, № 12. — С. 2168–2184.
6. *Короткова Е. М., Пятков С. Г.* О некоторых обратных задачах для линеаризованной системы тепломассопереноса// Мат. тр. — 2014. — 17, № 2. — С. 142–162.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
8. *Лыков А. В., Михайлов Ю. А.* Теория тепло- и массопереноса. — Ленинград: Госэнергоиздат, 1963.
9. *Полежаев В. И., Бунэ А. В., Вережуб Н. А. и др.* Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье—Стокса. — М.: Наука, 1987.
10. *Прилепко А. И., Иванков А. Л., Соловьев В. В.* Обратные задачи для уравнений переноса и параболических уравнений// в кн.: Единственность, устойчивость и методы решения некорректных задач математической физики. — Новосибирск: Вычислительный центр СО РАН, 1984. — С. 137–142.
11. *Пятков С. Г., Сафонов Е. И.* О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений// Науч. вед. БелГУ. — 2014. — 35, № 7 (183). — С. 61–75.
12. *Пятков С. Г., Сафонов Е. И.* О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений// Сиб. электрон. изв. — 2014. — 11. — С. 777–779.
13. *Пятков С. Г.* О некоторых обратных задачах для операторно-дифференциальных уравнений первого порядка// Сиб. мат. ж. — 2019. — 60, № 1. — С. 183–193.
14. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1965. — 83. — С. 3–163.
15. *Abels H.* Reduced and generalized Stokes resolvent equations in asymptotically flat layers. Part I: Unique solvability// J. Math. Fluid Mech. — 2005. — 7, № 2. — С. 201–222.
16. *Abels H.* Reduced and generalized Stokes resolvent equations in asymptotically flat layers. Part II: H^∞ -calculus// J. Math. Fluid Mech. — 2005. — 7, № 2. — С. 223–260.
17. *Abels H.* Bounded imaginary powers and H^∞ -calculus of the Stokes operator in unbounded domains// в кн.: Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems: A Special Tribute to the Work of Herbert Amann. — Basel: Birkhäuser Verlag, 2005. — С. 1–15.
18. *Amann H.* Linear and Quasilinear Parabolic Problems. — Basel: Birkhäuser Verlag, 2005.
19. *Amann H.* Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces// Glas. Mat. — 2000. — 35 (55). — С. 161–177.
20. *Bejan A.* Convection heat transfer. — New York: Wiley, 2004.
21. *Belov Ya. Ya.* Inverse Problems for Parabolic Equations. — Utrecht: VSP, 2002.
22. *Cannon J. R.* A class of non-linear nonclassical parabolic equations// J. Differ. Equ. — 1989. — 79, № 2. — С. 266–288.
23. *Capatina A., Stavre R.* A control problem in biconvective flow// J. Math. Kyoto Univ. — 1997. — 37, № 4. — С. 585–595.

24. *Loucks D. P., van Beek E. et al.* Water Resources Systems: Planning and Management. — Paris–Delft: UNESCO Publishing, 2005.
25. *Denk R., Hieber M., Prüss J.* R -boundedness, Fourier multipliers, and problems of elliptic and parabolic type// *Mem. Am. Math. Soc.* — 2003. — 166. — С. 1–114.
26. *Desch W., Hieber M., and Prüss J.* L_p -Theory of the Stokes equation in a half space// *J. Evol. Equ.* — 2001. — 1. — С. 115–142.
27. *Denk R., Hieber M., and Prüss J.* Optimal L_p – L_q -estimates for parabolic boundary-value problems with inhomogeneous data// *Math. Z.* — 2007. — 257, № 1. — С. 193–224.
28. *Ewing R. E., Lin T.* A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media// *Adv. Water Res.* — 1991. — 14, № 2. — С. 89–97.
29. *Farwig R., Myong-Hwan R.* Resolvent estimates and maximal regularity in weighted L_q -spaces of the Stokes operator in an infinite cylinder// *J. Math. Fluid Mech.* — 2008. — 10, № 3. — С. 352–387.
30. *Farwig R., Myong-Hwan R.* The resolvent problem and H^∞ -calculus of the Stokes operator in unbounded cylinders with several exits to infinity// *J. Evol. Equ.* — 2007. — 7, № 3. — С. 497–528.
31. *Frölich A.* The Stokes operator in weighted L_q -spaces, II: Weighted resolvent estimates and maximal L_p -regularity// *Math. Ann.* — 2007. — 339, № 2. — С. 287–316.
32. *Giga Y., Sohr H.* On the Stokes operator in exterior domains// *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA. Math.* — 1989. — 36, № 2. — С. 103–130.
33. *Giga Y., Sohr H.* Abstract L_p -estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier–Stokes equations in exterior domains// *J. Funct. Anal.* — 1991. — 102, № 1. — С. 72–94.
34. *Grisvard P.* Equations operationnelles dans les de Banach et problemes aux limites dans des ouverts cylindriques// *Ann. Scu. Norm. Super. Pisa.* — 1967. — 21, № 3. — С. 308–347.
35. *Hazanee A., Lesnic D., Ismailov M. I., Kerimov N. B.* Inverse time-dependent source problems for the heat equation with nonlocal boundary conditions// *Appl. Math. Comput.* — 2019. — 346. — С. 800–815.
36. *Hasanov A., Hasanoglu S.* Comparative analysis of linear and nonlinear models for ion transport problem in chronoamperometry// *J. Math. Chem.* — 2008. — 44, № 3. — С. 731–742.
37. *Hussein M. S., Lesnic D.* Simultaneous determination of time-dependent coefficients and heat source// *Int. J. Comput. Meth. Eng. Sci. Mech.* — 2016. — 17, № 5–6. — С. 401–411.
38. *Joseph D. D.* Stability of Fluid Motions. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1976.
39. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2006.
40. *Ismailov M. I., Kanca F.* Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of heat equation from integral overdetermination condition data// *Inv. Probl. Sci. Eng.* — 2012. — 20, № 4. — С. 436–476.
41. *Ismailov M., Erkovan S.* Inverse problem of finding the coefficient of the lowest term in two-dimensional heat equation with Ionkin-type boundary condition// *Ж. вычисл. мат. мат. физ.* — 2019. — 59, № 5. — С. 859.
42. *Isakov V.* Inverse problems for equations of parabolic type. — Berlin: Springer, 2003.
43. *Jing Li, Youjun Xu* An inverse coefficient problem with nonlinear parabolic equation// *J. Appl. Math. Comput.* — 2010. — 34, № 1–2. — С. 195–206.
44. *Joseph D. D.* Stability of fluid motions, II. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1976.
45. *Kabanikhin S. I.* Inverse and Ill-Posed Problems. — Berlin–Boston: de Gruyter, 2012.
46. *Kerimov N. B., Ismailov M. I.* An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions// *J. Math. Anal. Appl.* — 2012. — 396, № 2. — С. 546–554.
47. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. — Utrecht: VSP, 1999.
48. *Levandowsky M., Childress W. S., Hunter S. H., Spiegel E. A.* A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms// *J. Protozoology.* — 1975. — 22, № 2. — С. 296–306.
49. *Ozisik M. N., Orlando H. A. B.* Inverse Heat Transfer. — New York: Taylor & Francis, 2000.
50. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York: Marcel Dekker, 1999.
51. *Pyatkov S. G., Safonov E. I.* Some inverse problems for convection-diffusion systems of equations// *Вестн. ЮУрГУ. Сер. мат. модел. программ.* — 2014. — 7, № 4. — С. 36–50.
52. *Pyatkov S. G., Safonov E. I.* Solvability of some inverse problems for the nonstationary heat-and-mass-transfer system// *J. Math. Anal. Appl.* — 2017. — 446, № 2. — С. 1449–1465.

- 53. *Solonnikov V. A.* Estimates of solutions of the Stokes equations in Sobolev spaces with a mixed norm// J. Math. Sci. — 2004. — 123, № 6. — С. 4637–4653.
- 54. *Triebel H.* Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978.
- 55. *Triebel H.* Theory of Function Spaces. — Basel: Birkhäuser-Verlag, 1983.

Пятков Сергей Григорьевич

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск

E-mail: pyatkovsg@gmail.com, s_pyatkov@ugrasu.ru