Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. Аксой, Н. Begehr, А. Челеби, Б. Шупеева, Комплексные дифференциальные уравнения в частных производных, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 188, 54–69

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-188-54-69>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:43:20

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 54–69
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-54-69

УДК 517.95

КОМПЛЕКСНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2020 г. У. АКСОЙ, Г. БЕГЕР, А. ЧЕЛЕБИ, Б. ШУПЕЕВА

Аннотация. Изучаются краевые задачи Шварца и итерированные краевые задачи Дирихле для полианалитических операторов в некоторых плоских областях, имеющих гармоническую функцию Грина. Рассмотрены гибридные полигармонические функции Грина, позволяющие исследовать краевые задачи для полигармонического оператора. Эта сравнительно новая тема далека от завершения; чем выше порядок полигармонического оператора, тем богаче теория связанных гибридных функций Грина: они конструируются путем непрерывной свертки гармонических функций Грина, Неймана, Робена, а также полигармонических функций Грина—Альманси.

Ключевые слова: полианалитический оператор, представление Коши—Шварца—Помпейю, функция Грина, краевая задача Шварца, краевая задача Дирихле, допустимая область, кольцевая область, функция Грина—Альманси, полигармоническая гибридная функция Грина, полигармоническая краевая задача, краевая задача Рикье.

COMPLEX PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2020 Ü. AKSOY, H. BEGEHR, A. ÇELEBI, B. SHUPEYEVA

ABSTRACT. The Schwarz and iterated Dirichlet boundary-value problems are reported on for the polyanalytic operator in certain plane domains having a harmonic Green function. Hybrid polyharmonic Green functions are reviewed upon which open a variety of boundary-value problems for the polyharmonic operator. This topic is far from being complete. The higher the order of the polyharmonic operator the richer is the theory of related hybrid Green functions: they are constructed by continued convoluting harmonic Green, Neumann, Robin functions also incorporating polyharmonic Green—Almansí functions.

Keywords and phrases: polyanalytic operator, Cauchy—Schwarz—Pompeiu representation, Green function, Schwarz boundary-value problem, Dirichlet boundary-value problem, admissible domain, ring domain, Green—Almansí function, polyharmonic hybrid Green function, polyharmonic boundary-value problem, Riquier boundary-value problem.

AMS Subject Classification: 30E25, 30G20, 31A10, 31A25, 35J40

1. Модельные уравнения. В основе теории дифференциальных уравнений лежат понятия переменных и дифференциальных операторов и соответствующие теоремы анализа. Для комплексных дифференциальных уравнений в частных производных переменные имеют вид $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, дифференциальные операторы — оператор Коши—Римана $\partial_{\bar{z}}$, имеющий вид $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, и его комплексно сопряженный оператор $2\partial_z = \partial_x - i\partial_y$. Укажем основные теоремы анализа, используемые в этой теории.

Теорема 1 (теорема Гаусса—Остроградского в комплексной форме). *Произвольная функция $w \in C(\overline{D}; \mathbb{C}) \cap C^1(D; \mathbb{C})$ в регулярной области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$\int_D w_{\bar{z}}(z) dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} w(z) dz, \quad \int_D w_z(z) dx dy = -\frac{1}{2i} \int_{\partial D} w(z) d\bar{z}.$$

В случае одной переменной из основной теоремы анализа получаются формулы представления; для нескольких переменных требуется понятие фундаментального решения. Для оператора Коши—Римана это ядро Коши $-1/(\pi z)$, удовлетворяющее соотношению

$$\partial_{\bar{z}} \left(-\frac{1}{\pi z} \right) = \delta_0,$$

где δ_0 — дельта-функция Дирака. Это следует из свойства $\partial_{\bar{z}} T f = f$ интеграла Помпейю, понимаемого в смысле распределений (обобщенных функций) в D (см. [1]):

$$T f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad f \in L_1(D; \mathbb{C}).$$

Интеграл Помпейю представляет собой потенциал для оператора Коши—Римана и может служить для решения более общих комплексных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, например, уравнений Берса—Карлемана—Векуа и Бельтрами (см. [1]). Следовательно, уравнение Коши—Римана является модельным уравнением для общих комплексных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, где оператор Коши—Римана является старшим членом.

Комплексные модельные операторы высших порядков являются степенями оператора Коши—Римана. Упомянем, например, оператор Бицадзе $\partial_{\bar{z}}^2$, оператор Лапласа $\partial_z \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{4}(\partial_x^2 + \partial_y^2)$, играющий важную роль в двумерной математической физике, полианалитический оператор $\partial_{\bar{z}}^m$, полигармонический оператор $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n$ и общий комплексный модельный оператор

$$\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n = (\partial_z \partial_{\bar{z}})^m \partial_{\bar{z}}^{n-m}, \quad m \leq n.$$

Поскольку общее модельное уравнение

$$\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n w = f$$

можно записать в виде системы

$$\partial_{\bar{z}}^{n-m} w = \omega, \quad (\partial_z \partial_{\bar{z}})^m \omega = f,$$

полианалитическое и полигармоническое уравнения являются основными комплексными модельными уравнениями. Эти два уравнения позволяют изучать общее модельное уравнение с помощью итерационного процесса (см., например, [8, 33]).

Потенциальные операторы рассматриваются методом свертки с фундаментальными решениями. При помощи фундаментального решения $-1/(\pi z)$ оператора Коши—Римана фундаментальные решения операторов высших порядков можно найти интегрированием. Итерированная первообразная $-\frac{\bar{z}^{m-1}}{\pi(m-1)!z}$ ядра Коши $-\frac{1}{\pi z}$ по отношению к оператору Коши—Римана $\partial_{\bar{z}}$ приводит к фундаментальному решению полианалитического оператора $\partial_{\bar{z}}^m$ порядка m .

Аналогично, первообразные функции $-1/(\pi z)$ по отношению к оператору ∂_z , т.е.

$$-\frac{1}{\pi} \log z \quad \text{и} \quad -\frac{1}{\pi} [\log z + \log \bar{z}] = -\frac{1}{\pi} \log |z|^2$$

являются фундаментальными решениями оператора Лапласа. Таким же образом получим фундаментальное решение

$$-\frac{1}{\pi} \frac{z^{m-1} \bar{z}^{n-1}}{(m-1)!(n-1)!} \log |z|^2, \quad 0 < m, n,$$

модельного оператора $\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n$. Отметим, что альтерация

$$-\frac{1}{\pi} \frac{z^{m-1} \bar{z}^{n-1}}{(m-1)!(n-1)!} \left[\log |z|^2 - \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{1}{\mu} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu} \right]$$

более удобна (см. [17]).

Соответствующий потенциальный оператор имеет вид

$$T_{m,n} \varrho(z) = \int_D K_{m,n}(z - \zeta) \varrho(\zeta) d\xi d\eta,$$

где ядро задается формулой

$$K_{m,n}(z) = \begin{cases} \frac{(-m)!(-1)^m}{(n-1)!\pi} z^{m-1} \bar{z}^{n-1}, & m \leq 0, \\ \frac{(-n)!(-1)^n}{(m-1)!\pi} z^{m-1} \bar{z}^{n-1}, & n \leq 0, \\ \frac{z^{m-1} \bar{z}^{n-1}}{(m-1)!(n-1)!\pi} \left[\log |z|^2 - \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{1}{\mu} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu} \right], & 1 \leq m, n \end{cases}$$

(см. [17]). При $m = n = 0$ полагаем $T_{0,0} \varrho = \varrho$.

Ядра $K_{m,n}$ слабо сингулярны при $0 < m + n$ и сильно сингулярны при $m + n = 0$. В последнем случае интегралы $T_{m,n} \varrho$ типа Кальдерона—Зигмунда можно рассматривать как интегралы Коши в смысле главного значения. Кроме того, они удовлетворяют соотношениям

$$T_{0,0} = \text{id}, \quad T_{0,1} = T, \quad T_{1,0} = \bar{T}, \quad T_{-1,1} = \Pi, q \quad T_{1,-1} = \bar{\Pi},$$

где

$$T \varrho(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \varrho(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

— оператор Помпейю и

$$\Pi \varrho(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \varrho(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2}$$

— оператор Альфорса—Берлинга. Отметим следующие дифференциальные и мультипликативные свойства:

$$\partial_z^k \partial_{\bar{z}}^l T_{m,n} = T_{m-k, n-l}, \quad k + l \leq m + n, \quad T_{m,-m} T_{k,-k} = T_{m+k, -m-k}.$$

Оператор $T_{m,-m} : L_2(\mathbb{C}; \mathbb{C}) \rightarrow L_2(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ — унитарный интегральный оператор, удовлетворяющий соотношению

$$\|T_{m,-m} \varrho\|_{L_2(\mathbb{C}; \mathbb{C})} = \|\varrho\|_{L_2(\mathbb{C}; \mathbb{C})}.$$

Общее линейное комплексное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n w + \sum_{\substack{\mu+\nu=m+n, \\ (\mu,\nu) \neq (m,n)}} a_{\mu\nu} \partial_z^\mu \partial_{\bar{z}}^\nu w + \sum_{\mu+\nu < m+n} a_{\mu\nu} \partial_z^\mu \partial_{\bar{z}}^\nu w = f$$

можно исследовать, вводя потенциал $w = T_{m,n} \varrho$ для модельного оператора $\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n$ (см. [17]), который превращает дифференциальное уравнение для w в сингулярное интегральное уравнение для ϱ (см. [7]).

2. Полианалитические задачи. При $n = 1$ основная формула представления для полианалитического дифференциального оператора $\partial_{\bar{z}}^n$ описана в следующей теореме.

Теорема 2 (интеграл представления Коши—Помпейю). *Любую функцию $w \in C(\bar{D}; \mathbb{C}) \cap C^1(D; \mathbb{C})$ можно представить в виде*

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\zeta d\eta}{\zeta - z}, \quad z \in D.$$

При $z \notin \bar{D}$ левая часть равна 0.

Доказательство вытекает из формулы Гаусса—Остроградского, примененной к $w(\zeta)/(\zeta - z)$ на $D \setminus \{|\zeta - z| \leq \varepsilon\}$ при $z \in D$ и достаточно малого положительного ε , если $\varepsilon \rightarrow 0$. Если же $z \notin \bar{D}$, доказываемое соотношение представляет собой в точности формулу Гаусса—Остроградского.

После редукции уравнения $\partial_{\bar{z}}^m w = f$ к системе m уравнений Коши—Римана итерационный процесс приводит к формулам представления Коши—Помпейю высших порядков.

Теорема 3 (полианалитическая интегральная формула Коши—Помпейю). *Любую функцию $w \in C^{m-1}(\bar{D}; \mathbb{C}) \cap C^m(D; \mathbb{C})$ можно представить в виде*

$$w(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{(-1)^\mu (\bar{\zeta} - \bar{z})^\mu}{\mu! (\zeta - z)} \partial_{\bar{\zeta}}^\mu w(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(-1)^{m-1} (\bar{\zeta} - \bar{z})^{m-1}}{(m-1)! (\zeta - z)} \partial_{\bar{\zeta}}^m w(\zeta) d\zeta d\eta, \quad z \in D.$$

При $z \notin \bar{D}$ левая часть формулы обращается в 0.

Другой естественный способ вывода этого представления — повторное применение формулы Гаусса—Остроградского к интегралу $T_{0,m} \partial_{\bar{z}}^m w(z)$ и дальнейшее использование формулы Коши—Помпейю.

Однако указанная формула представления непригодна для решения соответствующих краевых задач для неоднородного полианалитического уравнения. Задавая граничные значения производных низшего порядка $\partial_{\bar{z}}^\mu w(z)$, $0 \leq \mu \leq m-1$, приходим к переопределенной краевой задаче. Не всякая гладкая функция на границе области может играть роль краевого значения аналитической функции в этой области. Формула Коши показывает, что в этом случае интеграл Коши обращается в нуль в дополнении области, лежащей в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

2.1. Полианалитическая задача Шварца. В частном случае единичного круга $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ из формулы Коши—Шварца—Помпейю получим представление для корректно поставленной краевой задачи для уравнения Коши—Римана.

Лемма 1. *Задача Шварца для оператора Коши—Римана*

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} w &= f \quad \text{в } \mathbb{D}, & \operatorname{Re} w &= \gamma \quad \text{на } \partial \mathbb{D}, & \operatorname{Im} w(0) &= c, \\ f &\in L_p(\mathbb{D}; \mathbb{C}), \quad 2 < p, & \gamma &\in C(\partial \mathbb{D}; \mathbb{R}), & c &\in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

имеет единственное решение, выражаемое формулой

$$w(z) = ic + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \gamma(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \left[\frac{f(\zeta) \zeta + z}{\zeta \zeta - z} + \frac{\overline{f(\zeta)} (1 + z\bar{\zeta})}{\bar{\zeta} (1 - z\bar{\zeta})} \right] d\zeta d\eta.$$

Приведенная формула является простой комбинацией двух частей формулы Коши—Помпейю. Полианалитический вариант формулы имеет следующий вид (см. [17, 20]).

Теорема 4 (представление Коши—Шварца—Помпейю полианалитического оператора в $\mathbb{D}$). *Любую функцию $w \in C^{m-1}(\bar{\mathbb{D}}; \mathbb{C}) \cap C^m(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, $m \in \mathbb{N}$, можно представить в виде*

$$w(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \left[\frac{i \operatorname{Im} \partial_{\bar{z}}^\mu w(0)}{\mu!} (z + \bar{z})^\mu + \frac{(-1)^\mu}{2\pi i \mu!} \int_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} \partial_{\bar{\zeta}}^\mu w(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^\mu \frac{d\zeta}{\zeta} \right] +$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2\pi(m-1)!} \int_{|\zeta|<1} \left[\frac{\partial_{\bar{\zeta}}^m w(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{\partial_{\bar{\zeta}}^m w(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} \right] (\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{m-1} d\xi d\eta, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Эта формула позволяет построить решение следующей задачи.

Задача Шварца для полианалитического оператора в единичном круге. Найти решение следующей полианалитической задачи:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}^m w &= f && \text{в } \mathbb{D}, \quad f \in L_p(\mathbb{D}; \mathbb{C}), \quad 2 < p, \\ \operatorname{Re} \partial_{\bar{z}}^\mu w &= \gamma_\mu && \text{на } \partial\mathbb{D}, \quad \gamma_\mu \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{R}), \quad 0 \leq \mu \leq m-1, \\ \operatorname{Im} \partial_{\bar{z}}^\mu w(0) &= c_\mu, \quad c_\mu \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \mu \leq m-1. \end{aligned}$$

Эту задачу Шварца можно поставить для любой плоской области D и построить в явном виде единственное решение для некоторых односвязных областей, для которых существует гармоническая функция Грина $G_1(z, \zeta)$ (см. [5, 6]). Отметим, что если $G_1(z, \zeta) = 0$ при $\zeta \in \partial D$ и любом $z \in D$, то гармоническая функция

$$h_1(z, \zeta) = \log |\zeta - z|^2 + G_1(z, \zeta)$$

удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{Re} \left[\frac{d\zeta}{\zeta - z} - h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) d\bar{\zeta} \right] = 0$$

при $\zeta \in \partial D$, $z \in D$.

Определение 1. Область D , для которой функция Грина $G_1(z, \zeta)$ такова, что функция $h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta)$ аналитична по $z \in D$ для всех $\zeta \in \partial D$, называется допустимой областью для задачи Шварца.

Верхняя полуплоскость $\mathbb{H}^+ = \{i(z - \bar{z}) < 0\}$ является допустимой, поскольку

$$G_1(z, \zeta) = \log \left| \frac{\bar{\zeta} - z}{\zeta - z} \right|^2, \quad h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) = \frac{1}{\bar{\zeta} - z}$$

верхний единичный полукруг $\mathbb{D}^+ = \{i(z - \bar{z}) < 0, |z| < 1\}$, для которого

$$G_1(z, \zeta) = \log \left| \frac{\bar{\zeta} - z}{\zeta - z} \frac{1 - z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right|^2, \quad h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) = \frac{1}{\bar{\zeta} - z} - \frac{z}{1 - z\bar{\zeta}} + \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}\bar{\zeta}}$$

допустимым не является.

По-видимому, множество допустимых областей достаточно мало. Характеризацию односвязных допустимых областей можно получить при помощи конформных отображений на круг $\mathbb{D}$ (см. [6]).

Лемма 2. Односвязная область D , обладающая функцией Грина, является допустимой для задачи Шварца тогда и только тогда, когда конформное отображение $\omega : D \rightarrow \mathbb{D}$ удовлетворяет соотношению

$$\left(\frac{\omega(\zeta) - \omega(z)}{\zeta - z} \right)^2 = \omega'(\zeta) \omega'(z)$$

для всех $z, \zeta \in D$.

Допустимые области обладают следующим свойством (см. [5]).

Лемма 3. Для всех $\gamma \in C(\partial D; \mathbb{R})$, где D — плоская область, обладающая гармонической функцией Грина $G_1(z, \zeta) = -\log |\zeta - z|^2 + h_1(z, \zeta)$, где $h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) = 0$, функция

$$\Gamma(z) = \int_{\partial D} \gamma(\zeta) \left[\frac{d\zeta}{\zeta - z} - h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) d\bar{\zeta} \right]$$

является постоянной.

Доказательство вытекает из соотношений $\Gamma(z) + \overline{\Gamma(\bar{z})} = 0$ и $\partial_{\bar{z}}\Gamma(z) = 0$.

Для допустимых областей формула Коши—Шварца—Помпейю также справедлива (см. [21]).

Лемма 4 (представление Коши—Шварца—Помпейю). Пусть D — допустимая область, $G_1(z, \zeta)$ — соответствующая Грина функция и $z_0 \in D$ — произвольная фиксированная точка. Любую функцию $w \in C(\bar{D}; \mathbb{C}) \cap C^1(D; \mathbb{C})$ можно представить в виде

$$w(z) = i \operatorname{Im} w(z_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \operatorname{Re} w(\zeta) \left[\frac{\zeta - z_0}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} + \left(h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) - \frac{1}{\bar{\zeta} - z_0} \right) d\bar{\zeta} \right] - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_D \left\{ w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \left[\frac{\zeta + z - 2z_0}{\zeta - z} \frac{1}{\zeta - z_0} - h_{1\zeta}(z_0, \zeta) \right] - \overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)} \left[2h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) - h_{1\bar{\zeta}}(z_0, \zeta) - \frac{1}{\bar{\zeta} - z_0} \right] \right\} d\xi d\eta.$$

Это представление имеет полианалитический вариант (см. [5, 21]).

Теорема 5 (полианалитическая формула Коши—Шварца—Помпейю). Любую функцию $w \in C^{m-1}(\bar{D}; \mathbb{C}) \cap C^m(D, \mathbb{C})$, $m \in \mathbb{N}$, можно представить в виде

$$w(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \left\{ \frac{i \operatorname{Im} \partial_{\bar{z}}^{\mu} w(z_0)}{\mu!} (z - z_0 + \overline{z - z_0})^{\mu} + \right. \\ + \frac{(-1)^{\mu}}{2\pi i \mu!} \int_{\partial D} \operatorname{Re} \partial_{\bar{\zeta}}^{\mu} w(\zeta) (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{\mu} \left[\frac{\zeta - z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta + \left(h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) - \frac{1}{\bar{\zeta} - z_0} \right) d\bar{\zeta} \right] \Bigg\} + \\ + \frac{(-1)^m}{2\pi(m-1)!} \int_D \left\{ \partial_{\bar{\zeta}}^m w(\zeta) \left[\frac{\zeta + z - 2z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} - h_{1\zeta}(z_0, \zeta) \right] - \right. \\ \left. - \overline{\partial_{\bar{\zeta}}^m w(\zeta)} \left[2h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) - h_{1\bar{\zeta}}(z_0, \zeta) - \frac{1}{\bar{\zeta} - z_0} \right] \right\} (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{m-1} d\xi d\eta.$$

2.2. Полианалитическая задача Дирихле. Полианалитическая формула Коши—Помпейю позволяет выписать решение полианалитической задачи Дирихле в случае, когда оно существует. Для существования решения требуется выполнение условий разрешимости.

Полианалитическая задача Дирихле формулируется следующим образом: найти решение неоднородного полианалитического уравнения

$$\partial_{\bar{z}}^m w = f \quad \text{в } D, \quad f \in L_p(D; \mathbb{C}), \quad 2 < p,$$

удовлетворяющее условиям

$$\partial_{\bar{z}}^{\mu} w = \gamma_{\mu} \quad \text{на } \partial D, \quad \gamma_{\mu} \in C(\partial D; \mathbb{R}), \quad 0 \leq \mu \leq m-1.$$

В случае $m = 1$ формула Коши—Помпейю гарантирует выполнение условия разрешимости и выражает само решение.

Лемма 5. При $f \in L_p(D; \mathbb{C})$, $2 < p$, и $\gamma \in C(\partial D; \mathbb{C})$ задача Дирихле

$$w_{\bar{z}} = f \quad \text{в } D, \quad w = \gamma \quad \text{на } \partial D$$

имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \gamma(\zeta) h_{1\zeta}(z, \zeta) d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) h_{1\zeta}(z, \zeta) d\xi d\eta.$$

При этом решение выражается формулой

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z},$$

Итерирование этого утверждения (см. [21]) приводит к следующей теореме.

Теорема 6. Полианалитическая задача Дирихле с данными $f \in L_p(D; \mathbb{C})$, $2 < p$, $\gamma_\mu \in C(\partial D; \mathbb{C})$, $0 \leq \mu \leq t-1$, разрешима тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \gamma_\mu(\zeta) \partial_\zeta h_1(z, \zeta) d\zeta + \\ & + \sum_{\nu=\mu+1}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \gamma_\nu(\zeta_{\nu-\mu+1}) \left(\frac{1}{\pi} \int_D \right)^{\nu-\mu} \partial_{\zeta_1} h_1(z, \zeta_1) \prod_{\lambda=1}^{\nu-\mu} \frac{d\zeta_\lambda d\eta_\lambda}{\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda+1}} d\zeta_{\nu-\mu+1} = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta_{m-\mu}) \left(\frac{1}{\pi} \int_D \right)^{m-\mu-1} \partial_{\zeta_1} h_1(z, \zeta_1) \prod_{\lambda=1}^{m-\mu-1} \frac{d\zeta_\lambda d\eta_\lambda}{\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda+1}} d\zeta_{m-\mu} d\eta_{m-\mu} \end{aligned}$$

при $0 \leq \mu \leq t-1$. В этом случае решение выражается формулой

$$w(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{(-1)^\mu (\overline{\zeta} - z)^\mu}{\mu! (\zeta - z)} \gamma_\mu(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(-1)^{m-1} (\overline{\zeta} - z)^{m-1}}{(m-1)! (\zeta - z)} f(\zeta) d\zeta d\eta.$$

Задача Дирихле в единичном круге была решена в [18]. Для уравнения Коши—Римана можно рассматривать краевую задачу Неймана, однако его итерация для полианалитического уравнения произвольного порядка практически бесполезна из-за сложности условия разрешимости. Для полианалитических уравнений в частных случаях рассматриваются также комбинации условий Дирихле, Неймана и Шварца (см., например, [28]).

3. Полигармонические задачи. Хорошо известная формула интегрального представления второго порядка для оператора Лапласа, которая является непосредственным следствием основной формулы Коши—Помпейю и ее комплексно-сопряженного аналога,

$$w(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} \log |\zeta - z|^2 - \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) \log |\zeta - z|^2 \right] ds_\zeta + \frac{1}{\pi} \int_D w_\zeta \bar{\zeta}(\zeta) \log |\zeta - z|^2 d\zeta d\eta, \quad z \in D,$$

где ∂_{ν_ζ} — производная по направлению внешней нормали к ∂D в точке ζ , является несобственной по отношению к краевым задачам. Гармоническая функция определяется либо своими граничными значениями, либо (с точностью до постоянного члена) своей нормальной производной на границе.

3.1. Гармоническая задача Робена. Чтобы модифицировать формулу представления, воспользуемся гармонической функцией Грина $G_1(z, \zeta)$ и функцией Неймана $N_1(z, \zeta)$. Обе эти функции являются частными случаями гармонической функцией Робена (см. [23]).

Определение 2. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha^2 + \beta^2$. Вещественнозначная функция $R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta)$, $z, \zeta \in D$, $z \neq \zeta$, называется функцией Робена, если для всех $\zeta \in D$ она обладает следующими свойствами:

- (i) $R_{1;\alpha,\beta}(\cdot, \zeta)$ — гармоническая функция в $D \setminus \{\zeta\}$, непрерывно дифференцируемая в $\overline{D} \setminus \{\zeta\}$;
- (ii) $h(z, \zeta) = R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) + \log |\zeta - z|^2$ — гармоническая функция от $z \in D$,
- (iii) $\alpha R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) + \beta \partial_{\nu_z} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \beta \sigma(s)$ при $z = z(s) \in \partial D$, где ∂_{ν_z} — производная по направлению внешней нормали к ∂D , s — натуральный параметр (длина дуги) на ∂D , функция плотности σ — это вещественнозначная кусочно постоянная функция аргумента s , для которой конечен интеграл $\int_{\partial D} \sigma(s) ds$ (конечная масса);
- (iv) $\beta \int_{\partial D} \sigma(s_z) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) ds_z = 0$.

Кроме того, функции Робена также обладают следующими свойствами:

$$R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z), \\ R_{1;\alpha,0}(z, \zeta) = G_1(z, \zeta), \quad R_{1;0,\beta}(z, \zeta) = N_1(z, \zeta).$$

Теорема 7 (формула представления Робена). *Любую функцию $w \in C^1(\overline{D}; \mathbb{C}) \cap C^2(D; \mathbb{C})$ можно представить в виде*

$$w(z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) - \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) \right\} ds_\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) d\xi d\eta.$$

Это представление можно задать, применив граничные свойства функции $R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta)$.

Следствие 1. *Любую функцию $w \in C^1(\overline{D}; \mathbb{C}) \cap C^2(D; \mathbb{C})$ можно представить в виде*

$$w(z) = \frac{1}{4\pi\beta} \int_{\partial D} \{ \alpha w(\zeta) + \beta \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) \} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) ds_\zeta - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \sigma w(\zeta) ds_\zeta - \\ - \frac{1}{\pi} \int_D \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) d\xi d\eta, \quad \text{если } \beta \neq 0, \\ w(z) = -\frac{1}{4\pi\alpha} \int_{\partial D} \{ \alpha w(\zeta) + \beta \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) \} \partial_{\nu_\zeta} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) ds_\zeta + \frac{\beta}{4\pi\alpha} \int_{\partial D} \sigma \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) ds_\zeta - \\ - \frac{1}{\pi} \int_D \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) d\xi d\eta, \quad \text{если } \alpha \neq 0.$$

В [23] были найдены функции Робена для круга $\mathbb{D}$ и концентрического круга $R = \{0 < r < |z| < 1\}$. Для круга $\mathbb{D}$ функция плоскости σ равна тождественно -2 , а функция Робена имеет вид

$$R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \begin{cases} \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 + 2\beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{\alpha + k\beta}, & \text{если } -\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{N}, \\ \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 + 2\beta \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq k_0}}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{\alpha + k\beta} + \\ + 2 \left[(z\bar{\zeta})^{k_0} \log(z\bar{\zeta}) + (\bar{z}\zeta)^{k_0} \log(\bar{z}\zeta) \right], & \text{если } k_0 = -\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Функция Робена для R имеет вид

$$R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \begin{cases} G_1(z, \zeta) + 2\beta \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + k\beta)(1 - r^{2k})} & \text{если } \frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Z}, \\ G_1(z, \zeta) + 2\beta \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0, k_0}}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + k\beta)(1 - r^{2k})} + \\ + \frac{2}{1 - r^{2k_0}} \left[(z\bar{\zeta})^{k_0} \log(z\bar{\zeta}) + (\bar{z}\zeta)^{k_0} \log(\bar{z}\zeta) \right] & \text{если } k_0 = -\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

где

$$G_1(z, \zeta) = \frac{\log |z|^2 \log |\zeta|^2}{\log r^2} + \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 + \log \prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(1 - r^{2k} z\bar{\zeta})(1 - \frac{r^{2k}}{z\bar{\zeta}})}{(1 - r^{2k} \frac{z}{\zeta})(1 - r^{2k} \frac{\zeta}{z})} \right|^2$$

(см. [23, 38]). Доказательства приведенных соотношений для функций Робена основаны на свойствах задачи Шварца для аналитических функций, поскольку вещественная гармоническая функция $h_1(\cdot, \zeta)$ является вещественной частью аналитической в D функции для всех $\zeta \in \partial D$.

Краевая задача Робена включает также задачи Дирихле и Неймана. Естественно, что их решения, включая условия разрешимости, покрываются результатом для задачи Робена.

Теорема 8. Пусть $f \in L_p(\mathbb{D}; \mathbb{C})$, $2 < p$, $\gamma \in C(\partial \mathbb{D}; \mathbb{C})$. Задача Робена

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} w = f \quad \text{в } \mathbb{D}, \quad \alpha w + \beta \partial_\nu w = \gamma \quad \text{на } \partial \mathbb{D},$$

обладает следующими свойствами:

- (i) при $\beta \neq 0$ она разрешима тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2\beta}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) d\xi d\eta$$

причем решение имеет вид

$$w(z) = \frac{1}{4\pi i \beta} \int_{\partial \mathbb{D}} \gamma(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) f(\zeta) d\xi d\eta;$$

- (ii) при $\alpha \neq 0$ задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\frac{\beta}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \partial_\nu w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2\beta}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) d\xi d\eta,$$

причем решение имеет вид

$$w(z) = -\frac{1}{4\pi i \alpha} \int_{\partial \mathbb{D}} \gamma(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\beta}{4\pi i \alpha} \int_{\partial \mathbb{D}} \sigma \partial_\nu w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) f(\zeta) d\xi d\eta.$$

Замечание 1. Если $\alpha = 0$, то $\gamma = \beta \partial_\nu w$, и условия разрешимости задачи Неймана хорошо известны (см., например, [12]). В случае $\beta = 0$ условие разрешимости отсутствует.

Краевую задачу Робена можно изучать и без использования функции Робена (см., например, [34]).

3.2. Полигармонические задачи. Задачи для уравнения Пуассона порядка n

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w = f \quad \text{в } D$$

можно ставить, используя различные краевые условия, например,

$$\partial_\nu^\mu w = \gamma_\mu, \quad 0 \leq \mu \leq n-1, \quad \text{на } \partial D$$

для классической полигармонической задачи Дирихле,

$$\partial_\nu^\mu w = \gamma_\mu, \quad 1 \leq \mu \leq n, \quad \text{на } \partial D$$

для полигармонической задачи Неймана,

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu w = \gamma_\mu, \quad 0 \leq \mu \leq n-1, \quad \text{на } \partial D,$$

для полигармонической задачи Рикье (Навье) и т. д. Допустимы все типы комбинаций взаимно независимых (линейно независимых) условий; их число должно быть равно n . В случае переопределенных задач требуются также нетривиальные условия разрешимости. Укажем еще следующие краевые задачи для полигармонического уравнения Пуассона порядка n :

Задача I: $\partial_\nu (\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu w = \gamma_\mu$, $0 \leq \mu \leq n-1$, на ∂D ;

Задача II: $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu w = \gamma_{0\mu}$, $0 \leq 2\mu \leq n-1$, $\partial_\nu (\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu w = \gamma_{1\mu}$, $0 \leq 2\mu \leq n-2$, на ∂D .

Для этих задач требуется нахождение соответствующих фундаментальных решений для оператора Лапласа порядка n , т.е. полигармонических функций Грина. Классическим примером является полигармоническая функция Грина—Альманси.

Определение 3. Функция Грина—Альманси порядка n для области D — это вещественнозначная функция $\mathcal{G}_n(z, \zeta)$, $z, \zeta \in D$, $z \neq \zeta$, удовлетворяющая следующим условиям:

- (i) $\mathcal{G}_n(\cdot, \zeta)$ — полигармоническая функция порядка n в $D \setminus \{\zeta\}$;
- (ii) $\mathcal{G}_n(z, \zeta) + \frac{|\zeta - z|^{2(n-1)}}{(n-1)!^2} \log |\zeta - z|^2$ — полигармоническая функция порядка n в D для всех $\zeta \in D$;
- (iii) $(\partial_{\nu_z}^\mu \mathcal{G}_n(z, \zeta) = 0$ при $z \in \partial D$, $\zeta \in D$, $0 \leq \mu \leq n-1$.

Эта функция симметрична, т.е.

$$\mathcal{G}_n(z, \zeta) = \mathcal{G}_n(\zeta, z), \quad z, \zeta \in D, \quad z \neq \zeta,$$

и удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu \mathcal{G}_n(z, \zeta) &= 0, \quad 0 \leq 2\mu \leq n-1, \\ \partial_{\nu_z} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu \mathcal{G}_n(z, \zeta) &= 0, \quad 0 \leq 2\mu \leq n-2, \end{aligned}$$

при $z \in \partial D$, $\zeta \in D$.

Эта функция Грина полезна при исследовании задачи Дирихле (см. [2, 9])

$$\partial_{\nu_z}^\mu w = \gamma_\mu, \quad 0 \leq \mu \leq n-1, \quad \text{на } \partial D,$$

и Задачи II (см. [13, 25]).

Теорема 9. Пусть $f \in L_p(D; \mathbb{C})$, $p > 2$, $\gamma_\mu \in C^{n-2\mu}(\partial D; \mathbb{C})$, $0 \leq 2\mu \leq n-1$, $\hat{\gamma}_\mu \in C^{n-1-2\mu}(\partial D; \mathbb{C})$, $0 \leq 2\mu \leq n-2$. Краевая задача II

$$\begin{aligned} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w &= f \quad \text{в } D, \\ (\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu w &= \gamma_\mu, \quad 0 \leq 2\mu \leq n-1, \\ \partial_{\nu_z} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu w &= \hat{\gamma}_\mu, \quad 0 \leq 2\mu \leq n-2, \quad \text{на } \partial D, \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$\begin{aligned} w(z) = & - \sum_{\mu=0}^{[n/2]-1} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{n-\mu-1} \mathcal{G}_n(z, \zeta) \gamma_\mu(\zeta) ds_\zeta + \\ & + \sum_{\mu=0}^{[(n-1)/2]} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{n-\mu-1} \mathcal{G}_n(z, \zeta) \hat{\gamma}_\mu(\zeta) ds_\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \mathcal{G}_n(z, \zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^n \omega(\zeta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Явные выражения функции Грина—Альманси для единичного круга $\mathbb{D}$ (см. [2, 9, 11]) и для верхней полуплоскости $\mathbb{H}^+ = \{i(z - \bar{z}) < 0\}$ (см. [15, 31]) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (n-1)!^2 \mathcal{G}_n(z, \zeta) &= |\zeta - z|^{2(n-1)} \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 - \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{\mu} |\zeta - z|^{2(n-1-\mu)} (1 - |z|^2)^\mu (1 - |\zeta|^2)^\mu, \\ (n-1)!^2 \mathcal{G}_n(z, \zeta) &= |\zeta - z|^{2(n-1)} \log \left| \frac{\bar{\zeta} - z}{\zeta - z} \right|^2 + \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{\mu} |\zeta - z|^{2(n-1-\mu)} (z - \bar{z})^\mu (\zeta - \bar{\zeta})^\mu. \end{aligned}$$

Итерированные и гибридные полигармонические функции Грина. Перепишем уравнение Пуассона порядка n с условиями Рикье в виде следующей системы задач Дирихле для уравнения Пуассона (см. [22]):

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} w_\mu = w_{\mu+1} \quad \text{в } D, \quad w_\mu = \gamma_\mu \quad \text{на } \partial D, \quad 0 \leq \mu \leq n-1,$$

где $w_0 = w$ и $w_n = f$. Итерируя решения этих задач,

$$w_\mu(z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \gamma_\mu(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} G_1(z, \zeta) ds_\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\mu+1}(\zeta) G_1(z, \zeta) d\xi d\eta,$$

получим

$$w(z) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\mu=0}^{n-1} \int \gamma_{\mu}(\zeta) \partial_{\nu_{\zeta}} G_{\mu+1}(z, \zeta) ds_{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) G_n(z, \zeta) d\xi d\eta,$$

где

$$G_{\mu}(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_D G_1(z, \tilde{\zeta}) G_{\mu-1}(\tilde{\zeta}, \zeta) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}, \quad 2 \leq \mu \leq n.$$

Теорема 10. Если $f \in L_p(D; \mathbb{C})$, $2 < p$, и $\gamma_{\mu} \in C^{0,\alpha}(\partial D; \mathbb{C})$, $0 < \alpha < 1$, то краевая задача Рикье

$$\begin{aligned} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w &= f \quad \text{в } D, \\ (\partial_z \partial_{\bar{z}})^{\mu} w &= \gamma_{\mu} \quad \text{на } \partial D, \quad 0 \leq \mu \leq n-1, \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \sum_{\mu=0}^{n-1} g_{\mu+1}(z, \zeta) \gamma_{\mu}(\zeta) ds_{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_D G_n(z, \zeta) f(\zeta) d\xi d\eta,$$

где $g_{\mu}(z, \zeta) = -\frac{1}{2} \partial_{\nu_z} G_{\mu}(z, \zeta)$, $\mu \in \mathbb{N}$, — полигармонические ядра Пуассона.

Итерированная полигармоническая функция Грина $G_n(z, \zeta)$ отличается от функции Грина—Альманси $\mathcal{G}_n(z, \zeta)$ своим граничным поведением. Она обладает следующими свойствами:

- (1) $G_n(\cdot, \zeta)$ — полигармоническая функция порядка n в $D \setminus \{\zeta\}$;
- (2) $G_n(z, \zeta) + \frac{|\zeta - z|^{2(n-1)}}{(n-1)!^2} \log |\zeta - z|^2$ — полигармоническая функция порядка n при $z \in D$ и $\zeta \in D$;
- (3) $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^{\mu} G_n(z, \zeta) = 0$ при $0 \leq \mu \leq n-1$, $z \in \partial D$ и $\zeta \in D$.

Кроме того, она симметрична, т.е. $G_n(z, \zeta) = \widehat{G}_n(\zeta, z)$ при $z, \zeta \in D$, $z \neq \zeta$, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}}) \widehat{G}_n(z, \zeta) = \widehat{G}_{n-1}(z, \zeta) \quad \text{в } D$$

для всех $\zeta \in D$ и имеет однородные данные Дирихле

$$\widehat{G}_n(z, \zeta) = 0 \quad \text{на } \partial D.$$

Аналогично можно итерировать функции Неймана и Робена; это приводит к итерированным полигармоническим функциям Неймана

$$N_n(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_D N_1(z, \tilde{\zeta}) N_{n-1}(\tilde{\zeta}, \zeta) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq n,$$

(эта функция используется для исследования краевой задачи

$$\partial_{\nu} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^{\mu} w = \gamma_{\mu}, \quad 0 \leq \mu \leq n-1, \quad \text{на } \partial D,$$

см. [24]), и Робена

$$R_{n;\alpha,\beta}(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_D R_{1;\alpha,\beta}(z, \tilde{\zeta}) R_{n-1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, \zeta) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq n$$

(эта функция используется для исследования краевой задачи

$$(\alpha + \beta \partial_{\nu}) (\partial_z \partial_{\bar{z}})^{\mu} w = \gamma_{\mu}, \quad 0 \leq \mu \leq n-1, \quad \text{на } \partial D,$$

см. [30]).

Свертка функций Грина и гибридные полигармонические функции Грина. К различным функциям Грина можно применить операцию свертки, что приводит к полигармоническим функциям Грина высших порядков, связанным с различными краевыми задачами. Начиная с двух гармонических фундаментальных решений с различным граничным поведением, т.е. функций Грина, Неймана или Робена, получим различные гибридные бигармонические фундаментальные решения Грина—Неймана, Грина—Робена, Неймана—Робена, Неймана—Грина, Робена—Грина и Робена—Неймана. Кроме того, можно рассмотреть и функции Грина—Грина $G_2(z, \zeta)$, Неймана—Неймана $N_2(z, \zeta)$ и Робена—Робена $R_{2;\alpha,\beta}(z, \zeta)$, а также гибридное фундаментальное решение $R_{1;\alpha,\beta}R_{1;\gamma,\delta}(z, \zeta)$ и бигармоническую функцию Грина—Альманси $\mathcal{G}_2(z, \zeta)$. Очевидно, существует множество полигармонических гибридных функций Грина; чем выше порядок класса рассматриваемых полигармонических функций, тем шире многообразие соответствующих гибридных функций Грина.

Определение 4. Свертка

$$K_m \hat{K}_n(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_D K_m(z, \tilde{\zeta}) \hat{K}_n(\tilde{\zeta}, \zeta) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}$$

полигармонической функции Грина порядка m , например,

$$K_m(z, \zeta) \in \left\{ \mathcal{G}_m(z, \zeta), G_m(z, \zeta), N_m(z, \zeta), R_{m;\alpha,\beta}(z, \zeta), \dots \right\}$$

и полигармонической функции Грина порядка n , $\hat{K}_n(z, \zeta)$, называется гибридной полигармонической функцией Грина порядка $m + n$.

Теорема 11. Обозначим через B_m множество m граничных условий и дополнительных условий для $K_m(z, \zeta)$, $z \in \partial D$, $\zeta \in D$. Предположим, выполнены следующие условия:

- (i) $K_m(\cdot, \zeta)$ — полигармоническая функция порядка m в $D \setminus \{\zeta\}$;
- (ii) $K_m(z, \zeta) + \frac{|\zeta - z|^{2(m-1)}}{(m-1)!^2} \log |\zeta - z|^2$ — полигармоническая функция порядка m в D для всех $\zeta \in D$;
- (iii) $K_m(z, \zeta)$ удовлетворяет условиям B_m при $z \in \partial D$ and $\zeta \in D$.

Тогда для всех $\zeta \in D$ функция $K_m \hat{K}_n(z, \zeta)$, рассматриваемая как функция от z , является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^m K_m \hat{K}_n(z, \zeta) &= \hat{K}_n(z, \zeta) \quad \text{в } D, \\ B_m(K_m \hat{K}_n(z, \zeta)) &= -\frac{1}{\pi} \int_D \left(B_m(K_m(z, \tilde{\zeta})) \right) \hat{K}_n(\tilde{\zeta}, \zeta) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \quad \text{на } \partial D, \end{aligned}$$

и для всех фиксированных $z \in D$, как функция от ζ , — решением краевой задачи

$$\begin{aligned} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^n (K_m \hat{K}_n(z, \zeta)) &= K_m(z, \zeta) \quad \text{в } D, \\ \hat{B}_n(K_m \hat{K}_n(z, \zeta)) &= -\frac{1}{\pi} \int_D K_m(z, \tilde{\zeta}) \left(\hat{B}_n(\hat{K}_n(\tilde{\zeta}, \zeta)) \right) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \quad \text{на } \partial D. \end{aligned}$$

В случае, когда обе функции $K_m(z, \zeta)$ и $\hat{K}_n(z, \zeta)$ симметричны, имеем

$$K_m \hat{K}_n(z, \zeta) = \hat{K}_n K_m(\zeta, z)$$

(см. [14]).

В качестве примера тетрагармонической гибридной функции Грина приведем свертку $\mathcal{G}_2 G_2(z, \zeta)$ бигармонической функции Грина—Альманси $\mathcal{G}_2(z, \zeta)$ и итерированной бигармонической функции Грина $G_2(z, \zeta)$. В дальнейшем будем обозначать эту функцию by $H_4(z, \zeta)$:

$$H_4(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_D G_2(z, \tilde{\zeta}) \hat{G}_2(\tilde{\zeta}, \zeta) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}.$$

Поскольку G_2 — фундаментальное решение оператора $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^2$, H_4 является решением задачи

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}})^2 H_4(z, \zeta) = \widehat{G}_2(z, \zeta) \quad \text{в } D \text{ для всех } \zeta \in D.$$

Кроме того,

$$H_4(z, \zeta) = 0, \quad \partial_{\nu_z} H_4(z, \zeta) = 0 \quad \text{при } z \in \partial D, \zeta \in D.$$

Поскольку $\widehat{G}_2$ — фундаментальное решение оператора $(\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2$, H_4 является решением задачи

$$(\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2 H_4(z, \zeta) = G_2(z, \zeta) \quad \text{в } D \text{ для всех } z \in D$$

и удовлетворяет соотношениям

$$H_4(z, \zeta) = 0, \quad \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} H_4(z, \zeta) = 0 \quad \text{при } \zeta \in \partial D, z \in D.$$

Функция $H_4(z, \zeta)$ обладает также следующими свойствами:

- (i) $H_4(z, \zeta)$ — тетрагармоническая функция при $z \in D \setminus \{\zeta\}$ и $\zeta \in D \setminus \{z\}$;
- (ii) $H_4(z, \zeta) + \frac{|\zeta - z|^6}{3!^2} \log |\zeta - z|^2$ — тетрагармоническая функция при $z, \zeta \in D$;
- (iii) $H_4(z, \zeta) = 0$, $\partial_{\nu_z} H_4(z, \zeta) = 0$, $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^2 H_4(z, \zeta) = 0$, $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^3 H_4(z, \zeta) = 0$ при $z \in \partial D$ и $\zeta \in D$;
- (iv) $H_4(z, \zeta) = 0$, $\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} H_4(z, \zeta) = 0$, $(\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2 H_4(z, \zeta) = 0$, $\partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2 H_4(z, \zeta) = 0$ при $\zeta \in \partial D$ и $z \in D$.

Очевидно, функция $H_4(z, \zeta)$ не является симметричной.

Теорема 12. Любую функцию $\omega \in C^8(D; \mathbb{C}) \cap C^7(\overline{D}; \mathbb{C})$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \omega(z) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^3 H_4(z, \zeta) \omega(\zeta) - (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^3 H_4(z, \zeta) \partial_{\nu_\zeta} \omega(\zeta) + \partial_{\nu_\zeta} \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} H_4(z, \zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2 \omega(\zeta) + \right. \\ & \left. + \partial_{\nu_\zeta} H_4(z, \zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^3 \omega(\zeta) \right\} ds_\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D H_4(z, \zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^4 \omega(\zeta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(z) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^3 H_4(\zeta, z) \omega(\zeta) + \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2 H_4(\zeta, z) \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta) + \partial_{\nu_\zeta} \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} H_4(\zeta, z) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2 \omega(\zeta) - \right. \\ & \left. - \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} H_4(\zeta, z) \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2 \omega(\zeta) \right\} ds_\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D H_4(\zeta, z) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^4 \omega(\zeta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Вычисление полигармонических функций Грина высших порядков для конкретных областей в явном виде является сложной задачей даже для простых областей типа единичного круга $\mathbb{D}$, кругового сектора, полуплоскости, кольца и т. п. Этой теме посвящено несколько работ, но результаты не выходят за рамки тетрагармонического случая (см. [26, 30, 31, 38, 40]). В [29] полигармонические ядра Пуассона $g_n(z, \zeta)$ произвольного порядка для единичного круга были построены без применения полигармонических итерированных функций Грина $G_n(z, \zeta)$. Итерации операторов Помпейю использовались в [35, 39]; некоторые из них нашли применение в клиффордовом и октонионном анализе (см. [10, 16, 19]). Полигармонические функции Грина высших размерностей для шаров и полуплоскостей построены, например, в [3]. Упомянем также работы [4, 27, 32, 36].

4. Приложение. Примеры функций Грина, Неймана и Робена для единичного круга $\mathbb{D}$. Подробности см. например, в [30, 37, 40].

4.1. Гармонические функции.

$$\begin{aligned} G_1(z, \zeta) &= \mathcal{G}_1(z, \zeta) = \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2, \\ N_1(z, \zeta) &= -\log |(\zeta - z)(1 - z\bar{\zeta})|^2, \end{aligned}$$

где $\partial_{\nu_z} N_1(z, \zeta) = -2$ на $\partial\mathbb{D}$,

$$R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 + 2\beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{\alpha + k\beta}, \quad \text{если} \quad -\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{N},$$

$$R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 + 2\beta \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq k_0}}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{\alpha + k\beta} +$$

$$+ 2 \left[(z\bar{\zeta})^{k_0} \log(z\bar{\zeta}) + (\bar{z}\zeta)^{k_0} \log(\bar{z}\zeta) \right], \quad \text{если} \quad k_0 = -\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{N}.$$

4.2. Бигармонические функции.

$$\mathcal{G}_2(z, \zeta) = |\zeta - z|^2 G_1(z, \zeta) - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2),$$

$$G_2(z, \zeta) = |\zeta - z|^2 G_1(z, \zeta) + (1 - |z|^2) \left(1 - |\zeta|^2 \left[\frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{z\bar{\zeta}} + \frac{\log(1 - \bar{z}\zeta)}{\bar{z}\zeta} \right] \right),$$

$$N_2(z, \zeta) = |\zeta - z|^2 [4 + N_1(z, \zeta)] - 4 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k^2} - 2(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) \log |1 - z\bar{\zeta}|^2 -$$

$$- (1 + |z|^2)(1 + |\zeta|^2) \left[\frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{z\bar{\zeta}} + \frac{\log(1 - \bar{z}\zeta)}{\bar{z}\zeta} \right],$$

$$R_{2;\alpha,\beta}(z, \zeta) = G_2(z, \zeta) + 2\beta(|z|^2 + |\zeta|^2 - 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + k\beta)(k+1)} -$$

$$- 4\beta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + k\beta)^2(k+1)}, \quad -\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{N},$$

$$G_1 N_1(z, \zeta) = -|\zeta - z|^2 \log |\zeta - z|^2 + 2(|\zeta|^2 + |z|^2) -$$

$$- (2 + |\zeta|^2 - |z|^2) \left[\log |1 - z\bar{\zeta}|^2 + \frac{1 + \log z\bar{\zeta}}{z\bar{\zeta}} + \frac{1 + \log \bar{z}\zeta}{\bar{z}\zeta} \right].$$

4.3. Тригармоническая функция Грина для $\mathbb{D}$.

$$G_3(z, \zeta) = \frac{1}{4} |\zeta - z|^4 \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 + \frac{1}{4} (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta - 4) -$$

$$- \frac{1}{4} (1 - |z|^4)(1 - |\zeta|^4) \left[\frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{(z\bar{\zeta})^2} + \frac{\log(1 - \bar{z}\zeta)}{(\bar{z}\zeta)^2} + \frac{1}{z\bar{\zeta}} + \frac{1}{\bar{z}\zeta} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)(|z|^2 + |\zeta|^2) \left[\frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{z\bar{\zeta}} + \frac{\log(1 - \bar{z}\zeta)}{\bar{z}\zeta} \right] +$$

$$+ (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)^2} \left[(z\bar{\zeta})^l + (\bar{z}\zeta)^l \right].$$

4.4. Тетрагармоническая функция Грина для $\mathbb{D}$.

$$G_4(z, \zeta) = \frac{1}{36} |\zeta - z|^6 \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 - \frac{1}{36} (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)(\bar{z}^2 \zeta^2 + z^2 \bar{\zeta}^2 - 30) +$$

$$+ \frac{1}{12} (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)(|\zeta|^2 + |z|^2)(\bar{z}\zeta + z\bar{\zeta} - 4) -$$

$$- \frac{1}{72} (1 - |z|^4)(1 - |\zeta|^4)(\bar{z}\zeta + z\bar{\zeta}) +$$

$$+ \frac{1}{36} (1 - |z|^6)(1 - |\zeta|^6) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z\bar{\zeta}} + \frac{1}{\bar{z}\zeta} \right) + \frac{1}{(\bar{z}\zeta)^2} + \frac{1}{(z\bar{\zeta})^2} + \frac{\log(1 - \bar{z}\zeta)}{(\bar{z}\zeta)^3} + \frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{(z\bar{\zeta})^3} \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{12} \left[(1-|z|^6)(1-|\zeta|^4) + (1-|z|^4)(1-|\zeta|^6) + 3(1-|z|^2)(1-|\zeta|^4) + \right. \\
& + 3(1-|z|^4)(1-|\zeta|^2) \left. \right] \left[\frac{\log(1-\bar{z}\zeta)}{(\bar{z}\zeta)^2} + \frac{\log(1-z\bar{\zeta})}{(z\bar{\zeta})^2} + \frac{1}{\bar{z}\zeta} + \frac{1}{z\bar{\zeta}} \right] + \\
& + \frac{1}{12} \left[(1-|z|^6)(1-|\zeta|^2) + (1-|z|^2)(1-|\zeta|^6) + 3(1-|z|^4)(1-|\zeta|^4) + \right. \\
& + 3(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2) \left. \right] \left[\frac{\log(1-\bar{z}\zeta)}{\bar{z}\zeta} + \frac{\log(1-z\bar{\zeta})}{z\bar{\zeta}} \right] - \\
& - (1-|z|^2)(1-|\zeta|^2) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^l + (\bar{z}\zeta)^l}{(l+1)^3} + \\
& + \frac{1}{2} (1-|z|^2)(1-|\zeta|^2) (1+|z|^2+|\zeta|^2) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^l + (\bar{z}\zeta)^l}{(l+1)^2}.
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1988.
2. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
3. Немченко М. Ю. Явное построение функции Грина для полигармонического уравнения в случае четномерного пространства/ Ph.D. thesis. — Алма-Ата: Казахский национальный университет им. аль-Фараби, 2009.
4. Aksoy Ü. Schwarz problem for complex partial differential equations/ Ph.D. thesis. — Ankara, 2006.
5. Aksoy Ü., Begehr H., Celebi A. O. A. V. Bitsadze's observation on bianalytic functions and the Schwarz problem// Complex Var. Elliptic Equ. — 2019. — 64, № 8. — P. 1257–1274.
6. Aksoy Ü., Begehr H., Celebi A. O. A. V. Bitsadze's observation on bianalytic functions and the Schwarz problem revisited. — FU Berlin, 2019.
7. Aksoy Ü., Celebi A. O. A survey on the boundary-value problems for complex partial differential equations// Adv. Dyn. Syst. Appl. — 2010. — 5. — P. 133–158.
8. Aksoy Ü., Celebi A. O. Mixed boundary-value problems for higher-order complex partial differential equations// Analysis. — 2010. — 30. — P. 157–169.
9. Almansi E. Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n} = 0$ // Ann. Mat. — 1899. — 3, № 2. — P. 1–51.
10. Begehr H. Iterated integral operators in Clifford analysis// J. Anal. Appl. — 1999. — 18. — P. 361–377.
11. Begehr H. Orthogonal decompositions of the function space $L_2(\overline{D}; \mathbb{C})$ // J. Reine Angew. Math. — 2002. — 549. — P. 191–219.
12. Begehr H. Boundary-value problems in complex analysis, I, II// Bol. Asoc. Mat. Venez. — 2005. — 12. — P. 65–85; 217–250.
13. Begehr H. A particular polyharmonic Dirichlet problem// in: Complex Analysis and Potential Theory. — Hackensack, New Jersey: World Scientific, 2007. — P. 84–115.
14. Begehr H. Iterated polyharmonic Green functions for plane domains// Acta Math. Vietnam. — 2011. — 36. — P. 169–181.
15. Begehr H., Gaertner E. A Dirichlet problem for the inhomogeneous polyharmonic equation in the upper half-plane// Georg. Math. J. — 2007. — 14. — P. 33–52.
16. Begehr H., Gackstater F., Krausz A. Integral representations in octonionic analysis// (Kajiwara J. et al., eds.) Proc. 10. Int. Conf. Complex Analysis. — Busan, Korea, 2002. — P. 1–7.
17. Begehr H., Hile G. N. A hierarchy of integral operators// Rocky Mountain J. Math. — 1997. — 27. — P. 669–706.
18. Begehr H., Kumar A. Boundary-value problems for the inhomogeneous polyanalytic equation, I// Analysis. — 2005. — 25. — P. 55–71.
19. Begehr H., Otto H., Zhang Z. X. Differential operators, their fundamental solutions, and related integral representations in Clifford analysis// Complex Var. Ell. Equ. — 2006. — 51. — P. 407–427.
20. Begehr H., Schmiersau D. The Schwarz problem for polyanalytic functions// J. Anal. Appl. — 2005. — 24. — P. 341–351.

21. *Begehr H., Shuypeyeva B.* Polyanalytic boundary-value problems for plane domains with harmonic Green function. — FU Berlin, 2019.
22. *Begehr H., Vaitekhovich T.* Iterated Dirichlet problem for the higher-order Poisson equation// *Le Matematiche*. — 2008. — 63, № 1. — P. 139–154.
23. *Begehr H., Vaitekhovich T.* Modified harmonic Robin function// *Complex Var. Ell. Equ.* — 2013. — 58. — P. 483–496.
24. *Begehr H., Vanegas C. J.* Iterated Neumann problem for the higher-order Poisson equation// *Math. Nachr.* — 2006. — 279. — P. 38–57.
25. *Begehr H., Vu T. N. H., Zhang Z. X.* Polyharmonic Dirichlet problems// *Proc. Steklov Inst. Math.* — 2006. — 255. — P. 13–34.
26. *Burgumbayeva S.* Boundary-value problems for triharmonic functions in the unit disc/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2009.
27. *Chaudhary A.* Complex boundary-value problems in unbounded domains/ Ph.D. thesis. — Univ. of Delhi, 2009.
28. *Di Teodoro A. N., Vanegas C. J.* Dirichlet–Neumann–Schwarz problem for the nonhomogeneous trianalytic equation// *Bol. Asoc. Mat. Venez.* — 2012. — 19, № 2. — P. 113–128.
29. *Du Z.* Boundary-value problems for higher order complex partial differential equations/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2008.
30. *Emek S.* Iterated Robin problem for the higher-order Poisson equation. — FU Berlin, 2019.
31. *Gaertner E.* Basic complex boundary-value problems in the upper half plane/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2006.
32. *Krausz A.* Integral representations with Green functions of higher order in domains and polydomains/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2005.
33. *Kumar A., Prakash R.* Mixed boundary-value problem for inhomogeneous polyanalytic harmonic equation// (*Begehr H. G. W. et al.*, ed.) *Proc. 5th Int. ISAAC Congr. (Catania, Italy, July 25–30, 2005)*. — World Scientific, 2009. — P. 1149–1161.
34. *Mohammed A., Tuffaha A.* On boundary control of the Poisson equation with the third boundary condition// *J. Math. Anal. Appl.* — 2018. — 459, № 1. — P. 217–235.
35. *Otto H. A. M.* Cauchy–Pompeiu integral representations in Clifford analysis/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2006.
36. *Prakash R.* Boundary-value problems in complex analysis/ Ph.D. thesis. — Univ. of Delhi, 2006.
37. *Shuypeyeva B.* Some basic boundary-value problems for complex partial differential equations in quarter ring and half hexagon/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2013.
38. *Vaitsiakhovich T.* Boundary-value problems for complex partial differential equations in a ring domain/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2008.
39. *Vu T. N. H.* Integral representations in quaternionic analysis related to the Helmholtz operator/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2005.
40. *Wang Y.* Boundary-value problems for complex partial differential equations in fan-shaped domains/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2011.

Aksoy Ümit

Atilim University, Ankara, Turkey

E-mail: umit.aksoy@atilim.edu.tr

Begehr Heinrich

Math. Institute, Berlin, Germany

E-mail: begehrh@zedat.fu-berlin.de

Çelebi A. Okay

Yeditepe University, Istanbul, Turkey

E-mail: acelebi@yeditepe.edu.tr

Shuypeyeva Bibinur

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan

E-mail: bibinur.shuypeyeva@nu.edu.kz