Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Куркина, В. В. Славский, Однородные функции на гильбертовом пространстве и квазиконформные преобразования сферы, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 188, 70–75

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-188-70-75>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:37:06

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 70–75
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-70-75

УДК 514.822

ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СФЕРЫ

© 2020 г. М. В. КУРКИНА, В. В. СЛАВСКИЙ

Посвящается академику Ю. Г. Решетняку

Аннотация. При помощи однородных функций в гильбертовом пространстве в работе построен и исследован широкий класс квазиконформных преобразований сферы.

Ключевые слова: однородная функция, конформно-плоская метрика, квазиконформное отображение, преобразование Лежандра, конформно-выпуклая функция.

HOMOGENEOUS FUNCTIONS ON HILBERT SPACES AND QUASICONFORMAL TRANSFORMATIONS OF A SPHERE

© 2020 M. V. KURKINA, V. V. SLAVSKY

ABSTRACT. By using homogeneous functions in a Hilbert space, a wide class of quasiconformal transformations of the sphere is constructed and examined.

Keywords and phrases: homogeneous function, conformally flat metric, quasiconformal mapping, Legendre transform, conformally convex function.

AMS Subject Classification: 53A07

1. Однородные функции и конформно-плоские метрики на сфере. Однородные функции играют важную роль в чистой математике (см. [2]) и её приложениях, например, в экономике при построении производственной функции (см. [1, 3]). В [9] было замечено следующее свойство однородных функций.

Лемма 1. Пусть $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная однородная степени 1 положительная функция на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, т.е. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ при $\lambda > 0$, класса $C^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$. Отображение $H_f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, определяемое формулой

$$H_f : x \in \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow x - 2f(x) \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (1)$$

сохраняет норму в $\mathbb{R}^{n+1}$: $\|H_f(x)\| = \|x\|$. Здесь ∇f — градиент функции f в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Доказательство. В силу однородности функции f выполняется равенство Эйлера $f(x) = (\nabla f, x)$. Скалярный квадрат вектора $y = H_f(x)$ равен

$$(y, y) = (x, x) - 4f(x) \frac{(\nabla f, x)}{|\nabla f|^2} + 4f^2(x) \frac{(\nabla f, \nabla f)}{|\nabla f|^4} = (x, x). \quad \square$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 18-47-860016, 18-01-00620) и Научного Фонда Югорского государственного университета (проект № 13-01-20/10).

С однородной функцией f на $\mathbb{R}^{n+1}$ степени 1 естественно связана конформно-плоская метрика на единичной сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}, \quad x \in S^n, \quad (2)$$

и полярная к ней метрика (см. [9])

$$ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}, \quad y \in S^n, \quad (3)$$

определяемая явной формулой

$$f^*(y) = \max_{x \in S^n} \frac{\|x - y\|^2}{2f(x)}, \quad (4)$$

где $\|x - y\|^2$ — квадрат хордового расстояния между точками $x, y \in S^n$. Формула (4) напоминает классическое определение преобразования Лежандра выпуклой функции $h(x)$ в евклидовом пространстве:

$$h^*(y) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} [(x, y) - h(x)],$$

если вычитание заменить на деление. Поэтому имеет смысл формулу (4) называть преобразованием Лежандра конформно-плоской метрики (см. [6–8]).

Кроме явных формул (4), функции $f(x)$ и $f^*(y)$ могут выражаться друг через друга посредством формул параметрического вида:

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \frac{2f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, \quad y = x - 2f(x) \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|^2} = H_f(x), \\ f(x) &= \frac{2f^*(y)}{|\nabla f^*(y)|^2}, \quad x = y - 2f^*(y) \frac{\nabla f^*(y)}{|\nabla f^*(y)|^2} = H_{f^*}(y). \end{aligned}$$

Определение 1. Оператор H_f назовём *конформным градиентом* функции f (см. [9]). Отображение H_f инволютивно, т.е. $H_f^{-1} = H_f$.

Пример 1. Пусть $f(x) = a|x| + (b, x)$, где $a > 0$ — число, $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ — вектор. Тогда

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= a \frac{x}{|x|} + b, \quad |\nabla f|^2(x) = a^2 + 2 \frac{a(x, b)}{|x|} + (b, b), \\ H_f(x) &= \frac{x((b, b) - a^2) - 2(a|x| + (b, x))b}{a^2 + 2a \frac{(x, b)}{|x|} + (b, b)}. \end{aligned}$$

Замечание 1. Формулу (1) можно использовать в более общей ситуации

$$H_V(Z) = Z - 2(Z, V) \frac{V}{|V|^2} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (5)$$

где V — произвольный ненулевой (не фиксированный) вектор; здесь также для всех $Z \in \mathbb{R}^{n+1}$ выполняется равенство $\|H_V(Z)\| \equiv \|Z\|$. Преобразование $H_V(Z)$ есть просто симметрия Z относительно гиперплоскости, перпендикулярной вектору V ; если использовать терминологию из [10], то H_V — «зеркало» в однородном пространстве S^n .

Замечание 2. Формулы (1)–(4) верны также в случае произвольной функции $f(x)$, $x \in \overline{\mathbb{R}^n}$, без требования её однородности.

2. Коэффициент квазиконформности отображение H_f .

Определение 2. Пусть $f : S^n \rightarrow S^n$ — диффеоморфизм единичной сферы, $x \in S^n$, $y = f(x)$, $df_x : T_x \rightarrow T_y$ — дифференциал f в точке x . *Дилатацией* f в точке $x \in S^n$ называется число

$$q(x, f) = \frac{\max_{|\xi|=1} \|df_x(\xi)\|}{\min_{|\xi|=1} \|df_x(\xi)\|} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}, \quad (6)$$

где $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ — максимальное и минимальное собственные значения линейного оператора $\sqrt{df_x^* \circ df_x}$. Коэффициентом квазиконформности f называется число $q(f) = \max_x q(x, f)$.

Лемма 2. Пусть $ds^2 = dx^2/f^2(x)$ — конформно-плоская метрика, определенная на сфере S^n , $x \in S^n$, $y = H_f(x)$, $dH_{f_x} : T_x \rightarrow T_y$ — дифференциал H_f в точке x . Тогда на единичных касательных векторах ξ выполняется равенство

$$|dH_f(\xi)| = \frac{2|K_{1/2}(f, x, \xi)|}{|\nabla f|^2}, \quad (7)$$

где

$$K_{1/2}(f, x, \xi) = f \frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2} |\nabla f|^2$$

— одномерная секционная кривизна конформно-плоской метрики (см. [7, 8]). Здесь $d^2 f/d\xi^2$ — вторая производная функции в точке $x \in \mathbb{R}^n$ вдоль единичного вектора ξ , ∇f — градиент функции f в $\mathbb{R}^n$. Формула верна как в плоском случае, так и для единичной сферы, в этом случае функция $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ продолжается по однородности на $\mathbb{R}^{n+1}$, $x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, ξ — единичный вектор, касательный к сфере в точке x , ∇f — градиент функции в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Доказательство. Дифференцируя равенство

$$H_f(x) = x - 2f(x) \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}$$

вдоль касательного вектора $\xi \in T_x$, получим

$$dH_f(\xi) = \xi - 2(\nabla f, \xi) \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2} - 2f \left[\frac{d(\nabla f)(\xi)}{|\nabla f|^2} - \frac{2\nabla f(\nabla f, d(\nabla f)(\xi))}{|\nabla f|^4} \right].$$

Введем следующий линейный оператор $P : T_x \rightarrow T_x$ на касательном пространстве T_x :

$$P(v) = v - 2 \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \left(v, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right).$$

Оператор P есть симметрия относительно подпространства, перпендикулярного вектору ∇f . Тогда

$$\begin{aligned} dH_f(\xi) &= P(\xi) - \frac{2f}{|\nabla f|^2} P(d(\nabla f)(\xi)) = P \left(\xi - \frac{2fd(\nabla f)(\xi)}{|\nabla f|^2} \right) = \\ &= -\frac{2}{|\nabla f|^2} P \left[fd(\nabla f)(\xi) - \frac{1}{2} |\nabla f|^2 \xi \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$K_{1/2}(f, x, \xi) = \left(\xi, fd(\nabla f)(\xi) - \frac{1}{2} |\nabla f|^2 \xi \right).$$

Так как P — изометричный оператор на единичных касательных векторах ξ , то выполняется равенство

$$|dH_f(\xi)| = \frac{2|K_{1/2}(f, x, \xi)|}{|\nabla f|^2},$$

что и требовалось. □

Из формулы (7) непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Если конформно-плоская метрика $ds^2 = dx^2/f^2(x)$ имеет положительную одномерную кривизну, то дилатация H_f в точке $x \in S^n$ равна

$$q(x, H_f) = \frac{\max_i \{k_i(x)\}}{\min_j \{k_j(x)\}}, \quad (8)$$

Рис. 1. График функции $\delta(x)$

где $\{k_1(x), \dots, k_n(x)\}$ — главные значения одномерной секционной кривизны $K_{1/2}(f, x, \xi)$. Коэффициент квазиконформности отображения H_f равен

$$q(H_f) = \max_{x \in S^n} \frac{\max_i \{k_i(x)\}}{\min_j \{k_j(x)\}}.$$

Замечание 3. Неотрицательность одномерной секционной кривизны конформно-плоской метрики эквивалентна выполнению трёхточечному неравенству — условию конформной выпуклости функции $g(x) = \sqrt{f(x)}$ на сфере (см. [7, 8]):

$$g(x) \leq g(x_1) \frac{|x_2 - x|}{|x_2 - x_1|} + g(x_2) \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x_1|};$$

это позволяет конструктивно строить квазиконформные отображения сферы.

Пример 2. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $a, b > 0$. Функция

$$\delta(x) = \frac{a|x_2 - x|}{|x_2 - x_1|} + \frac{b|x_1 - x|}{|x_2 - x_1|}$$

является конформно-выпуклой (это следует из неравенства Птолемея). Функцию такого вида назовем диполем с вершинами в точках x_1, x_2 . На рис. 1 показан график функции $\delta(x)$ для размерности 1.

Одномерная секционная кривизна метрики $ds^2 = dx^2/\delta(x)^4$ диполя равна

$$K_{1/2}(x, \xi) = \frac{2\delta^2(x)ab}{|x_2 - x_1|^2 |x_2 - x| |x_1 - x|} \left[|x_2 - x_1|^2 - \left(\frac{x_1 - x}{|x_1 - x|} |x_2 - x| - \frac{x_2 - x}{|x_2 - x|} |x_1 - x|, \xi \right)^2 \right].$$

Так как

$$\left| \frac{x_1 - x}{|x_1 - x|} |x_2 - x| - \frac{x_2 - x}{|x_2 - x|} |x_1 - x| \right|^2 = |x_2 - x_1|^2,$$

то согласно неравенству Коши—Буняковского получим

$$\left| \left(\frac{x_1 - x}{|x_1 - x|} |x_2 - x| - \frac{x_2 - x}{|x_2 - x|} |x_1 - x|, \xi \right) \right| \leq |x_2 - x_1| |\xi|.$$

Следовательно, для одномерной кривизны диполя получим оценки

$$0 \leq K_{1/2}(x, \xi) \leq \frac{2\sqrt{ab}}{|x_2 - x_1|^2} \left(\sqrt{\frac{a|x_2 - x|}{|x_1 - x|}} + \sqrt{\frac{b|x_1 - x|}{|x_2 - x|}} \right)^2.$$

Одномерная секционная кривизна обращается в нуль в направлении

$$\xi \uparrow \frac{x_1 - x}{|x_1 - x|} |x_2 - x| - \frac{x_2 - x}{|x_2 - x|} |x_1 - x|$$

и принимает максимальное значение в перпендикулярном направлении.

Рис. 2. Поле направлений с нулевой кривизной метрики $ds^2 = dx^2/\delta^4(x)$

Рис. 3. Поверхность в $\mathbb{R}^3$, отвечающая метрике $ds^2 = dx^2/\delta^4(x)$

Следствие 1. В силу теоремы 1 коэффициент квазиконформности отображения $y = H_\delta(x)$ обращается в бесконечность в точках, где одномерная секционная кривизна имеет направления с нулевым значением, поэтому для метрики диполя это верно во всех точках, т.е. точки конформности отсутствуют. На рис. 2 показано поле направлений с нулевой одномерной кривизной метрики $ds^2 = dx^2/\delta^4(x)$.

Следствие 2. Для размерности 2 гауссова кривизна дипольной метрики в точке $x \in \overline{\mathbb{R}^2}$ равна сумме одномерных кривизн в двух перпендикулярных направлениях и равна

$$G = \frac{2\sqrt{ab}}{|x_2 - x_1|^2} \left(\sqrt{\frac{a|x_2 - x|}{|x_1 - x|}} + \sqrt{\frac{b|x_1 - x|}{|x_2 - x|}} \right)^2.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$G \geq \frac{2\sqrt{ab}}{|x_2 - x_1|^2} 4\sqrt{ab} = \frac{8ab}{|x_2 - x_1|^2},$$

и двумерная метрика $ds^2 = dx^2/\delta^4(x)$ имеет положительную гауссову кривизну.

Замечание 4. Для размерности 2 из работ Ю. Г. Решетняка (см. [4]) следует интегральное представление метрики положительной гауссовой кривизны в виде логарифмического потенциала

$$f(x) = \exp \left[\int \log |x - y| d\mu_y \right].$$

Нетрудно проверить, что потенциал Рисса

$$f(x) = \int |x - y| d\lambda_y$$

определяет конформно-плоскую метрику неотрицательной одномерной кривизны (конформно-выпуклую функцию). Возникает естественная задача доказать это представление для произвольной конформно-выпуклой функции.

Теорема А. Д. Александрова о реализации метрики положительной кривизны выпуклой поверхностью в соединении с теоремой А. В. Погорелова о регулярности выпуклой поверхности

с регулярной метрикой дали полное решение проблемы Вейля о реализации в трехмерном евклидовом пространстве регулярной метрики положительной кривизны. Можно непосредственно проверить, что метрика $ds^2 = dx^2/\delta^4(x)$ принадлежит классу C^2 , за исключением двух точек x_1 , x_2 , в которых она непрерывна, и ей соответствует поверхность вращения циклоиды (рис. 3), с двумя особыми точками, в которых поверхность принадлежит классу $C^{1+0.5}$, имеет касательную плоскость, а гауссова кривизна стремится к $+\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольных Е. В., Кутышкин А. В., Никоноров Ю. Г.* Построение δ -однородной производственной VES-функции// Сиб. ж. индустр. мат. — 2007. — 10, № 2 (30). — С. 31–44.
2. *Гельфанд И. М., Шапиро З. Я.* Однородные функции и их приложения// Усп. мат. наук. — 1955. — 10, № 3. — С. 3–70.
3. *Кутышкин А. В., Сокол Г. А.* О применении производственных функций вида VES-функция для моделирования функционирования экономических систем// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Компьютерные технологии. Управление. Радиоэлектроника. — 2007. — 17, № 1. — С. 49–60.
4. *Решетняк Ю. Г.* Двумерные многообразия ограниченной кривизны// Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. направл. — 1989. — 70. — С. 7–189.
5. *Славский В. В.* Оценка коэффициента квазиконформности области через кривизну квазигиперболической метрики// Сиб. мат. ж. — 1999. — 40, № 4. — С. 947–965.
6. *Kurkina M. V.* The generalized polar transform conformally-flat metrics of positive one-dimensional curvature// Proc. Int. Conf. «Geometric Analysis» (September 22–28, 2019, Novosibirsk). — Novosibirsk: Novosibirsk State Univ., 2019. — С. 89–91.
7. *Kurkina M. V., Rodionov E. D., Slavsky V. V.* Conformally convex functions and conformally flat metrics of nonnegative curvature// Dokl. Math. — 2015. — 91, № 3. — С. 287–289.
8. *Kurkina M. V., Rodionov E. D., Slavsky V. V.* Legendre transformation of conformal convex functions// Proc. Int. Conf. «Geometric Analysis» (September 22–28, 2019, Novosibirsk). — Novosibirsk: Novosibirsk State Univ., 2019. — С. 118–120.
9. *Rodionov E. D., Slavsky V. V.* Polar transform of conformally flat metrics// Sib. Adv. Math. — 2018. — 28, № 2. — С. 101–114.
10. *Sabinin L. V.* Mirror Geometry of Lie Algebras, Lie Groups, and Homogeneous Spaces. — Springer, 2004.

Куркина Мария Викторовна

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск

E-mail: mavi@inbox.ru

Славский Виктор Владимирович

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск

E-mail: slavsky2004@mail.ru