Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Скворцова, Оценки решений в модели взаимодействия популяций с несколькими запаздываниями, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 188, 84–105

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-188-84-105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:50:25

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 84–105
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-84-105

УДК 517.929.4

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОПУЛЯЦИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

© 2020 г. М. А. СКВОРЦОВА

Аннотация. Рассматривается система дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями, описывающая взаимодействие n видов микроорганизмов. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости нетривиального положения равновесия, соответствующего частичному выживанию популяций. Установлены оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности, и указаны оценки множества притяжения данного положения равновесия. Результаты получены с использованием модифицированного функционала Ляпунова–Красовского.

Ключевые слова: модель взаимодействия популяций, уравнение с запаздывающим аргументом, асимптотическая устойчивость, оценка решения, множество притяжения, модифицированный функционал Ляпунова–Красовского.

ESTIMATES OF SOLUTIONS IN THE MODEL OF INTERACTION OF POPULATIONS WITH SEVERAL DELAYS

© 2020 M. A. SKVORTSOVA

ABSTRACT. We consider a system of differential equations with several delays, which describes the interaction of n species of microorganisms. We obtain sufficient conditions for the asymptotic stability of a nontrivial equilibrium state corresponding to the partial survival of populations. We establish estimates of solutions that characterize the rate of stabilization at infinity and indicate estimates of the attraction set of a given equilibrium state. The results are obtained by using the modified Lyapunov–Krasovsky functional.

Keywords and phrases: model of interaction of populations, equation with retarded argument, asymptotic stability, estimate of solution, attraction set, modified Lyapunov–Krasovsky functional.

AMS Subject Classification: 34K20, 34K60, 92D25

1. Предварительные сведения. В настоящей работе мы продолжаем исследование системы дифференциальных уравнений с запаздываниями следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) = (S^0 - S(t))D - \sum_{i=1}^n p_i(S(t))N_i(t), \\ \frac{d}{dt}N_i(t) = -D_i N_i(t) + \alpha_i p_i(S(t - \tau_i))N_i(t - \tau_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-31-00408, № 18-29-10086).

Система описывает взаимодействие n видов микроорганизмов (см. [14]), при этом $N_i(t)$ — численность популяции i -го вида, $S(t)$ — концентрация питательного вещества. Коэффициенты системы S^0 , D , D_i , α_i предполагаются положительными и постоянными, параметры запаздывания $\tau_i \geq 0$ также предполагаются постоянными. Предполагается, что $p_i(S)$ — локально липшицевы, монотонно возрастающие функции и $p_i(0) = 0$. Более подробное описание модели содержится в [14].

Для системы (1.1) зададим начальные условия:

$$\begin{cases} S(t) = \varphi_0(t), & t \in [-\tau_{\max}, 0], & S(+0) = \varphi_0(0), & \tau_{\max} = \max\{\tau_1, \dots, \tau_n\}, \\ N_i(t) = \varphi_i(t), & t \in [-\tau_i, 0], & N_i(+0) = \varphi_i(0), & i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ — непрерывные неотрицательные функции. Хорошо известно, что решение начальной задачи (1.1)–(1.2) существует и единственно. Более того, как было отмечено в [14], при неотрицательных начальных функциях решение задачи (1.1)–(1.2) определено на всей правой полуоси $\{t > 0\}$, имеет неотрицательные компоненты, при этом каждая компонента решения является ограниченной функцией.

Система (1.1) имеет тривиальное положение равновесия

$$S(t) = S^0, \quad N_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

В [14] было показано, что при выполнении неравенств $\alpha_i p_i(S^0) < D_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, все решения уравнения (1.1) с неотрицательными начальными условиями стабилизируются на бесконечности к данному положению равновесия. В [10] были получены оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности к положению равновесия (1.3). При получении оценок существенно использовались модифицированные функционалы Ляпунова—Красовского (см. [2, 12, 13]); при этом величины, отвечающие за скорость стабилизации, были указаны конструктивно.

Следуя [14], введем следующие обозначения. Поскольку функции $p_i(S)$ являются монотонно возрастающими и $p_i(0) = 0$, то существуют такие $\lambda_i \in (0, +\infty]$, что $p_i(S) < D_i/\alpha_i$ при $S < \lambda_i$ и $p_i(S) > D_i/\alpha_i$ при $S > \lambda_i$. Отсюда, в частности, следует, что если $\lambda_i < +\infty$, то λ_i удовлетворяет условию $p_i(\lambda_i) = D_i/\alpha_i$.

Заметим, что в случае, если существует такое $\lambda_{i_0} < S^0$, система (1.1) имеет нетривиальное положение равновесия:

$$S(t) = \lambda_{i_0} < S^0, \quad N_{i_0}(t) = \alpha_{i_0}(S^0 - \lambda_{i_0})D/D_{i_0}, \quad N_i(t) = 0, \quad i \neq i_0.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $i_0 = 1$. Следовательно, нетривиальное положение равновесия будет иметь вид

$$S(t) = \lambda_1 < S^0, \quad N_1(t) = \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D, \quad N_i(t) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (1.4)$$

В [14] были получены достаточные условия на параметры системы (1.1), при которых все решения с неотрицательными начальными условиями стабилизируются на бесконечности к данному положению равновесия.

В настоящей работе мы получим достаточные условия асимптотической устойчивости нетривиального положения равновесия (1.4), установим оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности, и укажем оценки множества притяжения данного положения равновесия. При получении оценок мы будем использовать модифицированные функционалы Ляпунова—Красовского (см. [2]); при этом все величины, входящие в оценки, будут указаны конструктивно.

2. Устойчивость нетривиального положения равновесия. В данном разделе будем предполагать, что выполнено условие $\lambda_1 < S^0$. В этом случае у системы (1.1) существует нетривиальное положение равновесия (1.4). Дополнительно предположим, что функция $p_1(S)$ является непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $S = \lambda_1$. Ниже мы получим условия асимптотической устойчивости нетривиального положения равновесия.

Вначале сведем задачу об устойчивости положения равновесия (1.4) системы (1.1) к задаче об устойчивости нулевого решения. Для этого в системе (1.1) сделаем замену переменных

$$S(t) = \lambda_1 + \tilde{S}(t), \quad N_1(t) = \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D + \tilde{N}_1(t), \quad N_i(t) = \tilde{N}_i(t), \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (2.1)$$

Тогда, учитывая, что $p_1(\lambda_1) = D_1/\alpha_1$, будем иметь

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{S}(t) = -D\tilde{S}(t) - \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1)) \\ \quad - p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t))\tilde{N}_1(t) - \sum_{i=2}^n p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t))\tilde{N}_i(t), \\ \frac{d}{dt}\tilde{N}_1(t) = -D_1\tilde{N}_1(t) + \frac{\alpha_1^2}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1)) - p_1(\lambda_1)) \\ \quad + \alpha_1 p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1))\tilde{N}_1(t - \tau_1), \\ \frac{d}{dt}\tilde{N}_i(t) = -D_i\tilde{N}_i(t) + \alpha_i p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_i))\tilde{N}_i(t - \tau_i), \quad i = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (2.2)$$

Далее, поскольку функция $p_1(S)$ является непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $S = \lambda_1$, то систему (2.2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{S}(t) = -\left(D + \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)Dp'_1(\lambda_1)\right)\tilde{S}(t) - \frac{D_1}{\alpha_1}\tilde{N}_1(t) - \sum_{i=2}^n p_i(\lambda_1)\tilde{N}_i(t) \\ \quad - \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) - p'_1(\lambda_1)\tilde{S}(t)) \\ \quad - (p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1))\tilde{N}_1(t) - \sum_{i=2}^n (p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_i(\lambda_1))\tilde{N}_i(t), \\ \frac{d}{dt}\tilde{N}_1(t) = -D_1\tilde{N}_1(t) + \frac{\alpha_1^2}{D_1}(S^0 - \lambda_1)Dp'_1(\lambda_1)\tilde{S}(t - \tau_1) + D_1\tilde{N}_1(t - \tau_1) \\ \quad + \frac{\alpha_1^2}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1)) - p_1(\lambda_1) - p'_1(\lambda_1)\tilde{S}(t - \tau_1)) \\ \quad + \alpha_1(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1)) - p_1(\lambda_1))\tilde{N}_1(t - \tau_1), \\ \frac{d}{dt}\tilde{N}_i(t) = -D_i\tilde{N}_i(t) + \alpha_i p_i(\lambda_1)\tilde{N}_i(t - \tau_i) \\ \quad + \alpha_i(p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_i)) - p_i(\lambda_1))\tilde{N}_i(t - \tau_i), \quad i = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (2.3)$$

Введем следующие обозначения:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \tilde{S}(t) \\ \tilde{N}_1(t) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} \tilde{S}(t) \\ \tilde{N}_1(t) \\ \tilde{N}_2(t) \\ \vdots \\ \tilde{N}_n(t) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -(D + \gamma_1) & -D_1/\alpha_1 \\ 0 & -D_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_1 \gamma_1 & D_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)Dp'_1(\lambda_1), \quad (2.5)$$

$$F_1(x(t)) = -\begin{pmatrix} f_a(x(t)) + f_b(x(t)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$G_1(x(t - \tau_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1(f_a(x(t - \tau_1)) + f_b(x(t - \tau_1))) \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$f_a(x) = \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}) - p_1(\lambda_1) - p'_1(\lambda_1)\tilde{S}), \quad (2.8)$$

$$f_b(x) = (p_1(\lambda_1 + \tilde{S}) - p_1(\lambda_1))\tilde{N}_1, \quad (2.9)$$

$$L(y(t)) = \begin{pmatrix} l(y(t)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l(y(t)) = -\sum_{i=2}^n p_i(\lambda_1)\tilde{N}_i(t), \quad (2.10)$$

$$U(y(t)) = \begin{pmatrix} u(y(t)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(y(t)) = -\sum_{i=2}^n (p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_i(\lambda_1))\tilde{N}_i(t). \quad (2.11)$$

Тогда система (2.3) запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = A_1x(t) + B_1x(t - \tau_1) + F_1(x(t)) + G_1(x(t - \tau_1)) + L(y(t)) + U(y(t)), \\ \frac{d}{dt}\tilde{N}_i(t) = -D_i\tilde{N}_i(t) + \alpha_i p_i(\lambda_1)\tilde{N}_i(t - \tau_i) \\ \quad + \alpha_i (p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_i)) - p_i(\lambda_1))\tilde{N}_i(t - \tau_i), \quad i = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (2.12)$$

Наконец, перепишем систему (2.12) в наиболее компактном виде:

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mathbf{A}y(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i y(t - \tau_i) + \mathbf{F}(y(t)) + \mathbf{G}(y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n)), \quad (2.13)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(D + \gamma_1) & -D_1/\alpha_1 & -p_2(\lambda_1) & \dots & -p_n(\lambda_1) \\ 0 & -D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -D_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 \gamma_1 & D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 p_2(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n p_n(\lambda_1) \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{F}(y(t)) = \begin{pmatrix} f_a(x(t)) + f_b(x(t)) + u(y(t)) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{G}(y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 (f_a(x(t - \tau_1)) + f_b(x(t - \tau_1))) \\ \alpha_2 (p_2(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_2)) - p_2(\lambda_1))\tilde{N}_2(t - \tau_2) \\ \vdots \\ \alpha_n (p_n(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_n)) - p_n(\lambda_1))\tilde{N}_n(t - \tau_n) \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Для линеаризованной системы

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mathbf{A}y(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i y(t - \tau_i)$$

характеристический квазимногочлен будет иметь вид:

$$\det \left(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} - \sum_{i=1}^n e^{-\lambda \tau_i} \mathbf{B}_i \right) = \det(\lambda \mathbf{I} - A_1 - e^{-\lambda \tau_1} B_1) \prod_{i=2}^n \left(\lambda + D_i - \alpha_i p_i(\lambda_1) e^{-\lambda \tau_i} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{I} - A_1 - e^{-\lambda \tau_1} B_1) &= \begin{vmatrix} \lambda + D + \gamma_1 & D_1/\alpha_1 \\ -\alpha_1 \gamma_1 e^{-\lambda \tau_1} & \lambda + D_1 - D_1 e^{-\lambda \tau_1} \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda + D + \gamma_1)(\lambda + D_1 - D_1 e^{-\lambda \tau_1}) + \gamma_1 D_1 e^{-\lambda \tau_1} = (\lambda + D + \gamma_1)(\lambda + D_1) - (\lambda + D) D_1 e^{-\lambda \tau_1}. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичная матрица размера $(n+1) \times (n+1)$, I — единичная матрица размера 2×2 .

Хорошо известно (см., например, [4, гл. 7, § 33]), что если все корни характеристического квазимногочлена лежат в левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$, то нулевое решение системы (2.13) асимптотически устойчиво. Если же существует хотя бы один корень квазимногочлена, лежащий в правой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$, то нулевое решение системы (2.13) неустойчиво.

Учитывая, что исследование устойчивости нулевого решения системы (2.13) эквивалентно исследованию устойчивости положения равновесия (1.4) системы (1.1), нетрудно установить следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\lambda_1 < S^0$ и функция $p_1(S)$ является непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $S = \lambda_1$.

- (а) Если $p'_1(\lambda_1) > 0$ и $p_i(\lambda_1) < D_i/\alpha_i$, $i = 2, \dots, n$, то положение равновесия (1.4) является асимптотически устойчивым.
- (б) Если существует такой номер $i_0 \in \{2, \dots, n\}$, что $p_{i_0}(\lambda_1) > D_{i_0}/\alpha_{i_0}$, то положение равновесия (1.4) неустойчиво.

Доказательство. (а) Вначале покажем, что все корни квазимногочлена

$$Q_1(\lambda) = (\lambda + D + \gamma_1)(\lambda + D_1) - (\lambda + D) D_1 e^{-\lambda \tau_1}$$

содержатся в левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Предположим, что существует корень квазимногочлена $Q_1(\lambda)$ с неотрицательной вещественной частью: $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Тогда

$$\frac{(\lambda + D + \gamma_1)}{(\lambda + D)} = \frac{D_1}{(\lambda + D_1)} e^{-\lambda \tau_1}.$$

Поскольку $p'_1(\lambda_1) > 0$, то в силу обозначения (2.5) имеем $\gamma_1 > 0$. Следовательно,

$$1 < \left| \frac{(\lambda + D + \gamma_1)}{(\lambda + D)} \right| = \left| \frac{D_1}{(\lambda + D_1)} e^{-\lambda \tau_1} \right| \leq 1,$$

противоречие. Теперь покажем, что все корни квазимногочленов

$$Q_i(\lambda) = \lambda + D_i - \alpha_i p_i(\lambda_1) e^{-\lambda \tau_i}, \quad i = 2, \dots, n,$$

также содержатся в левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Также будем рассуждать от противного. Предположим, что существует корень $Q_i(\lambda)$ с неотрицательной вещественной частью: $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. В этом случае

$$D_i \leq |\lambda + D_i| = |\alpha_i p_i(\lambda_1) e^{-\lambda \tau_i}| \leq \alpha_i p_i(\lambda_1).$$

Получаем противоречие с условием теоремы. Итак, положение равновесия (1.4) асимптотически устойчиво.

(б) Рассмотрим функцию

$$Q_{i_0}(\lambda) = \lambda + D_{i_0} - \alpha_{i_0} p_{i_0}(\lambda_1) e^{-\lambda \tau_{i_0}}$$

как функцию вещественного аргумента. По условию теоремы $Q_{i_0}(0) = D_{i_0} - \alpha_{i_0} p_{i_0}(\lambda_1) < 0$. С другой стороны, $Q_{i_0}(\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Поскольку функция $Q_{i_0}(\lambda)$ является непрерывной, значит, существует такое число $\lambda^* > 0$, что $Q_{i_0}(\lambda^*) = 0$. Итак, положение равновесия (1.4) неустойчиво. Теорема 1 доказана. $\square$

Следующая наша цель — получение оценок, характеризующих скорость стабилизации решений на бесконечности к положению равновесия (1.4) и нахождение оценок на множество притяжения в случае, когда рассматриваемое положение равновесия является асимптотически устойчивым. При получении оценок мы будем использовать модифицированные функционалы Ляпунова—Красовского. В следующем разделе мы укажем один из методов построения таких функционалов для системы (2.13) в случае $n = 1$.

3. Построение модифицированного функционала Ляпунова—Красовского для случая $n = 1$. В данном разделе будем предполагать, что выполнено условие $\lambda_1 < S^0$, функция $p_1(S)$ является непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $S = \lambda_1$ и $p'_1(\lambda_1) > 0$. Если $n = 1$, то в силу теоремы 1 эти условия гарантируют асимптотическую устойчивость нетривиального положения равновесия (1.4) системы (1.1).

Как отмечалось выше, исследование устойчивости положения равновесия (1.4) системы (1.1) эквивалентно исследованию устойчивости нулевого решения системы (2.13). В случае $n = 1$ система (2.13) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_1x(t) + B_1x(t - \tau_1) + F_1(x(t)) + G_1(x(t - \tau_1)), \quad (3.1)$$

где $x(t)$, A_1 , B_1 , $F_1(x(t))$, $G_1(x(t - \tau_1))$ определены в (2.4)–(2.9).

Одним из методов исследования устойчивости решений систем с запаздыванием является метод функционалов Ляпунова—Красовского, предложенный Н. Н. Красовским (см. [4]). В частности, для линейных систем вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + By(t - \tau), \quad (3.2)$$

где A и B — постоянные матрицы, Н. Н. Красовский предложил использовать функционал

$$V_0(t, y) = \langle H_0y(t), y(t) \rangle + \int_{t-\tau}^t \langle K_0y(s), y(s) \rangle ds \quad (3.3)$$

с матрицами $H_0 = H_0^* > 0$ и $K_0 = K_0^* > 0$ (см. [4, гл. 7, § 34]). Здесь и далее через H_0^* обозначается эрмитово-сопряженная к H_0 матрица, неравенство $H_0 > 0$ означает, что матрица H_0 является положительно определенной. Отметим, что с помощью функционала (3.3) также можно проводить исследования устойчивости решений и для нелинейных систем с запаздыванием (в частности, для системы вида (3.1)).

Однако, используя функционал (3.3), далеко не всегда удастся получить оценки решений, характеризующие скорость убывания на бесконечности. Оценки удастся получить с помощью модифицированных функционалов Ляпунова—Красовского (см. [2, 12, 13]). В частности, в [2] был предложен модифицированный функционал Ляпунова—Красовского следующего вида:

$$V(t, y) = \langle Hy(t), y(t) \rangle + \int_{t-\tau}^t \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle ds, \quad (3.4)$$

где матрицы H и $K(s) \in C^1([0, \tau])$ обладают следующими свойствами:

$$H = H^* > 0, \quad K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0, \tau]. \quad (3.5)$$

При этом для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3.2) достаточно потребовать выполнения неравенства

$$C = - \begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB \\ B^*H & -K(\tau) \end{pmatrix} > 0. \quad (3.6)$$

При выполнении условий (3.5), (3.6) в работе [2] были получены оценки решений системы (3.2), характеризующие скорость убывания на бесконечности. Также в [2, 3, 5] для некоторых классов нелинейных систем с запаздыванием были установлены оценки решений и указаны оценки на

области притяжения. Полученные результаты также были обобщены на случай систем с несколькими запаздываниями.

Отметим, что примеры построения модифицированных функционалов Ляпунова—Красовского вида (3.4) были приведены, в частности, в [6–9] при исследовании устойчивости положений равновесия в различных биологических моделях. С помощью построенных функционалов были получены конструктивные оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности, и указаны оценки множеств притяжения.

Данный раздел посвящен построению модифицированного функционала Ляпунова—Красовского для системы (3.1). Рассмотрим функционал

$$V(t, x) = \langle H_1 x(t), x(t) \rangle + \int_{t-\tau_1}^t \langle K_1(t-s)x(s), x(s) \rangle ds,$$

где

$$H_1 = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{01} & h_{11} \end{pmatrix} > 0, \quad K_1(s) = e^{-\kappa_1 s} (B_1^* B_1 + M_1), \quad M_1 = M_1^* > 0, \quad \kappa_1 > 0, \quad s \in [0, \tau_1].$$

Подберем матрицы H_1 и $K_1(s)$ так, чтобы было выполнено неравенство

$$C_1 = - \begin{pmatrix} H_1 A_1 + A_1^* H_1 + K_1(0) & H_1 B_1 \\ B_1^* H_1 & -K_1(\tau_1) \end{pmatrix} > 0. \quad (3.7)$$

Учитывая явный вид матрицы B_1 , нетрудно заметить, что $B_1^* H_1 = B_1^* \tilde{H}_1$, где

$$\tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{01} & h_{11} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{pmatrix} -\left(H_1 A_1 + A_1^* H_1 + B_1^* B_1\right) - M_1 & -\tilde{H}_1^* B_1 \\ -B_1^* \tilde{H}_1 & e^{-\kappa_1 \tau_1} (B_1^* B_1 + M_1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\left(H_1 A_1 + A_1^* H_1 + B_1^* B_1 + e^{\kappa_1 \tau_1} \tilde{H}_1^* \tilde{H}_1\right) - M_1 & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_1 \tau_1} M_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{\kappa_1 \tau_1} \tilde{H}_1^* \tilde{H}_1 & -\tilde{H}_1^* B_1 \\ -B_1^* \tilde{H}_1 & e^{-\kappa_1 \tau_1} B_1^* B_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} R_1 - M_1 & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_1 \tau_1} M_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{\kappa_1 \tau_1} \tilde{H}_1^* \tilde{H}_1 & -\tilde{H}_1^* B_1 \\ -B_1^* \tilde{H}_1 & e^{-\kappa_1 \tau_1} B_1^* B_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$R_1 = -\left(H_1 A_1 + A_1^* H_1 + B_1^* B_1 + e^{\kappa_1 \tau_1} \tilde{H}_1^* \tilde{H}_1\right) = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} \\ r_{01} & r_{11} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Из данного представления вытекает неравенство

$$\left\langle C_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \geq \langle (R_1 - M_1)u, u \rangle + e^{-\kappa_1 \tau_1} \langle M_1 v, v \rangle, \quad u, v \in \mathbb{R}^2. \quad (3.9)$$

Тем самым, если мы покажем, что матрица R_1 является положительно определенной, то при условии $\|M_1\| < r_{1,\min}$ матрица C_1 также будет положительно определена. (Здесь $\|M_1\|$ — спектральная норма матрицы M_1 , $r_{1,\min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы R_1 .)

Итак, наша цель — подобрать величины $h_{00} > 0$, $h_{11} > 0$, $h_{01} \in \mathbb{R}$ ($h_{00}h_{11} - h_{01}^2 > 0$) и $\kappa_1 > 0$ так, чтобы матрица R_1 была положительно определенной. Учитывая вид матриц H_1 , $\tilde{H}_1$, A_1 и B_1 , получим

$$\begin{cases} r_{00} = 2(D + \gamma_1)h_{00} - \alpha_1^2 \gamma_1^2 - e^{\kappa_1 \tau_1} h_{01}^2, \\ r_{01} = \frac{D_1}{\alpha_1} h_{00} + (D + \gamma_1 + D_1)h_{01} - \alpha_1 \gamma_1 D_1 - e^{\kappa_1 \tau_1} h_{01} h_{11}, \\ r_{11} = \frac{2D_1}{\alpha_1} h_{01} + 2D_1 h_{11} - D_1^2 - e^{\kappa_1 \tau_1} h_{11}^2, \end{cases}$$

при этом определитель матрицы R_1 имеет вид

$$\det R_1 = r_{11} \left(2(D + \gamma_1)h_{00} - \alpha_1^2 \gamma_1^2 - e^{\kappa_1 \tau_1} h_{01}^2 \right) - \left(\frac{D_1}{\alpha_1} h_{00} + (D + \gamma_1 + D_1)h_{01} - \alpha_1 \gamma_1 D_1 - e^{\kappa_1 \tau_1} h_{01} h_{11} \right)^2.$$

Величину h_{00} выберем из условия, чтобы определитель матрицы R_1 принимал наибольшее значение. Тогда

$$h_{00} = \frac{\alpha_1}{D_1} \left(\frac{\alpha_1}{D_1} (D + \gamma_1) r_{11} - (D + \gamma_1 + D_1) h_{01} + \alpha_1 \gamma_1 D_1 + e^{\kappa_1 \tau_1} h_{01} h_{11} \right).$$

В этом случае

$$\det R_1 = r_{11} \left(\alpha_1^2 \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1)^2 - D^2 \right) - e^{\kappa_1 \tau_1} \left(h_{01} - \frac{\alpha_1}{D_1} (D + \gamma_1) (h_{11} - e^{-\kappa_1 \tau_1} D_1) \right)^2 \right).$$

Полагая

$$h_{01} = \frac{\alpha_1}{D_1} (D + \gamma_1) (h_{11} - e^{-\kappa_1 \tau_1} D_1),$$

будем иметь

$$\det R_1 = r_{11} \alpha_1^2 \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1)^2 - D^2 \right),$$

где

$$r_{11} = 2(D + \gamma_1 + D_1)h_{11} - 2e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1) D_1 - D_1^2 - e^{\kappa_1 \tau_1} h_{11}^2.$$

Число h_{11} выберем так, чтобы величина r_{11} принимала наибольшее значение. Положим

$$h_{11} = e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1 + D_1);$$

тогда

$$r_{11} = e^{-\kappa_1 \tau_1} ((D + \gamma_1)^2 + D_1^2) - D_1^2.$$

Итак, окончательно получим

$$\begin{cases} h_{00} = \frac{\alpha_1^2}{D_1^2} \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1) ((D + \gamma_1)^2 + D_1^2) - D D_1^2 \right), \\ h_{01} = e^{-\kappa_1 \tau_1} \frac{\alpha_1}{D_1} (D + \gamma_1)^2, \\ h_{11} = e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1 + D_1), \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} r_{00} = \frac{\alpha_1^2}{D_1^2} (D + \gamma_1)^2 \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} ((D + \gamma_1)^2 + D_1^2) - D_1^2 \right) + \alpha_1^2 \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1)^2 - D^2 \right), \\ r_{01} = \frac{\alpha_1}{D_1} (D + \gamma_1) \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} ((D + \gamma_1)^2 + D_1^2) - D_1^2 \right), \\ r_{11} = e^{-\kappa_1 \tau_1} ((D + \gamma_1)^2 + D_1^2) - D_1^2, \end{cases} \quad (3.11)$$

причем

$$\det R_1 = \alpha_1^2 \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} ((D + \gamma_1)^2 + D_1^2) - D_1^2 \right) \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1)^2 - D^2 \right).$$

Согласно критерию Сильвестра для положительной определенности матрицы R_1 необходимо и достаточно выполнения неравенств $r_{11} > 0$ и $\det R_1 > 0$. В нашем случае эти неравенства запишутся в виде

$$e^{\kappa_1 \tau_1} < 1 + \frac{(D + \gamma_1)^2}{D_1^2}, \quad e^{\kappa_1 \tau_1} < \frac{(D + \gamma_1)^2}{D^2}. \quad (3.12)$$

Из формулы (2.5) и условия $p'_1(\lambda_1) > 0$ следует, что $\gamma_1 > 0$, поэтому всегда можно подобрать такое $\kappa_1 > 0$, что неравенства (3.12) будут выполнены.

Отметим, что в случае, когда величина $\kappa_1 > 0$ определяется из неравенств (3.12), матрица H_1 является положительно определенной. Действительно, из (3.8) вытекает, что

$$H_1 A_1 + A_1^* H_1 = -B_1^* B_1 - e^{\kappa_1 \tau_1} \tilde{H}_1^* \tilde{H}_1 - R_1 < 0,$$

т.е. матрица $H_1 = H_1^*$ является решением матричного уравнения Ляпунова

$$H_1 A_1 + A_1^* H_1 = -S_1,$$

где $S_1 = S_1^* > 0$. Поскольку все собственные значения матрицы A_1 содержатся в левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$, откуда следует положительная определенность матрицы H_1 (см., например, [1, гл. 1, § 4]). Итак, модифицированный функционал Ляпунова—Красовского построен.

4. Оценки скорости сходимости к нетривиальному положению равновесия в случае $n = 1$. В данном разделе будем предполагать, что выполнено условие $\lambda_1 < S^0$, функция $p_1(S)$ является непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $S = \lambda_1$ и $p'_1(\lambda_1) > 0$. При $n = 1$ эти условия гарантируют асимптотическую устойчивость нетривиального положения равновесия (1.4) системы (1.1).

Рассмотрим начальную задачу для системы (3.1):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = A_1 x(t) + B_1 x(t - \tau_1) + F_1(x(t)) + G_1(x(t - \tau_1)), \\ x(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau_1, 0], \quad x(+0) = \psi(0), \end{cases} \quad (4.1)$$

где $x(t)$, A_1 , B_1 , $F_1(x(t))$, $G_1(x(t - \tau_1))$ определены в (2.4)–(2.9),

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \psi_0(t) = \varphi_0(t) - \lambda_1, \\ \psi_1(t) = \varphi_1(t) - \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D, \end{cases}$$

$\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ — непрерывные неотрицательные функции, заданные в (1.2).

Наша цель — получение оценок решений начальной задачи (4.1), характеризующих скорость убывания на бесконечности, и нахождение множества притяжения нулевого решения. В силу замены (2.1) из полученных оценок будут вытекать соответствующие результаты для начальной задачи (1.1)–(1.2) при $n = 1$.

Оценки будут получены с использованием модифицированного функционала Ляпунова—Красовского, построенного в предыдущем разделе:

$$V(t, x) = \langle H_1 x(t), x(t) \rangle + \int_{t-\tau_1}^t \langle K_1(t-s)x(s), x(s) \rangle ds, \quad (4.2)$$

где

$$H_1 = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{01} & h_{11} \end{pmatrix} > 0, \quad K_1(s) = e^{-\kappa_1 s}(B_1^* B_1 + M_1), \quad M_1 = M_1^* > 0, \quad \kappa_1 > 0, \quad s \in [0, \tau_1],$$

величины h_{00} , h_{01} , h_{11} определены в (3.10), число κ_1 определено в (3.12), матрица M_1 будет определена ниже.

Введем следующие обозначения. Пусть $c_1 > 0$ — такое число, что выполнено неравенство

$$\langle R_1 u, u \rangle \geq c_1 \langle H_1 u, u \rangle, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad (4.3)$$

где матрица $R_1 > 0$ определена в (3.8), (3.11). Например, можно взять $c_1 = r_{1,\min}/\|H_1\|$, где

$$r_{1,\min} = \frac{1}{2}(r_{00} + r_{11}) - \sqrt{\frac{1}{4}(r_{00} - r_{11})^2 + r_{01}^2}, \quad \|H_1\| = \frac{1}{2}(h_{00} + h_{11}) + \sqrt{\frac{1}{4}(h_{00} - h_{11})^2 + h_{01}^2}.$$

Наибольшее число $c_1 > 0$, при котором выполняется неравенство (4.3), имеет вид

$$c_1 = \frac{1}{(h_{00}h_{11} - h_{01}^2)} \left(\frac{1}{2}(h_{00}r_{11} + h_{11}r_{00} - 2h_{01}r_{01}) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}(h_{00}r_{11} - h_{11}r_{00} - 2h_{01}r_{01}) + h_{11}\frac{r_{01}^2}{r_{11}} \right)^2 + \left(h_{11}\frac{r_{01}}{r_{11}} - h_{01} \right)^2 (r_{00}r_{11} - r_{01}^2)} \right).$$

Предположим, что функция $p_1(S)$ является дважды непрерывно дифференцируемой. При $\theta > 0$ рассмотрим функции

$$\zeta_1(\theta) = \max_{\substack{|s| \leq \theta \\ \lambda_1 + s \geq 0}} |p_1''(\lambda_1 + s)|, \quad \eta_1(\theta) = \max_{\substack{|s| \leq \theta \\ \lambda_1 + s \geq 0}} |p_1'(\lambda_1 + s)|. \quad (4.4)$$

Пусть $\theta > 0$ таково, что выполнено неравенство

$$2e^{\kappa_1 \tau_1/2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta < c_1, \quad (4.5)$$

где

$$\nu_1 = \frac{h_{00} \eta_1^2(\theta) + h_{01} a_1 \zeta_1(\theta) \eta_1(\theta) + \frac{1}{4} h_{11} a_1^2 \zeta_1^2(\theta)}{h_{00} h_{11} - h_{01}^2}, \quad a_1 = \frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D. \quad (4.6)$$

Положим

$$M_1 = \mu_1 H_1, \quad \mu_1 = e^{\kappa_1 \tau_1/2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta. \quad (4.7)$$

Также введем обозначения

$$\delta_1 = \min \left\{ \left(c_1 - 2e^{\kappa_1 \tau_1/2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta \right), \kappa_1 \right\} > 0, \quad q_1 = \sqrt{h_{00}} \xi_1, \quad (4.8)$$

$$\xi_1 = \frac{h_{01} \eta_1(\theta) + \frac{1}{2} h_{11} a_1 \zeta_1(\theta) + \sqrt{h_{11} (h_{00} \eta_1^2(\theta) + h_{01} a_1 \zeta_1(\theta) \eta_1(\theta) + \frac{1}{4} h_{11} a_1^2 \zeta_1^2(\theta))}}{h_{00} h_{11} - h_{01}^2}, \quad (4.9)$$

$$s_1 = \frac{h_{11}}{(h_{00} h_{11} - h_{01}^2)}, \quad n_1 = \frac{h_{00}}{(h_{00} h_{11} - h_{01}^2)}. \quad (4.10)$$

Сформулируем основные результаты настоящего параграфа.

Теорема 2. Пусть $\lambda_1 < S^0$, функция $p_1(S)$ является дважды непрерывно дифференцируемой и $p_1'(\lambda_1) > 0$. Тогда для решения $x(t) = (\tilde{S}(t), \tilde{N}_1(t))^T$ начальной задачи (4.1) с начальными данными, удовлетворяющими условиям

$$\max_{t \in [-\tau_1, 0]} |\psi_0(t)| \leq \theta, \quad |\psi_0(0)| < \theta, \quad \psi_0(t) + \lambda_1 \geq 0, \quad \psi_1(t) + \frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D \geq 0, \quad (4.11)$$

$$\sqrt{V(0, \psi)} < \frac{\delta_1}{q_1}, \quad \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{V(0, \psi)}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \psi)}\right)} \leq \theta, \quad (4.12)$$

справедливы оценки

$$|\tilde{S}(t)| \leq \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{V(0, \psi)}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \psi)}\right)} e^{-\delta_1 t/2}, \quad t > 0, \quad (4.13)$$

$$|\tilde{N}_1(t)| \leq \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{V(0, \psi)}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \psi)}\right)} e^{-\delta_1 t/2}, \quad t > 0. \quad (4.14)$$

Доказательство теоремы 2 будет приведено в следующем разделе.

Сформулируем результат для системы (1.1), непосредственно вытекающий из теоремы 2.

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.1) при $n = 1$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S(t) = (S^0 - S(t))D - p_1(S(t))N_1(t), \\ \frac{d}{dt} N_1(t) = -D_1 N_1(t) + \alpha_1 p_1(S(t - \tau_1))N_1(t - \tau_1), \\ S(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-\tau_1, 0], \quad S(+0) = \varphi_0(0), \\ N_1(t) = \varphi_1(t), \quad t \in [-\tau_1, 0], \quad N_1(+0) = \varphi_1(0), \end{cases} \quad (4.15)$$

где $\varphi_0(t), \varphi_1(t)$ — непрерывные неотрицательные функции.

Введем обозначения

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \end{pmatrix}, \quad x^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\lambda_1 < S^0$, функция $p_1(S)$ является дважды непрерывно дифференцируемой и $p'_1(\lambda_1) > 0$. Тогда для решения $(S(t), N_1(t))^T$ начальной задачи (4.15) с начальными данными, удовлетворяющими условиям

$$\max_{t \in [-\tau_1, 0]} |\varphi_0(t) - \lambda_1| \leq \theta, \quad |\varphi_0(0) - \lambda_1| < \theta, \quad \varphi_0(t) \geq 0, \quad \varphi_1(t) \geq 0,$$

$$\sqrt{V(0, \varphi - x^*)} < \frac{\delta_1}{q_1}, \quad \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{V(0, \varphi - x^*)}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \varphi - x^*)}\right)} \leq \theta,$$

справедливы оценки

$$|S(t) - \lambda_1| \leq \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{V(0, \varphi - x^*)}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \varphi - x^*)}\right)} e^{-\delta_1 t/2}, \quad t > 0,$$

$$\left| N_1(t) - \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D \right| \leq \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{V(0, \varphi - x^*)}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \varphi - x^*)}\right)} e^{-\delta_1 t/2}, \quad t > 0.$$

5. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова—Красовского (4.2). Дифференцируя его вдоль решения начальной задачи (4.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, x) &= \left\langle H_1 \frac{d}{dt} x(t), x(t) \right\rangle + \left\langle H_1 x(t), \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle + \\ &+ \langle K_1(0)x(t), x(t) \rangle - \langle K_1(\tau_1)x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \rangle + \int_{t-\tau_1}^t \left\langle \frac{d}{dt} K_1(t-s)x(s), x(s) \right\rangle ds = \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} H_1 A_1 + A_1^* H_1 + K_1(0) & H_1 B_1 \\ B_1^* H_1 & -K_1(\tau_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix} \right\rangle + \\ &+ 2 \left\langle H_1 x(t), F_1(x(t)) \right\rangle + 2 \left\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \right\rangle - \kappa_1 \int_{t-\tau_1}^t \left\langle K_1(t-s)x(s), x(s) \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Учитывая обозначение (3.7) и неравенства (3.9) и (4.3), получим оценку

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} H_1 A_1 + A_1^* H_1 + K_1(0) & H_1 B_1 \\ B_1^* H_1 & -K_1(\tau_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix} \right\rangle &\leq \\ &\leq -c_1 \left\langle H_1 x(t), x(t) \right\rangle + \left\langle M_1 x(t), x(t) \right\rangle - e^{-\kappa_1 \tau_1} \left\langle M_1 x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \right\rangle. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, x) &\leq -c_1 \left\langle H_1 x(t), x(t) \right\rangle + \left\langle M_1 x(t), x(t) \right\rangle - e^{-\kappa_1 \tau_1} \left\langle M_1 x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \right\rangle \\ &+ 2 \left\langle H_1 x(t), F_1(x(t)) \right\rangle + 2 \left\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \right\rangle - \kappa_1 \int_{t-\tau_1}^t \left\langle K_1(t-s)x(s), x(s) \right\rangle ds. \quad (5.1) \end{aligned}$$

Вначале предположим, что $t \in [0, \tau_1]$. Оценим

$$m(t) = \left\langle M_1 x(t), x(t) \right\rangle + 2 \left\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \right\rangle - e^{-\kappa_1 \tau_1} \left\langle M_1 x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \right\rangle. \quad (5.2)$$

Используя явный вид (2.7) вектор-функции $G_1(x(t - \tau_1))$, будем иметь

$$\begin{aligned} 2\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \rangle &= 2\langle H_1^{1/2} x(t), H_1^{1/2} G_1(x(t - \tau_1)) \rangle \leq \\ &\leq 2 \|H_1^{1/2} x(t)\| \|H_1^{1/2} G_1(x(t - \tau_1))\| = 2\sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{11}} \alpha_1 |f_a(x(t - \tau_1)) + f_b(x(t - \tau_1))|, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_a(x(t - \tau_1)) &= \frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1)) - p_1(\lambda_1) - p'_1(\lambda_1) \tilde{S}(t - \tau_1)), \\ f_b(x(t - \tau_1)) &= (p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1)) - p_1(\lambda_1)) \tilde{N}_1(t - \tau_1). \end{aligned}$$

Поскольку $t \in [0, \tau_1]$, то $t - \tau_1 \in [-\tau_1, 0]$. Следовательно, в силу условия (4.11) имеем

$$|\tilde{S}(t - \tau_1)| = |\psi_0(t - \tau_1)| \leq \theta.$$

Учитывая обозначения (4.4), получим следующие оценки:

$$|p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1)) - p_1(\lambda_1) - p'_1(\lambda_1) \tilde{S}(t - \tau_1)| \leq \frac{1}{2} \zeta_1(\theta) \tilde{S}^2(t - \tau_1) \leq \frac{1}{2} \zeta_1(\theta) \theta |\tilde{S}(t - \tau_1)|, \quad (5.3)$$

$$|p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1)) - p_1(\lambda_1)| \leq \eta_1(\theta) |\tilde{S}(t - \tau_1)| \leq \eta_1(\theta) \theta. \quad (5.4)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 2\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \rangle &\leq 2\sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{11}} \alpha_1 \theta \times \\ &\times \left(\frac{\alpha_1}{2D_1} (S^0 - \lambda_1) D \zeta_1(\theta) |\tilde{S}(t - \tau_1)| + \eta_1(\theta) |\tilde{N}_1(t - \tau_1)| \right) = \\ &= 2\sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{11}} \alpha_1 \theta \sqrt{\left\langle Q_1 \begin{pmatrix} |\tilde{S}(t - \tau_1)| \\ |\tilde{N}_1(t - \tau_1)| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |\tilde{S}(t - \tau_1)| \\ |\tilde{N}_1(t - \tau_1)| \end{pmatrix} \right\rangle}, \end{aligned}$$

где

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} a_1^2 \zeta_1^2(\theta) & \frac{1}{2} a_1 \zeta_1(\theta) \eta_1(\theta) \\ \frac{1}{2} a_1 \zeta_1(\theta) \eta_1(\theta) & \eta_1^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad a_1 = \frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D. \quad (5.5)$$

Для дальнейших оценок нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть Q — симметричная матрица с неотрицательными элементами и H — симметричная положительно определенная матрица:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{01} & q_{11} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{01} & h_{11} \end{pmatrix}.$$

Тогда для любых $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\left\langle Q \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \end{pmatrix} \right\rangle \leq \nu \left\langle H \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (5.6)$$

где

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{(h_{00} h_{11} - h_{01}^2)} \left(\frac{1}{2} (h_{00} q_{11} + h_{11} q_{00} + 2|h_{01} q_{01}|) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{1}{4} (h_{00} q_{11} - h_{11} q_{00})^2 + (h_{00} q_{01} + |h_{01} q_{00}|)(h_{11} q_{01} + |h_{01} q_{11}|)} \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Неравенство (5.6) можно переписать в виде

$$\left\langle \begin{pmatrix} (\nu h_{00} - q_{00}) & -(\nu h_{01} + q_{01}) \\ -(\nu h_{01} + q_{01}) & (\nu h_{11} - q_{11}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \end{pmatrix} \right\rangle \geq -2\nu (|h_{01}| |x_0| |x_1| + h_{01} x_0 x_1).$$

Для справедливости данной оценки достаточно потребовать, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} (\nu h_{00} - q_{00}) & -(\nu|h_{01}| + q_{01}) \\ -(\nu|h_{01}| + q_{01}) & (\nu h_{11} - q_{11}) \end{pmatrix}$$

являлась неотрицательно определенной. Это требование эквивалентно условиям

$$\nu h_{00} - q_{00} \geq 0, \quad \nu h_{11} - q_{11} \geq 0, \quad (\nu h_{00} - q_{00})(\nu h_{11} - q_{11}) - (\nu|h_{01}| + q_{01})^2 \geq 0.$$

Проводя несложные арифметические выкладки, нетрудно проверить, что эти неравенства будут выполнены. Лемма 1 доказана. $\square$

Учитывая обозначение (5.5) для матрицы Q_1 и используя лемму 1, получим оценку

$$\left\langle Q_1 \begin{pmatrix} |\tilde{S}(t - \tau_1)| \\ |\tilde{N}_1(t - \tau_1)| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |\tilde{S}(t - \tau_1)| \\ |\tilde{N}_1(t - \tau_1)| \end{pmatrix} \right\rangle \leq \nu_1 \left\langle H_1 \begin{pmatrix} \tilde{S}(t - \tau_1) \\ \tilde{N}_1(t - \tau_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{S}(t - \tau_1) \\ \tilde{N}_1(t - \tau_1) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где ν_1 определяется по формуле (4.6). Следовательно,

$$2\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \rangle \leq 2\sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{11}} \alpha_1 \theta \sqrt{\nu_1 \langle H_1 x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \rangle},$$

откуда

$$\begin{aligned} m(t) \leq & \langle M_1 x(t), x(t) \rangle - e^{-\kappa_1 \tau_1} \langle M_1 x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \rangle + \\ & + 2\sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{11}} \alpha_1 \theta \sqrt{\nu_1 \langle H_1 x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \rangle}. \end{aligned}$$

С учетом обозначения (4.7) нетрудно получить оценку

$$m(t) \leq 2e^{\kappa_1 \tau_1/2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta \langle H_1 x(t), x(t) \rangle.$$

В силу полученного неравенства при $t \in [0, \tau_1]$ из (5.1) и (5.2) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, x) \leq & - \left(c_1 - 2e^{\kappa_1 \tau_1/2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta \right) \langle H_1 x(t), x(t) \rangle + \\ & + 2\langle H_1 x(t), F_1(x(t)) \rangle - \kappa_1 \int_{t-\tau_1}^t \langle K_1(t-s)x(s), x(s) \rangle ds. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Теперь оценим $2\langle H_1 x(t), F_1(x(t)) \rangle$. Учитывая явный вид (2.6) вектор-функции $F_1(x(t))$, получим оценку

$$\begin{aligned} 2\langle H_1 x(t), F_1(x(t)) \rangle &= 2\langle H_1^{1/2} x(t), H_1^{1/2} F_1(x(t)) \rangle \leq \\ &\leq 2 \left\| H_1^{1/2} x(t) \right\| \left\| H_1^{1/2} F_1(x(t)) \right\| = 2\sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{00}} (|f_a(x(t)) + f_b(x(t))|), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_a(x(t)) &= \frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D \left(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) - p'_1(\lambda_1) \tilde{S}(t) \right), \\ f_b(x(t)) &= (p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1)) \tilde{N}_1(t). \end{aligned}$$

В силу условия (4.11) имеем $|\tilde{S}(0)| = |\psi_0(0)| < \theta$. Покажем, что неравенство $|\tilde{S}(t)| < \theta$ также будет выполнено при $t \in [0, \tau_1]$. Предположим, напротив, что существует такая точка $t^* \in (0, \tau_1]$, что $|\tilde{S}(t)| < \theta$ при $t \in [0, t^*]$ и $|\tilde{S}(t^*)| = \theta$. Тогда при $t \in [0, t^*]$ по аналогии с (5.3), (5.4) установим справедливость неравенств

$$\begin{aligned} \left| p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) - p'_1(\lambda_1) \tilde{S}(t) \right| &\leq \frac{1}{2} \zeta_1(\theta) \tilde{S}^2(t), \\ \left| p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) \right| &\leq \eta_1(\theta) |\tilde{S}(t)|. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$2\langle H_1 x(t), F_1(x(t)) \rangle \leq \sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{00}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D\zeta_1(\theta) \tilde{S}^2(t) + 2\eta_1(\theta) |\tilde{S}(t)| |\tilde{N}_1(t)| \right) = \\
& = \sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{00}} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D\zeta_1(\theta) & \eta_1(\theta) \\ \eta_1(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\tilde{S}(t)| \\ |\tilde{N}_1(t)| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |\tilde{S}(t)| \\ |\tilde{N}_1(t)| \end{pmatrix} \right\rangle.
\end{aligned}$$

В силу леммы 1 справедливо неравенство

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D\zeta_1(\theta) & \eta_1(\theta) \\ \eta_1(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\tilde{S}(t)| \\ |\tilde{N}_1(t)| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |\tilde{S}(t)| \\ |\tilde{N}_1(t)| \end{pmatrix} \right\rangle \leq \xi_1 \left\langle H_1 \begin{pmatrix} \tilde{S}(t) \\ \tilde{N}_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{S}(t) \\ \tilde{N}_1(t) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где ξ_1 определяется по формуле (4.9). Отсюда вытекает оценка

$$2 \langle H_1 x(t), F_1(x(t)) \rangle \leq q_1 \langle H_1 x(t), x(t) \rangle^{3/2} \leq q_1 V^{3/2}(t, x),$$

где q_1 определено в (4.8).

Из установленной оценки и неравенства (5.7) при $t \in [0, t^*]$ получим оценку

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(t, x) & \leq - \left(c_1 - 2e^{\kappa_1 \tau_1 / 2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta \right) \langle H_1 x(t), x(t) \rangle + \\
& + q_1 V^{3/2}(t, x) - \kappa_1 \int_{t-\tau_1}^t \langle K_1(t-s)x(s), x(s) \rangle ds.
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая обозначение (4.8) и определение (4.2) функционала $V(t, x)$, нетрудно получить неравенство

$$\frac{d}{dt} V(t, x) \leq -\delta_1 V(t, x) + q_1 V^{3/2}(t, x).$$

Из данной оценки, используя неравенство Гронуолла (см., например, [11]), установим оценку

$$V(t, x) \leq \frac{V(0, \psi) e^{-\delta_1 t}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \psi)} \right)^2}.$$

Отсюда получим неравенство

$$\langle H_1 x(t), x(t) \rangle \leq \frac{V(0, \psi) e^{-\delta_1 t}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \psi)} \right)^2}.$$

Поскольку

$$\tilde{S}^2(t) \leq s_1 \langle H_1 x(t), x(t) \rangle, \quad \tilde{N}_1^2(t) \leq n_1 \langle H_1 x(t), x(t) \rangle,$$

где s_1 и n_1 определены в (4.10), из последнего неравенства нетрудно установить справедливость оценок (4.13) и (4.14) при $t \in [0, t^*]$. В частности, из оценок (4.12) и (4.13) следуют неравенства

$$|\tilde{S}(t)| \leq \theta, \quad t \in [0, t^*], \quad |\tilde{S}(t^*)| < \theta.$$

Получили противоречие с тем, что $|\tilde{S}(t^*)| = \theta$. Тем самым, оценки (4.13) и (4.14) справедливы при всех $t \in [0, \tau_1]$, при этом будут выполнены неравенства

$$|\tilde{S}(t)| \leq \theta, \quad t \in [0, \tau_1], \quad |\tilde{S}(\tau_1)| < \theta.$$

Далее рассмотрим промежуток $t \in [\tau_1, 2\tau_1]$. Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $t \in [0, \tau_1]$, установим справедливость неравенств (4.13) и (4.14) при $t \in [\tau_1, 2\tau_1]$. Применяя метод математической индукции, получим оценки (4.13) и (4.14) при $t \in [k\tau_1, (k+1)\tau_1]$, $k \in \mathbb{N}$. В силу произвольности $k \in \mathbb{N}$ отсюда вытекает справедливость неравенств (4.13) и (4.14) при всех $t > 0$. Теорема 2 доказана.

6. Оценки скорости сходимости к нетривиальному положению равновесия в случае произвольного n . В данном разделе будем предполагать, что выполнено условие $\lambda_1 < S^0$, функция $p_1(S)$ является непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $S = \lambda_1$ и

$$p'_1(\lambda_1) > 0, \quad p_i(\lambda_1) < \frac{D_i}{\alpha_i}, \quad i = 2, \dots, n.$$

В этом случае в силу теоремы 1 нетривиальное положение равновесия (1.4) системы (1.1) является асимптотически устойчивым.

Поскольку исследование устойчивости положения равновесия (1.4) системы (1.1) эквивалентно исследованию устойчивости нулевого решения системы (2.13), для системы (2.13) рассмотрим следующую начальную задачу:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = \mathbf{A}y(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i y(t - \tau_i) + \mathbf{F}(y(t)) + \mathbf{G}(y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n)), \\ y(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \quad y(+0) = \psi(0), \quad \tau_{\max} = \max\{\tau_1, \dots, \tau_n\}, \end{cases} \quad (6.1)$$

где $y(t)$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_i$, $i = 1, \dots, n$, $\mathbf{F}(y(t))$, $\mathbf{G}(y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n))$ определены в (2.4), (2.14)–(2.17),

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_n(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \psi_0(t) = \varphi_0(t) - \lambda_1, \\ \psi_1(t) = \varphi_1(t) - \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D, \\ \psi_2(t) = \varphi_2(t), \dots, \psi_n(t) = \varphi_n(t), \end{cases}$$

$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ — непрерывные неотрицательные функции.

Мы получим оценки решений начальной задачи (6.1), характеризующие скорость убывания на бесконечности, и укажем оценки множества притяжения нулевого решения. В силу замены (2.1) из полученных оценок будут вытекать соответствующие результаты для начальной задачи (1.1)–(1.2) для произвольного n .

При получении оценок будем использовать модифицированный функционал Ляпунова—Красовского, построенный по аналогии с функционалом (4.2):

$$\mathbf{V}(t, y) = \langle \mathbf{H}y(t), y(t) \rangle + \sum_{i=1}^n \int_{t-\tau_i}^t \langle \mathbf{K}_i(t-s)y(s), y(s) \rangle ds,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_n \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{01} & h_{11} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_1(s) &= \begin{pmatrix} K_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1(s) = e^{-\kappa_1 s}(B_1^* B_1 + M_1), \quad s \in [0, \tau_1], \quad (6.2) \\ \mathbf{K}_2(s) &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad k_2(s) = e^{-\kappa_2 s} \beta_2, \quad s \in [0, \tau_2], \quad (6.3) \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_n(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n(s) \end{pmatrix}, \quad k_n(s) = e^{-\kappa_n s} \beta_n, \quad s \in [0, \tau_n]. \quad (6.4)$$

Нетрудно заметить, что функционал можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t, y) = & \langle H_1 x(t), x(t) \rangle + \sum_{i=2}^n h_i \tilde{N}_i^2(t) + \\ & + \int_{t-\tau_1}^t \langle K_1(t-s)x(s), x(s) \rangle ds + \sum_{i=2}^n \int_{t-\tau_i}^t k_i(t-s) \tilde{N}_i^2(s) ds. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Перейдем к описанию величин, входящих в определение функционала (6.5). Так же, как и в случае $n = 1$, величины h_{00} , h_{01} , h_{11} определяются по формулам (3.10), число κ_1 определяется из неравенств (3.12).

Пусть величина $c_1 > 0$ определяется из неравенства (4.3). Предположим, что функция $p_1(S)$ является дважды непрерывно дифференцируемой, а функции $p_i(S)$, $i = 2, \dots, n$, один раз непрерывно дифференцируемы. При $\theta > 0$ рассмотрим функции (4.4)

$$\zeta_1(\theta) = \max_{\substack{|s| \leq \theta \\ \lambda_1 + s \geq 0}} |p_1''(\lambda_1 + s)|, \quad \eta_1(\theta) = \max_{\substack{|s| \leq \theta \\ \lambda_1 + s \geq 0}} |p_1'(\lambda_1 + s)|,$$

а также введем следующие функции:

$$\eta_i(\theta) = \max_{\substack{|s| \leq \theta \\ \lambda_1 + s \geq 0}} |p_i'(\lambda_1 + s)|, \quad i = 2, \dots, n. \quad (6.6)$$

Пусть $\theta > 0$ таково, что выполнено неравенство (4.5):

$$2e^{\kappa_1 \tau_1/2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta < c_1,$$

где величина ν_1 определяется по формуле (4.6), и имеют место следующие неравенства:

$$\alpha_i p_i(\lambda_1 + \theta) < D_i, \quad i = 2, \dots, n.$$

Так же, как и выше, определим матрицу $M_1 = M_1^* > 0$ по формуле (4.7).

Далее определим величины $\kappa_i > 0$, $i = 2, \dots, n$, из следующих условий:

$$c_i = 2 \left(D_i - e^{\kappa_i \tau_i/2} \alpha_i p_i(\lambda_1 + \theta) \right) > 0, \quad i = 2, \dots, n. \quad (6.7)$$

Пусть $\varepsilon_i > 0$, $i = 2, \dots, n$, — такие числа, что выполняется неравенство

$$\omega_1 = 2e^{\kappa_1 \tau_1/2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i h_{00} < c_1, \quad (6.8)$$

а величины $h_i > 0$, $i = 2, \dots, n$, определяются из неравенств

$$h_i > \frac{p_i^2(\lambda_1)}{c_i \varepsilon_i}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Наконец, положим

$$\beta_i = e^{\kappa_i \tau_i/2} h_i \alpha_i p_i(\lambda_1 + \theta), \quad i = 2, \dots, n. \quad (6.9)$$

Функционал (6.5) полностью определен.

Для формулировки основных результатов введем еще некоторые обозначения. Положим

$$\delta = \min \left\{ (c_1 - \omega_1), \left(c_2 - \frac{p_2^2(\lambda_1)}{h_2 \varepsilon_2} \right), \dots, \left(c_n - \frac{p_n^2(\lambda_1)}{h_n \varepsilon_n} \right), \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n \right\} > 0. \quad (6.10)$$

Пусть $\sigma > 0$ — произвольное положительное число,

$$q = \sqrt{h_{00}} \max \{ \xi, \sigma \}, \quad (6.11)$$

где

$$\xi = \frac{h_{01}\eta_1(\theta) + \frac{1}{2}h_{11}\varrho(\theta) + \sqrt{h_{11}(h_{00}\eta_1^2(\theta) + h_{01}\varrho(\theta)\eta_1(\theta) + \frac{1}{4}h_{11}\varrho^2(\theta))}}{(h_{00}h_{11} - h_{01}^2)}, \quad (6.12)$$

$$\varrho(\theta) = \left[\frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D\zeta_1(\theta) + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=2}^n \frac{\eta_i^2(\theta)}{h_i} \right]. \quad (6.13)$$

Определим величины s_1 и n_1 по формулам (4.10):

$$s_1 = \frac{h_{11}}{(h_{00}h_{11} - h_{01}^2)}, \quad n_1 = \frac{h_{00}}{(h_{00}h_{11} - h_{01}^2)}.$$

Наконец, перейдем к формулировке основных результатов.

Теорема 4. Пусть $\lambda_1 < S^0$, функция $p_1(S)$ является дважды непрерывно дифференцируемой, функции $p_i(S)$, $i = 2, \dots, n$, один раз непрерывно дифференцируемы, $p'_1(\lambda_1) > 0$ и $p_i(\lambda_1) < D_i/\alpha_i$, $i = 2, \dots, n$. Тогда для решения $y(t) = (\tilde{S}(t), \tilde{N}_1(t), \tilde{N}_2(t), \dots, \tilde{N}_n(t))^T$ начальной задачи (6.1) с начальными данными, удовлетворяющими условиям

$$\max_{t \in [-\tau_1, 0]} |\psi_0(t)| \leq \theta, \quad |\psi_0(0)| < \theta, \quad (6.14)$$

$$\psi_0(t) + \lambda_1 \geq 0, \quad \psi_1(t) + \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D \geq 0, \quad \psi_i(t) \geq 0, \quad i = 2, \dots, n,$$

$$\sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)} < \frac{\delta}{q}, \quad \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}\right)} \leq \theta \quad (6.15)$$

справедливы оценки

$$|\tilde{S}(t)| \leq \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}\right)} e^{-\delta t/2}, \quad t > 0, \quad (6.16)$$

$$|\tilde{N}_1(t)| \leq \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}\right)} e^{-\delta t/2}, \quad t > 0, \quad (6.17)$$

$$|\tilde{N}_i(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{h_i}} \frac{\sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}\right)} e^{-\delta t/2}, \quad i = 2, \dots, n, \quad t > 0. \quad (6.18)$$

Доказательство теоремы 4 будет приведено в следующем разделе.

Сформулируем результат для системы (1.1), непосредственно вытекающий из теоремы 4. Введем обозначения

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}, \quad y^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $\lambda_1 < S^0$, функция $p_1(S)$ является дважды непрерывно дифференцируемой, функции $p_i(S)$, $i = 2, \dots, n$, один раз непрерывно дифференцируемы, $p'_1(\lambda_1) > 0$ и $p_i(\lambda_1) < D_i/\alpha_i$, $i = 2, \dots, n$. Тогда для решения $(S(t), N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t))^T$ начальной задачи (1.1)–(1.2) с начальными данными, удовлетворяющими условиям

$$\max_{t \in [-\tau_1, 0]} |\varphi_0(t) - \lambda_1| \leq \theta, \quad |\varphi_0(0) - \lambda_1| < \theta, \quad \varphi_i(t) \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$\sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)} < \frac{\delta}{q}, \quad \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}\right)} \leq \theta,$$

справедливы оценки

$$\begin{aligned} |S(t) - \lambda_1| &\leq \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}\right)} e^{-\delta t/2}, & t > 0, \\ \left|N_1(t) - \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D\right| &\leq \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}\right)} e^{-\delta t/2}, & t > 0, \\ |N_i(t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{h_i}} \frac{\sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}\right)} e^{-\delta t/2}, & i = 2, \dots, n, \quad t > 0. \end{aligned}$$

7. Доказательство теоремы 4. Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова—Красовского (6.5). Дифференцируя его вдоль решения начальной задачи (6.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{V}(t, y) &= \left\langle H_1 \frac{d}{dt} x(t), x(t) \right\rangle + \left\langle H_1 x(t), \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle + \sum_{i=2}^n 2h_i \tilde{N}_i(t) \frac{d}{dt} \tilde{N}_i(t) + \\ &+ \left\langle K_1(0)x(t), x(t) \right\rangle - \left\langle K_1(\tau_1)x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \right\rangle + \int_{t-\tau_1}^t \left\langle \frac{d}{dt} K_1(t-s)x(s), x(s) \right\rangle ds + \\ &+ \sum_{i=2}^n k_i(0) \tilde{N}_i^2(t) - \sum_{i=2}^n k_i(\tau_i) \tilde{N}_i^2(t - \tau_i) + \sum_{i=2}^n \int_{t-\tau_i}^t \frac{d}{dt} k_i(t-s) \tilde{N}_i^2(s) ds. \end{aligned}$$

Учитывая, что система дифференциальных уравнений в начальной задаче (6.1) может быть записана в виде (2.12), а матрица $K_1(s)$ и функции $k_i(s)$, $i = 2, \dots, n$, имеют вид (6.2)–(6.4), производную от функционала $\mathbf{V}(t, y)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{V}(t, y) &= \left\langle \begin{pmatrix} H_1 A_1 + A_1^* H_1 + K_1(0) & H_1 B_1 \\ B_1^* H_1 & -K_1(\tau_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix} \right\rangle + \\ &+ 2 \left\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \right\rangle + 2 \left\langle H_1 x(t), L(y(t)) \right\rangle + 2 \left\langle H_1 x(t), (F_1(x(t)) + U(y(t))) \right\rangle + \\ &+ \sum_{i=2}^n 2h_i \tilde{N}_i(t) \left(-D_i \tilde{N}_i(t) + \alpha_i p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_i)) \tilde{N}_i(t - \tau_i) \right) + \sum_{i=2}^n \beta_i \tilde{N}_i^2(t) - \\ &- \sum_{i=2}^n e^{-\kappa_i \tau_i} \beta_i \tilde{N}_i^2(t - \tau_i) - \kappa_1 \int_{t-\tau_1}^t \left\langle K_1(t-s)x(s), x(s) \right\rangle ds - \sum_{i=2}^n \kappa_i \int_{t-\tau_i}^t k_i(t-s) \tilde{N}_i^2(s) ds. \quad (7.1) \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \left\langle \begin{pmatrix} H_1 A_1 + A_1^* H_1 + K_1(0) & H_1 B_1 \\ B_1^* H_1 & -K_1(\tau_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix} \right\rangle + 2 \left\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \right\rangle, \\ J_2(t) &= 2 \left\langle H_1 x(t), L(y(t)) \right\rangle, \\ J_3(t) &= \sum_{i=2}^n 2h_i \tilde{N}_i(t) \left(-D_i \tilde{N}_i(t) + \alpha_i p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_i)) \tilde{N}_i(t - \tau_i) \right) + \sum_{i=2}^n \beta_i \tilde{N}_i^2(t) - \sum_{i=2}^n e^{-\kappa_i \tau_i} \beta_i \tilde{N}_i^2(t - \tau_i), \\ J_4(t) &= 2 \left\langle H_1 x(t), (F_1(x(t)) + U(y(t))) \right\rangle. \end{aligned}$$

Тогда тождество (7.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{V}(t, y) = J_1(t) + J_2(t) + J_3(t) + J_4(t) - \\ - \kappa_1 \int_{t-\tau_1}^t \left\langle K_1(t-s)x(s), x(s) \right\rangle ds - \sum_{i=2}^n \kappa_i \int_{t-\tau_i}^t k_i(t-s) \tilde{N}_i^2(s) ds. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Вначале предположим, что $t \in [0, \tau_{\min}]$, где $\tau_{\min} = \min\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$.

1. Оценим $J_1(t)$. Поскольку $t \in [0, \tau_{\min}]$, то $t - \tau_1 \leq 0$. Следовательно, в силу условия (6.14) имеем

$$|\tilde{S}(t - \tau_1)| = |\psi_0(t - \tau_1)| \leq \theta.$$

Точно так же, как и в случае $n = 1$, установим справедливость неравенства

$$J_1(t) \leq \left(c_1 - 2e^{\kappa_1 \tau_1/2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta \right) \langle H_1 x(t), x(t) \rangle, \quad (7.3)$$

где c_1 определено в (4.3), ν_1 определено в (4.6).

2. Оценим $J_2(t)$. Учитывая явный вид (2.10) вектор-функции $L(y(t))$, получим

$$J_2(t) = 2 \left\langle \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{S}(t) \\ \tilde{N}_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l(y(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \left\langle \tilde{H}_0 x(t), L(y(t)) \right\rangle,$$

где

$$\tilde{H}_0 = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в силу формулы (2.10) имеем

$$\begin{aligned} J_2(t) &= -2 \sum_{i=2}^n \left\langle \tilde{H}_0 x(t), \begin{pmatrix} p_i(\lambda_1) \tilde{N}_i(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 2 \sum_{i=2}^n \left\| \tilde{H}_0 x(t) \right\| \left\| \begin{pmatrix} p_i(\lambda_1) \tilde{N}_i(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= 2 \sum_{i=2}^n \left\| \tilde{H}_0 x(t) \right\| p_i(\lambda_1) \tilde{N}_i(t) \leq \sum_{i=2}^n \left(\varepsilon_i \left\| \tilde{H}_0 x(t) \right\|^2 + \frac{p_i^2(\lambda_1)}{\varepsilon_i} \tilde{N}_i^2(t) \right) = \\ &= \sum_{i=2}^n \varepsilon_i \left\langle \tilde{H}_0^* \tilde{H}_0 x(t), x(t) \right\rangle + \sum_{i=2}^n \frac{p_i^2(\lambda_1)}{\varepsilon_i} \tilde{N}_i^2(t). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что имеет место неравенство

$$\left\langle \tilde{H}_0^* \tilde{H}_0 x, x \right\rangle \leq h_{00} \langle H_1 x, x \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Отсюда получим оценку

$$J_2(t) \leq \sum_{i=2}^n \varepsilon_i h_{00} \langle H_1 x(t), x(t) \rangle + \sum_{i=2}^n \frac{p_i^2(\lambda_1)}{\varepsilon_i} \tilde{N}_i^2(t). \quad (7.4)$$

3. Оценим $J_3(t)$:

$$J_3(t) \leq - \sum_{i=2}^n \left(2h_i D_i - \beta_i - \frac{(h_i \alpha_i p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_i)))^2}{e^{-\kappa_i \tau_i} \beta_i} \right) \tilde{N}_i^2(t).$$

Поскольку $t \in [0, \tau_{\min}]$, то $t - \tau_i \leq 0$, $i = 2, \dots, n$. Следовательно, в силу условия (6.14) имеем

$$|\tilde{S}(t - \tau_i)| = |\psi_0(t - \tau_i)| \leq \theta.$$

Учитывая монотонное возрастание функций $p_i(S)$, $i = 2, \dots, n$, и обозначения (6.9), отсюда нетрудно установить неравенство

$$J_3(t) \leq - \sum_{i=2}^n 2 \left(D_i - e^{\kappa_i \tau_i/2} \alpha_i p_i(\lambda_1 + \theta) \right) h_i \tilde{N}_i^2(t).$$

В силу обозначений (6.7) это неравенство запишется в виде

$$J_3(t) \leq - \sum_{i=2}^n c_i h_i \tilde{N}_i^2(t). \quad (7.5)$$

4. Оценим $J_4(t)$. Учитывая явный вид (2.6) и (2.11) вектор-функций $F_1(x(t))$ и $U(y(t))$, получим оценку

$$\begin{aligned} J_4(t) &= 2 \left\langle H_1^{1/2} x(t), H_1^{1/2} (F_1(x(t)) + U(y(t))) \right\rangle \leq 2 \left\| H_1^{1/2} x(t) \right\| \left\| H_1^{1/2} (F_1(x(t)) + U(y(t))) \right\| = \\ &= 2 \sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{00}} \left(|f_a(x(t)) + f_b(x(t)) + u(y(t))| \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_a(x(t)) &= \frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D \left(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) - p'_1(\lambda_1) \tilde{S}(t) \right), \\ f_b(x(t)) &= \left(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) \right) \tilde{N}_1(t), \\ u(y(t)) &= - \sum_{i=2}^n \left(p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_i(\lambda_1) \right) \tilde{N}_i(t). \end{aligned}$$

В силу условия (6.14) имеем $|\tilde{S}(0)| = |\psi_0(0)| < \theta$. Покажем, что неравенство $|\tilde{S}(t)| < \theta$ также будет выполнено при $t \in [0, \tau_{\min}]$. Предположим, напротив, что существует такая точка $t^* \in (0, \tau_{\min}]$, что $|\tilde{S}(t)| < \theta$ при $t \in [0, t^*)$ и $|\tilde{S}(t^*)| = \theta$. Тогда при $t \in [0, t^*)$ по аналогии со случаем, когда $n = 1$, установим справедливость неравенств

$$\left| p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) - p'_1(\lambda_1) \tilde{S}(t) \right| \leq \frac{1}{2} \zeta_1(\theta) \tilde{S}^2(t),$$

$$\left| p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) \right| \leq \eta_1(\theta) |\tilde{S}(t)|, \quad \left| p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_i(\lambda_1) \right| \leq \eta_i(\theta) |\tilde{S}(t)|, \quad i = 2, \dots, n,$$

где $\zeta_1(\theta)$ и $\eta_1(\theta)$ определены в (4.4), $\eta_i(\theta)$, $i = 2, \dots, n$, определены в (6.6). Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} J_4(t) &\leq \sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{00}} \left(\frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D \zeta_1(\theta) \tilde{S}^2(t) + \right. \\ &\quad \left. + 2\eta_1(\theta) |\tilde{S}(t)| |\tilde{N}_1(t)| + \sum_{i=2}^n 2\eta_i(\theta) |\tilde{S}(t)| |\tilde{N}_i(t)| \right) \leq \\ &\leq \sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{00}} \left(\left[\frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D \zeta_1(\theta) + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=2}^n \frac{\eta_i^2(\theta)}{h_i} \right] \tilde{S}^2(t) + \right. \\ &\quad \left. + 2\eta_1(\theta) |\tilde{S}(t)| |\tilde{N}_1(t)| + \sigma \sum_{i=2}^n h_i \tilde{N}_i^2(t) \right). \end{aligned}$$

В силу леммы 1 справедливо неравенство

$$\left[\frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D \zeta_1(\theta) + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=2}^n \frac{\eta_i^2(\theta)}{h_i} \right] \tilde{S}^2(t) + 2\eta_1(\theta) |\tilde{S}(t)| |\tilde{N}_1(t)| \leq \xi \langle H_1 x(t), x(t) \rangle,$$

где ξ определяется по формулам (6.12)–(6.13). Отсюда вытекает оценка

$$J_4(t) \leq \sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{00}} \left(\xi \langle H_1 x(t), x(t) \rangle + \sigma \sum_{i=2}^n h_i \tilde{N}_i^2(t) \right).$$

Из данной оценки, учитывая обозначение (6.11) и определение (6.5) функционала $\mathbf{V}(t, y)$, получим неравенство

$$J_4(t) \leq q \sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \left(\langle H_1 x(t), x(t) \rangle + \sum_{i=2}^n h_i \tilde{N}_i^2(t) \right) \leq q \mathbf{V}^{3/2}(t, y). \quad (7.6)$$

Итак, используя представление (7.2) производной функционала $\mathbf{V}(t, y)$ и полученные оценки (7.3)–(7.6), при $t \in [0, t^*]$ приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{V}(t, y) \leq & - \left(c_1 - 2e^{\kappa_1 \tau_1/2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta - \sum_{i=2}^n \varepsilon_i h_{00} \right) \langle H_1 x(t), x(t) \rangle - \\ & - \sum_{i=2}^n \left(c_i - \frac{p_i^2(\lambda_1)}{h_i \varepsilon_i} \right) h_i \tilde{N}_i^2(t) + q \mathbf{V}^{3/2}(t, y) - \\ & - \kappa_1 \int_{t-\tau_1}^t \langle K_1(t-s)x(s), x(s) \rangle ds - \sum_{i=2}^n \kappa_i \int_{t-\tau_i}^t k_i(t-s) \tilde{N}_i^2(s) ds. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая обозначения (6.8) и (6.10), нетрудно получить неравенство

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V}(t, y) \leq -\delta \mathbf{V}(t, y) + q \mathbf{V}^{3/2}(t, y).$$

Из данной оценки, используя неравенство Гронуолла (см., например, [11]), выводим оценку

$$\mathbf{V}(t, y) \leq \frac{\mathbf{V}(0, \psi) e^{-\delta t}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}\right)^2}.$$

Отсюда нетрудно получить оценки (6.16)–(6.18) при $t \in [0, t^*]$. В частности, из оценок (6.15) и (6.16) следуют неравенства

$$|\tilde{S}(t)| \leq \theta, \quad t \in [0, t^*], \quad |\tilde{S}(t^*)| < \theta.$$

Получили противоречие с тем, что $|\tilde{S}(t^*)| = \theta$. Тем самым, оценки (6.16)–(6.18) будут справедливы при всех $t \in [0, \tau_{\min}]$; при этом будут выполнены неравенства

$$|\tilde{S}(t)| \leq \theta, \quad t \in [0, \tau_{\min}], \quad |\tilde{S}(\tau_{\min})| < \theta.$$

Далее рассмотрим промежуток $t \in [\tau_{\min}, 2\tau_{\min}]$. Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $t \in [0, \tau_{\min}]$, установим справедливость неравенств (6.16)–(6.18) при $t \in [\tau_{\min}, 2\tau_{\min}]$. Применяя метод математической индукции, получим оценки (6.16)–(6.18) при $t \in [k\tau_{\min}, (k+1)\tau_{\min}]$, $k \in \mathbb{N}$. В силу произвольности $k \in \mathbb{N}$ отсюда будет следовать справедливость неравенств (6.16)–(6.18) при всех $t > 0$.

Теорема 4 доказана.

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демиденко Г. В. Матричные уравнения. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2009.
2. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. мат. мех. информ. — 2005. — 5, № 3. — С. 20–28.
3. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. ж. — 2007. — 48, № 5. — С. 1025–1040.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: ГИФМЛ, 1959.
5. Матвеева И. И. Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. ж. индустр. мат. — 2013. — 16, № 3. — С. 122–132.
6. Скворцова М. А. Устойчивость решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Мат. заметки СВФУ. — 2016. — 23, № 2. — С. 108–120.

7. *Скворцова М. А.* Асимптотическая устойчивость положений равновесия и оценки решений в одной модели заболевания// Динам. сист. — 2017. — 7 (35), № 3. — С. 257–274.
8. *Скворцова М. А.* Оценки решений в модели хищник-жертва с запаздыванием// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. мат. — 2018. — 25. — С. 109–125.
9. *Скворцова М. А.* Об оценках решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями// Сиб. электрон. мат. изв. — 2018. — 15. — С. 1697–1718.
10. *Скворцова М. А.* Асимптотические свойства решений в модели взаимодействия популяций с несколькими запаздываниями// Мат. заметки СВФУ. — 2019. — 26, № 4.
11. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
12. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием// Диффер. уравн. — 2005. — 41, № 8. — С. 1137–1140.
13. *Mondie S., Kharitonov V. L.* Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach// IEEE Trans. Automat. Control. — 2005. — 50, № 2. — P. 268–273.
14. *Wolkowicz G. S. K., Xia H.* Global asymptotic behavior of a chemostat model with discrete delays// SIAM J. Appl. Math. — 1997. — 57, № 4. — P. 1019–1043.

Скворцова Мария Александровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;
Новосибирский государственный университет
E-mail: sm-18-nsu@yandex.ru