Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Воблый, Об одном подходе к перечислению помеченных связных графов: обзор результатов, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 188, 106–118

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-188-106-118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:54:42

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 106–118
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-106-118

УДК 519.175.3

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПЕРЕЧИСЛЕНИЮ ПОМЕЧЕННЫХ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ: ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

© 2020 г. В. А. ВОБЛЫЙ

Аннотация. Классическое функциональное уравнение Риддела связывает производящие функции помеченных связных графов и их блоков. Из этого уравнения автором с помощью теоремы обращения Лагранжа получена формула, являющаяся удобным инструментом для точного и асимптотического перечисления помеченных графов в том случае, когда известна производящая функция их блоков. Эта формула верна для блочно-устойчивых классов графов. Представлен обзор перечислительных результатов, полученных с помощью данного подхода для кактусов, полноблочно-кактусных графов, эйлеровых графов, геодезических графов, планарных графов и последовательно-параллельных графов.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, связный граф, блок.

ON AN APPROACH TO ENUMERATION OF LABELED CONNECTED GRAPHS: A REVIEW

© 2020 V. A. VOBLYI

ABSTRACT. The classical functional Riddell equation connects the generating functions of labeled connected graphs and their blocks. Using the Lagrange inversion theorem, the author obtained from this equation a formula, which is a convenient tool for the exact and asymptotic enumeration of labeled graphs in the case where the generating function of their blocks is known. This formula is valid for block-stable graph classes. A review of enumerative results obtained by using this approach for cacti, block-cactus graphs, Eulerian graphs, geodesic graphs, planar graphs, and series-parallel graphs is presented.

Keywords and phrases: enumeration, labeled graph, connected graph, block.

AMS Subject Classification: 05C30

1. Введение. Помеченный граф — это граф, вершинам которого назначены элементы конечного множества (метки), например, целые числа. Непомеченный или абстрактный граф является классом помеченных графов, эквивалентных относительно изоморфизма. В большинстве приложений теории графов используются помеченные графы. Для представления графа в компьютере нужно пометить числами его вершины.

Первая задача перечисления помеченных графов (перечисление помеченных деревьев) решена А. Кэли во второй половине XIX в. Она лежит у истоков теории графов. Перечисление помеченных графов применяется в статистической физике (см. [27–29, 49]), а также для случайной генерации графов и анализа эффективности алгоритмов (см. [37]), и в теории случайных графов (см. [54]).

Классическое функциональное уравнение (соотношение Риддела) связывает производящие функции помеченных связных графов и их блоков. Из этого уравнения автором с помощью теоремы обращения Лагранжа получена формула, которая является удобным инструментом для точного и асимптотического перечисления помеченных графов в том случае, когда известна производящая функция их блоков.

2. Основные формулы. Рассматриваются неориентированные простые связные графы.

Определение 1. Точкой сочленения связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей ребрами граф становится несвязным. Мост — это ребро графа, после удаления которого граф превращается в несвязный. Блоком называется связный граф без точек сочленения (2-связный граф), а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения (см. [33, с. 41]).

Пусть C_n — число помеченных связных графов с n вершинами, $C_{n,m}$ — число помеченных связных графов с n вершинами и m ребрами, B_n — число помеченных блоков с n вершинами, $B_{n,m}$ — число помеченных блоков с n вершинами и m ребрами. Введем производящие функции

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}, & C(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n(n-1)/2} C_{n,m} \frac{x^n y^m}{n!}, \\ B(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}, & B(x, y) &= \frac{x^2 y}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=n}^{n(n-1)/2} B_{n,m} \frac{x^n y^m}{n!}. \end{aligned}$$

Очевидно, имеем

$$C(x) = C(x, 1), \quad B(x) = B(x, 1), \quad C'(x) = \left[\frac{\partial C(x, y)}{\partial x} \right]_{y=1}, \quad B'(x) = \left[\frac{\partial B(x, y)}{\partial x} \right]_{y=1}.$$

Отметим, что ряды $B(x)$, $C(x)$, $C(x, y)$, $B(x, y)$ являются формальными степенными рядами.

В 1951 г. Риддел в диссертации получил соотношение

$$\ln \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial B(z, y)}{\partial z}, \quad z = x \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} \quad (1)$$

(см. [44, 60]), из которого при $y = 1$ следует соотношение

$$\ln C'(x) = B'(xC'(x)). \quad (2)$$

Соотношение (2) является следствием древообразной структуры связного графа, составленной из точек сочленения и блоков. Оно доказано независимо многими авторами (см. [2, 26, 31, 32, 34, 36, 56]).

Однако это соотношение, верное для всего класса помеченных связных графов, может быть неверным для некоторых его подклассов. Например, (2) неверно для класса гомеоморфно несводимых деревьев (см. [10]).

Тазава (см. [63]) доказал соотношение (2) для класса эйлеровых графов, а Дрмота — для класса внешнепланарных графов (см. [40]). В этих доказательствах неявно используется замкнутость подклассов связных графов относительно композиции блоков.

Определение 2 (см. [50, 53]). Класс графов называется *блочнo-устойчивым*, если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу.

Некоторые авторы в определение блочно-устойчивого класса графа включают требование принадлежности к классу блока, состоящего из одного ребра (см. [41]). Однако при таком определении ряд классов, например, эйлеровы графы, не удовлетворяют этому определению.

Уитни доказал (см. [65]), что граф планарен тогда и только тогда, когда каждый его блок планарен. Стемпл и Уоткинс вывели (см. [61]), что граф является геодезическим тогда и только тогда, когда каждый его блок — геодезический граф. В [19] доказано, что граф эйлеров тогда и

только тогда, когда каждый его блок эйлеров. Таким образом, классы планарных, геодезических и эйлеровых графов являются блочно-устойчивыми классами графов.

Очевидно, блочная устойчивость подкласса связных графов является необходимым условием для выполнения соотношений (1) и (2) для подкласса связных графов, так как в случае ее отсутствия при композиции блоков в связный граф возможен выход за пределы подкласса. Анализируя доказательство формулы (2), данное в книге Харари и Палмера [34], и повторяя его шаг за шагом, как это сделал Тазава для эйлеровых графов (см. [63]), получим, что оно верно для класса блочно-устойчивых связных графов. Существенной является замкнутость блочно-устойчивого класса относительно операции соединения блоков в связный граф.

Классы графов, определяемых с помощью конечного списка запрещенных миноров, являющихся блоками, также являются блочно-устойчивыми классами графов (см. [50, 53]). К таким классам графов, помимо планарных и внешнепланарных графов, относятся последовательно-параллельные графы. Однако класс графов без лап (без $K_{1,3}$ подграфов) — не является блочно-устойчивым (в этом случае запрещенный подграф не является блоком). Действительно, граф, состоящий из трех треугольников с одной общей вершиной, не принадлежит к классу графов без лап, хотя каждый его блок — граф без лап.

К неблочно-устойчивым классам относятся также классы графов с заданным диаметром, гооморфно несводимых деревьев и графов с заданным родом, большим или равным единице.

В [48, теорема 6] авторы доказывают (2) для подкласса связных графов, у которых все блоки принадлежат некоторому множеству 2-связных графов. (Формально такой класс является блочно-устойчивым классом графов.) К таким графам относятся кактусы (все блоки — ребра или простые циклы), полноблочно-кактусные графы (все блоки — ребра, простые циклы или полные графы), блочно-колесные графы (все блоки — ребра или колеса).

Из соотношений (2) и (1) в [3, 7] выведены формулы

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [x^{n-1}] \exp(nB'(x)) = \frac{(n-1)!}{n} [x^{-1}] \exp(nB'(x))x^{-n}, \quad (3)$$

$$C_{n,m} = \frac{(n-1)!}{n} [x^{-1}y^{-1}] \exp\left(n \frac{\partial B(x,y)}{\partial x}\right) x^{-n}y^{-m-1}. \quad (4)$$

Здесь $[x^i]$ — коэффициентный оператор и $[x^{-1}]$ — оператор формального вычета (см. [26, с. 25]). Так как (3) и (4) получены из (2) и (1) с помощью теоремы обращения Лагранжа, формулы (3) и (4) эквивалентны формулам (2) и (1) соответственно. Таким образом, формулы (3) и (4) справедливы для классов блочно-устойчивых связных графов.

Обозначим через $B(n, k)$ число помеченных k -циклических блоков с n вершинами, через $B_k(z)$ экспоненциальную производящую функцию для $B(n, k)$, через $S(n, k)$ число помеченных связных k -циклических графов с n вершинами. В [7] из (4) получена формула

$$S(n, k) = \frac{(n-1)!}{nk!} [z^{-1}] e^{nz} Y_k(n1!B'_1(z), n2!B'_2(z), \dots, nk!B'_k(z))z^{-n}, \quad (5)$$

где $Y_k(x_1, \dots, x_k)$ — многочлены разбиений (многочлены Белла). Многочлены $Y_n(x_1, \dots, x_n)$ могут быть определены с помощью производящей функции

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x_1, \dots, x_n) \frac{t^n}{n!}, \quad Y_0 = 1$$

(см. [30, с. 174]). Для этих многочленов известно также выражение

$$Y_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\pi(k)} \frac{k!}{m_1! \dots m_k!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{m_1} \dots \left(\frac{x_k}{k!}\right)^{m_k}$$

(см. [30, с. 173]), где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(k)$ числа k , т.е. по всем неотрицательным решениям $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ уравнения $m_1 + 2m_2 + \dots + km_k = k$, $m_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$.

В [7] из (4) для числа $\bar{S}(n, k)$ помеченных связных графов без мостов с n вершинами и цикломатическим числом k при $k \geq 1$ найдена формула

$$\bar{S}(n, k) = \frac{(n-1)!}{nk!} [z^{-1}] Y_k(nB'_1(z), \dots, nk!B'_k(z)) z^{-n}. \quad (6)$$

В [6] из (3) получено выражение

$$C_n = \frac{1}{n} Y_{n-1}(nB_2, \dots, nB_n).$$

С помощью основных формул (3) и (4), а также их следствий (5) и (6) получено большое количество результатов по точному и асимптотическому перечислению графов из блочно-устойчивых классов графов.

3. Блочно-устойчивые классы графов.

3.1. Кактусы и полноблочно-кактусные графы.

Определение 3 (см. [34, с. 93]). *Кактусом* называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле.

Все блоки кактуса — ребра или простые циклы. Класс кактусов является после деревьев (которые также являются кактусами) простейшим классом графов. Кактусы служат базовой моделью для ряда задач статистической физики (см. [49]), комбинаторной оптимизации (см. [43]) и теории кодов, исправляющих ошибки (см. [64]).

Форд и Уленбек перечислили помеченные кактусы с заданным распределением числа вершин по циклам, а также нашли соответствующую асимптотику при большом числе вершин (см. [44, 45]).

Пусть $Ca_n(n_2, n_3, \dots)$ — число помеченных кактусов с n вершинами, имеющих n_2 блоков-ребер и n_i блоков-циклов с i вершинами при $i \geq 3$, и Ca_n — число помеченных кактусов с n вершинами. Форд и Уленбек получили формулу

$$Ca_n(n_2, n_3, \dots) = \frac{(n-1)! n^{k-1}}{n_2! \prod_{i \geq 3} 2^{n_i} n_i!}$$

(см. [44]), где $n-1 = n_2 + 2n_3 + \dots$ и $n_2 + n_3 + \dots = k$ — число блоков.

Следовательно (см. [49]), имеем при $n \geq 2$

$$Ca_n = \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{n_2 + n_3 + \dots = k \\ n_2 + 2n_3 + \dots = n-1}} \frac{(n-1)! n^{k-1}}{n_2! \prod_{i \geq 3} 2^{n_i} n_i!}.$$

Из выражения (3) в [3] получена формула для Ca_n , не содержащая суммирования по всем разбиениям целого числа. Число Ca_n помеченных кактусов с n вершинами при $n \geq 3$ равно

$$Ca_n = \frac{n^{n-2}}{2^{n-1}} + (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^{k-1}}{2^k k!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \binom{n-i-2}{k-i-1}.$$

В [18] найдена другая формула для Ca_n :

$$Ca_n = n^{n-2} + (n-1)! \sum_{r=1}^{[(n-1)/2]} \sum_{k=0}^{n-2r-1} \frac{n^{k+r-1}}{k! r! 2^r} \binom{n-k-r-2}{r-1}.$$

Преимущество этой формулы в том, что первое слагаемое в ней равно числу помеченных деревьев с n вершинами, и таким образом имеет ясный комбинаторный смысл. Число $Ca(n, k)$ помеченных кактусов с n вершинами и цикломатическим числом k при $n \geq 3$ и $k \geq 1$ равно (см. [7])

$$Ca(n, k) = \frac{(n-1)!}{k! 2^k} \sum_{i=0}^{n-2k-1} \binom{k+i-1}{k-1} \frac{n^{n-k-i-2}}{(n-2k-i-1)!}.$$

По теореме Кенига граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы четны (см. [33, с. 32]). Поэтому у двудольных кактусов все циклы имеют четное число вершин.

В [21] для числа $BC(n)$ помеченных двудольных кактусов с n вершинами при $n \geq 4$ получено выражение

$$BC(n) = n^{n-2} + (n-1)! \sum_{i=1}^{[(n-1)/3]} \sum_{j=0}^{[(n-3i-1)/2]} \binom{i+j-1}{j} \frac{n^{n-2i-2j-2}}{2^i i! (n-3i-2j-1)!}.$$

В [24] для числа $BC(n, k)$ помеченных двудольных k -циклических кактусов с n вершинами при $n \geq 4$ найдена формула

$$BC(n, k) = \frac{(n-1)!}{n 2^k k!} \sum_{m=0}^{[(n-3k-1)/2]} \binom{m+k-1}{k-1} \frac{n^{n-2m-2k-1}}{(n-2m-3k-1)!}.$$

Пусть CT_n — число помеченных кактусов с n вершинами и без треугольников. В [23] при $n \geq 3$ получена формула

$$CT_n = n^{n-2} + (n-1)! \sum_{r=1}^{[(n-1)/3]} \sum_{k=0}^{n-3r-1} \binom{n-k-2r-2}{r-1} \frac{n^{k+r-1}}{k! r! 2^r}.$$

Определение 4 (см. [19, 58]). Связный граф называется *полноблочным-кактусным* (block-cactus graph), если у него все блоки или полные графы, или циклы.

Обозначим через F_n число помеченных полноблочно-кактусных графов с n вершинами. При $n \geq 4$ верна формула

$$F_n = \frac{1}{n} P_{n-1}(n) + (n-1)! \sum_{p=1}^{[(n-1)/3]} \sum_{i=0}^{n-3p-1} \binom{n-i-2p-2}{p-1} \frac{P_i(n) n^{p-1}}{2^p p! i!}$$

(см. [19]), где $P_i(x)$ — многочлен Белла одной переменной, определяемый с помощью производящей функции (см. [39]):

$$\exp(z(\exp(x) - 1)) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) \frac{x^k}{k!}.$$

3.2. Эйлеровы графы.

Определение 5. Граф называется *четным*, если каждая его вершина имеет четную степень. *Эйлеров граф* — это связный четный граф.

Эйлеровы графы находят применение в исследовании операций (задача китайского почтальона, см. [47]), биоинформатике (см. [55]) и криптографии (см. [35]).

Рид (см. [59]) нашел производящую функцию для числа помеченных четных графов с заданными числами вершин и ребер, из которой производящая функция для помеченных эйлеровых графов может быть получена логарифмированием. Тазава (см. [63]) вывел нелинейное функциональное уравнение для экспоненциальной производящей функции для числа помеченных эйлеровых блоков с заданным числом вершин.

Заметим, что эйлеровы графы не имеют мостов (см. [4]) и, следовательно, не имеют блоков, состоящих из одного ребра.

Пусть D_n — число помеченных эйлеровых кактусов с n вершинами. В [4] получена формула

$$D_n = (n-1)! \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \frac{n^{k-1}}{k! 2^k} \binom{n-k-1}{k-1}.$$

Обозначим через ET_n число помеченных эйлеровых n -вершинных кактусов без треугольников. В [25] при $n \geq 3$ получена формула

$$ET_n = (n-1)! \sum_{k=1}^{[(n-1)/3]} \frac{n^{k-1}}{k!2^k} \binom{n-2k-2}{k-1}.$$

Пусть $Y_k(x_1, \dots, x_k)$ — многочлен разбиений, а $\bar{B}_n$ — число помеченных эйлеровых блоков с n вершинами. Тогда число E_n помеченных эйлеровых графов с n вершинами равно

$$E_n = \frac{1}{n} Y_{n-1}(0, n\bar{B}_3, \dots, n\bar{B}_n)$$

(см. [6]).

Определение 6 (см. [17]). Связный граф называется *полноблочным* (block graph), если у него все блоки полные графы.

Пусть EH_n — число помеченных эйлеровых полноблочных графов с n вершинами, а $P_i(z)$ — многочлен Белла одной переменной; тогда при $n \geq 3$ верна формула

$$EH_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} P_i\left(\frac{n}{2}\right) P_{n-i-1}\left(\frac{n}{2}\right)$$

(см. [17]). Обозначим через EF_n число помеченных эйлеровых полноблочно-кактусных графов с n вершинами. При $n \geq 4$ верна формула

$$\begin{aligned} EF_n = & \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} P_r\left(\frac{n}{2}\right) P_{n-1-r}\left(\frac{n}{2}\right) + \\ & + (n-1)! \sum_{l=1}^{[(n-1)/3]} \sum_{r=0}^{n-3l-1} \sum_{k=0}^{n-r-3l-1} (-1)^r \frac{P_k(n/2) P_r(n/2) n^{l-1}}{k!r!l!2^l} \binom{n-r-k-2l-2}{l-1} \end{aligned}$$

(см. [19]), где $P_i(x)$ — многочлен Белла одной переменной.

Число $E_5(n)$ помеченных эйлеровых пентациклических графов с n вершинами при $n \geq 7$ равно

$$\begin{aligned} E_5(n) = & \frac{n!}{29030400} \left(1360n^7 - 21490n^6 + 101563n^5 + 83930n^4 - 1999655n^3 + \right. \\ & \left. + 4004840n^2 + 2158812n + 3457440 \right) \end{aligned}$$

(см. [15]).

3.3. Геометрические графы.

Определение 7 (см. [61]). *Геометрический граф* — это связный граф, у которого любая пара вершин связана единственной кратчайшей цепью (геометрической).

Геометрические графы используются при проектировании топологической структуры компьютерных сетей (см. [46]).

Стемпл и Уотсон доказали (см. [61]), что граф является геометрическим планарным только тогда, когда каждый блок его — ребро, нечетный цикл или граф, гомеоморфный полному графу K_4 . Очевидно, что внешнепланарный граф не может иметь блоков, гомеоморфных K_4 . Следовательно, геометрический внешнепланарный граф является кактусом с нечетными циклами.

В [5] получены следующие результаты. Число OP_n помеченных геометрических внешнепланарных графов с n вершинами при $n \geq 3$ равно

$$OP_n = n^{n-2} + (n-1)! \sum_{p=1}^{[(n-1)/2]} \sum_{r=0}^{[(n-2p-1)/2]} \binom{r+p-1}{p-1} \frac{n^{n-p-2r-2}}{2^p p! (n-2p-2r-1)!}.$$

Число $GC(n, k)$ помеченных геодезических k -циклических кактусов с n вершинами равно

$$GC(n, k) = \frac{(n-1)!}{n2^k k!} \sum_{m=0}^{[(n-2k-1)/2]} \binom{m+k-1}{k-1} \frac{n^{n-2m-2k-1}}{(n-2m-2k-1)!}.$$

Для числа P_n помеченных геодезических планарных графов с n вершинами при $n \geq 3$ верна формула

$$P_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp \left(nz + \frac{nz^2}{2(1-z^2)} + \frac{n(z^3 + 2z^6)}{6(1-z^3)^5} \right)$$

В [8] получены следующие результаты. Число $G(n, 2)$ помеченных геодезических бициклических графов с n вершинами при $n \geq 5$ равно

$$G(n, 2) = \frac{n!}{8} \sum_{i=0}^{[(n-5)/2]} \frac{(i+1)n^{n-2i-5}}{(n-2i-5)!}.$$

Число $G(n, 3)$ помеченных геодезических трициклических графов с n вершинами при $n \geq 7$ равно

$$G(n, 3) = \frac{n!}{24} \left(\sum_{i=0}^{[(n-7)/2]} \frac{(i+2)(i+1)n^{n-2i-6}}{4(n-2i-7)!} + \sum_{i=0}^{[(n-4)/3]} \frac{n^{n-3i-5}(3i+4)}{(n-3i-4)!} \binom{i+3}{3} \right).$$

Число $G(n, 4)$ помеченных геодезических тетрациклических графов с n вершинами при $n \geq 9$ равно

$$G(n, 4) = \frac{n!}{384} \sum_{i=0}^{[(n-9)/2]} \binom{i+3}{3} \frac{n^{n-2i-7}}{(n-2i-9)!} + \frac{n!}{48} \sum_{i=0}^{[(n-6)/3]} \sum_{j=0}^{[(n-3i-6)/2]} (3i+4) \binom{i+3}{3} \frac{n^{n-2i-3j-6}}{(n-2i-3j-6)!}.$$

3.4. Планарные графы.

Определение 8 (см. [33, с. 127, 131]). *Планарный граф* — это граф, который можно уложить на плоскости без пересечения ребер. *Внешнепланарным* графом называется планарный граф, если его можно уложить на плоскости так, что все его вершины принадлежат одной грани.

Класс внешнепланарных графов является тестовым для класса планарных графов. Случайный помеченный внешнепланарный граф может быть сгенерирован полиномиальным алгоритмом, базирующемся на результатах перечисления таких графов.

Пусть $\tilde{C}_n$ — число помеченных связных внешнепланарных графов с n вершинами; тогда при $n \geq 3$ верна следующая формула (см. [3]):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_n = n^{n-2} + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)n^{n-3} + \frac{(n-1)!}{n} \sum_{q=1}^{n-2} \frac{n^{n-q-2} 2^q}{(n-q-2)!} \times \\ \times \sum_{i=0}^{n-q-2} \binom{n-q-2}{i} \frac{1}{4^i} \sum_{j=0}^q \binom{q}{j} \frac{1}{2^j} \left(2 \binom{q}{q-i-j+1} - \binom{q}{q-i-j-1} \right). \end{aligned}$$

Число $P(n, k)$ помеченных связных внешнепланарных k -циклических графов с n вершинами при $n \geq k+2$ и $k \geq 1$ равно

$$P(n, k) = \frac{(n-1)!}{k! 2^k} \sum_{s=k+2}^n \sum_{q=0}^{k-1} \frac{n^{n-s}(s-3)! 2^q}{(n-s)!(s-k-2)!} \binom{n-s}{k-q-1} \binom{s+k-2}{q}$$

(см. [9]); считаем, что $\binom{n}{m} = 0$ при $n < m$.

Число $p(n, k)$ помеченных связных внешнепланарных k -циклических графов без мостов с n вершинами при $n \geq k + 2$ и $k \geq 1$ равно

$$p(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{p=1}^k \frac{n^{p-1}}{2^p} (n + k - p - 1)! \binom{n-p-2}{k-1} \binom{k-1}{p-1}$$

(см. [11]). Обозначим через PF_n число помеченных планарных полноблочно-кактусных графов с n вершинами. В [22] получена формула

$$PF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp \left(nz + \frac{nz^2}{2} + \frac{nz^3}{6} + \frac{nz^3}{2(1-z)} \right). \quad (7)$$

3.5. Последовательно-параллельные графы.

Определение 9 (см. [38]). Граф называется *последовательно-параллельным*, если он не содержит полный граф K_4 в качестве минора.

Последовательно-параллельные графы используются при построении надежных коммуникационных сетей (см. [57]). Целый ряд задач алгоритмической теории графов, являющихся NP-полными для общих графов, может быть решен полиномиальными алгоритмами в классе последовательно-параллельных графов (см. [62]).

Число $SP(n)$ помеченных связных последовательно-параллельных графов с n вершинами при $n \geq 1$ равно

$$SP(n) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp \left(\frac{nz((4-2z)e^z - z - 2)}{2(2e^z - 1)(2e^z - z - 1)} \right) \times \\ \times \left(2e^z(2e^z - 1)^{n-2}(2e^z - z - 1)^n - (2e^z - 1)^{n+1}(2e^z - z - 1)^{n-2} \right) \quad (8)$$

(см. [10]). Для числа $SP(n, 3)$ помеченных связных последовательно-параллельных трициклических графов с n вершинами при $n \geq 5$ верна формула

$$SP(n, 3) = \\ = \frac{(n-1)!}{24} \sum_{i=0}^{n-5} \left(\binom{i+2}{2} \frac{n^{n-i-5}}{2(n-i-7)!} + \binom{i+4}{4} \left(\frac{12n^{n-i-5}}{(n-i-6)!} - \frac{13n^{n-i-6}}{(n-i-7)!} + \frac{4n^{n-i-7}}{(n-i-8)!} \right) + \right. \\ \left. + \binom{i+6}{6} \left(\frac{70n^{n-i-5}}{(n-i-5)!} - \frac{127n^{n-i-6}}{(n-i-6)!} + \frac{98n^{n-i-7}}{(n-i-7)!} - \frac{38n^{n-i-8}}{(n-i-8)!} + \frac{6n^{n-i-9}}{(n-i-9)!} \right) \right)$$

(см. [13]). Для числа $SP(n, 4)$ помеченных связных последовательно-параллельных тетрациклических графов с n вершинами при $n \geq 6$ верна следующая формула (см. [14]):

$$SP(n, 4) = \frac{(n-1)!}{24} [z^{n-1}] e^{nz} \left(\frac{n^3 z^8}{16(1-z)^4} + \frac{n^2 z^4 (12z^3 - 13z^4 + 4z^5)}{4(1-z)^6} + \right. \\ \left. + \frac{n(12z^3 - 13z^4 + 4z^5)^2}{12(1-z)^8} + \frac{n z^2 (70z^4 - 127z^5 + 98z^6 - 38z^7 + 6z^8)}{2(1-z)^8} + \right. \\ \left. + \frac{48z^{11} - 450z^{10} + 1860z^9 - 4415z^8 + 6520z^7 - 5813z^6 + 2430z^5}{10(1-z)^{10}} \right).$$

4. Асимптотика и вероятность. Для числа $C(n, k)$ помеченных связных k -циклических графов с n вершинами без мостов при фиксированном $k \geq 1$ и $n \rightarrow \infty$ верна асимптотическая формула

$$C(n, k) \sim c_k n! n^{3k-4}$$

(см. [12]), где $c_1 = 1/2$, $c_k = b_{k-1}/(3k-4)!$, $k \geq 2$, b_k — коэффициенты Райта (см. [1, 67]),

$$b_1 = \frac{1}{12}, \quad b_2 = \frac{5}{48}, \quad 2(k+1)b_{k+1} = (3k+2) \left(kb_k + 3 \sum_{s=1}^{k-1} s(k-s)b_s b_{k-s} \right), \quad k \geq 2.$$

Следствие 1 (см. [12]). Почти все помеченные связные k -циклические графы без мостов при фиксированном k являются блоками.

Для числа $Ca(n, k)$ помеченных кактусов с n вершинами и фиксированным цикломатическим числом $k \geq 1$ при $n \rightarrow \infty$ верна следующая асимптотическая формула (см. [7]):

$$Ca(n, k) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2} k! \Gamma(\frac{k+1}{2})} n^{n+3k/2-2}.$$

Следствие 2 (см. [7]). Пусть $P_k(n)$ — вероятность того, что помеченный связный граф с n вершинами и цикломатическим числом k является кактусом. Тогда при фиксированном $k \geq 1$ и $n \rightarrow \infty$ верно выражение

$$P_k(n) \sim \frac{2^{k-2} \Gamma(\frac{3k-1}{2})}{3^k k! (k-1)! \Gamma(\frac{k+1}{2}) d_{k-1}},$$

где $d_0 = 1/6$, а d_k — коэффициенты Степанова—Райта (см. [1, 66]):

$$d_1 = d_2 = \frac{5}{36}, \quad d_{k+1} = d_k + \sum_{s=1}^{k-1} \frac{d_s d_{k-s}}{(s+1) \binom{k}{s}}, \quad k \geq 2.$$

Для числа $E_5(n)$ помеченных эйлеровых пентациклических графов с n вершинами при $n \rightarrow \infty$ верно следующее асимптотическое равенство (см. [15]):

$$E_5(n) \sim \frac{17n^7}{362880} n!.$$

Зададим на множестве помеченных эйлеровых графов с n вершинами равномерное распределение вероятностей.

Следствие 3 (см. [15]). Пусть P_n — вероятность того, что помеченный эйлеров пентациклический граф с n вершинами является блоком. При $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика $P_n \sim \frac{53}{272}$.

Пусть $\bar{P}_n$ — вероятность того, что помеченный эйлеров пентациклический граф с n вершинами является кактусом. При $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика $\bar{P}_n \sim \frac{63}{272}$.

Для числа $P(n, k)$ помеченных связных внешнепланарных k -циклических графов с n вершинами и фиксированным цикломатическим числом $k \geq 1$ при $n \rightarrow \infty$ верна следующая асимптотическая формула (см. [9]):

$$P(n, k) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2} k! \Gamma(\frac{k+1}{2})} n^{n+3k/2-2}.$$

Следствие 4 (см. [9]). При фиксированном цикломатическом числе k и $n \rightarrow \infty$ почти все внешнепланарные k -циклические графы с n вершинами являются k -циклическими кактусами.

Следствие 5 (см. [9]). Пусть $P_k(n)$ — вероятность того, что помеченный связный граф с n вершинами и цикломатическим числом k является внешнепланарным графом. Тогда при фиксированном $k \geq 1$ и $n \rightarrow \infty$

$$P_k(n) \sim \frac{2^{k-2} \Gamma(\frac{3k-1}{2})}{3^k k! (k-1)! \Gamma(\frac{k+1}{2}) d_{k-1}},$$

где $d_0 = 1/6$, а d_k — коэффициенты Степанова—Райта.

В частности, имеем

$$P_1(n) \sim 1, \quad P_2(n) \sim \frac{3}{5}, \quad P_3(n) \sim \frac{4}{15}, \quad P_4(n) \sim \frac{35}{432}.$$

Теорема (Флажолле, Седжвик; см. [42, теорема VIII.8]). Введем обозначение

$$F(N, n) = [z^N] \{a(z)(b(z))^n\} = \frac{1}{2\pi i} \oint a(z)(b(z))^n \frac{dz}{z^{N+1}}.$$

Пусть функции $a(z)$ и $b(z)$ удовлетворяют следующим условиям:

- (1) Функции $a(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$ и $b(z) = \sum_{j \geq 0} b_j z^j$ аналитичны в точке $z = 0$ и имеют неотрицательные коэффициенты; кроме того, $b(0) \neq 0$.
- (2) $\text{НОД}\{j \mid b_j > 0\} = 1$.
- (3) Если $R \leq \infty$ — радиус сходимости ряда $b(z)$, то радиус сходимости $a(z)$ не меньше R .

Обозначим через T величину

$$T = \lim_{x \rightarrow R-0} \frac{xb'(x)}{b(x)}.$$

Пусть λ — такое положительное число, что $0 < \lambda < T$, и пусть r — единственный действительный корень уравнения

$$r \frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda.$$

Введем обозначение

$$\sigma = \frac{d^2}{dr^2} (\ln b(r) - \lambda \ln r).$$

Тогда для целого $N = \lambda n$ при $n \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$ верно асимптотическое равенство

$$F(N, n) \sim a(r) \frac{(b(r))^n}{r^{N+1} \sqrt{2\pi n \sigma}}.$$

Теорема Флажолле и Седжвика является вариантом метода перевала. Заметим, что достаточно требовать единственности действительного корня внутри пересечения кругов сходимости функций $a(z)$ и $b(z)$, так как остальные корни будут посторонними корнями.

В [4] найдено следующее выражение для числа D_n помеченных эйлеровых кактусов с n вершинами:

$$D_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp \left(\frac{nz^2}{2(1-z)} \right) z^{-n},$$

из которого с помощью теоремы Флажолле и Седжвика при $n \rightarrow \infty$ получена асимптотическая формула

$$D_n \sim cn^{-5/2} a^n n!,$$

(см. [20]), где $c = 0,1079436709$, $a = 2,5424753735$.

В [19] для числа F_n помеченных полноблочно-кактусных графов с n вершинами найдено выражение

$$F_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp \left(n(e^z - 1) + \frac{nz^3}{2(1-z)} \right) z^{-n}.$$

Из него в [19] с помощью теоремы Флажолле и Седжвика при $n \rightarrow \infty$ получена асимптотическая формула

$$F_n \sim c_1 n^{-5/2} a_1^n n!,$$

где $c_1 = 0,1178070871$, $a_1 = 4,261224133$.

В [4, 19] была допущена погрешность в формулировке теоремы Флажолле—Седжвика, так как требовалась единственность положительного корня вместо единственности действительного корня. При таком условии можно было гарантировать только асимптотическую оценку сверху вместо асимптотического равенства (см. [42, теорема 1]). Расчет показал, что для данных задач существует единственный действительный корень внутри пересечения кругов сходимости функций.

Следствие 6 (см. [19]). Почти все полноблочно-кактусные графы не являются кактусами.

В [25] найдено выражение для числа ET_n помеченных эйлеровых n -вершинных кактусов без треугольников

$$ET_n = \frac{(n-1)!}{n} \exp\left(\frac{nz^3}{2(1-z)}\right) z^{-n}.$$

Из этого выражения в [25] с помощью теоремы Флажолле и Седжвика при $n \rightarrow \infty$ для ET_n получена асимптотическая формула

$$ET_n \sim cn^{-5/2} a^n n!, \quad c \approx 0,1019844368, \quad a \approx 2,1748800796.$$

Следствие 7 (см. [25]). *Почти все помеченные эйлеровы кактусы содержат треугольники.*

Из формулы (7) с помощью теоремы Флажолле и Седжвика для числа PF_n помеченных планарных полноблочно-кактусных графов с n вершинами в [22] при $n \rightarrow \infty$ найдена асимптотика

$$PF_n \sim cn^{-5/2} a^n n!, \quad c \approx 0,1183273421, \quad a \approx 4,2534965791.$$

Следствие 8. *Почти все помеченные полноблочно-кактусные графы не являются планарными графами.*

В [16] из формулы (8) с помощью теоремы Флажолле и Седжвика для числа $SP(n)$ помеченных связных последовательно-параллельных графов с n вершинами при $n \rightarrow \infty$ получена асимптотика

$$SP(n) \sim cn^{-5/2} a^n n!, \quad c \approx 0,001277177741, \quad a \approx 9073311262.$$

При этом уточнена асимптотика для $SP(n)$, найденная в [38].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воблый В. А. О коэффициентах Райта и Степанова—Райта // Мат. заметки. — 1987. — 42, № 6. — Р. 854–862.
2. Воблый В. А. О перечислении помеченных связных графов по числу точек сочленения // Дискр. мат. — 2008. — 20, № 1. — С. 52–63.
3. Воблый В. А. Об одной формуле для числа помеченных связных графов // Дискр. анал. иссл. опер. — 2012. — 19, № 4. — С. 48–59.
4. Воблый В. А. Перечисление помеченных эйлеровых кактусов // Мат. XI Междунар. семин. «Дискретная математика и ее приложения». — М.: МГУ, 2012. — С. 275–277.
5. Воблый В. А. Перечисление помеченных геодезических планарных графов Мат. заметки. — 2015. — 97, № 3. — С. 336–341.
6. Воблый В. А. Выражение числа помеченных связных графов через число помеченных блоков с помощью многочленов разбиений // Тез. докл. Междунар. науч. конф. «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (14–18 сентября 2015 г. Минск, Беларусь). — Минск, 2015. — С. 95–96.
7. Воблый В. А. О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и ребер // Дискр. анал. иссл. опер. — 2016. — 23, № 2. — С. 5–20.
8. Воблый В. А. Перечисление помеченных геодезических графов с малым цикломатическим числом // Мат. заметки. — 2017. — 101, № 5. — С. 684–689.
9. Воблый В. А. Число помеченных внешнепланарных k -циклических графов // Мат. заметки. — 2018. — 103, № 5. — С. 657–666.
10. Воблый В. А. Второе соотношение Риддела и следствия из него // Дискр. анал. иссл. опер. — 2019. — 26, № 1. — С. 20–32.
11. Воблый В. А. О числе помеченных внешнепланарных k -циклических графов без мостов // Дискр. анал. иссл. опер. — 2020. — 27, № 1. — С. 5–16.
12. Воблый В. А. Об асимптотическом перечислении помеченных связных k -циклических графов без мостов // Мат. заметки. — 2020. — 107, № 2. — С. 304–306.
13. Воблый В. А. Перечисление помеченных последовательно-параллельных трициклических графов // Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — 177. — С. 132–136.
14. Воблый В. А. Асимптотическое перечисление помеченных последовательно-параллельных тетрациклических графов Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — 187. — С. 31–35.

15. *Воблый В. А.* Перечисление помеченных эйлеровых пентациклических графов// Прикл. дискр. мат. — 2020. — № 50. — С. 87–92.
16. *Воблый В. А.* Уточнение асимптотики для числа помеченных последовательно-параллельных графов// Мат. заметки. — 2021. — 109, № 6. — С. 944–947.
17. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных эйлеровых полноблочных графов// Мат. XV Междунар. семин. «Комбинаторные конфигурации и их приложения». — Кировоград, 2013. — С. 15–28.
18. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Новая формула для числа помеченных кактусов с заданным числом вершин// Тез. докл. Междунар. науч. конф. «Дискретная математика, теория графов и их приложения». — Минск, 2013. — С. 9–11.
19. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных полноблочно-кактусных графов// Дискр. анал. иссл. опер. — 2014. — 21. — С. 24–32.
20. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Асимптотическое перечисление помеченных эйлеровых кактусов// Мат. XVII Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики». — Казань, 2014. — С. 58–60.
21. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных двудольных кактусов// Мат. IX Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М., 2015. — С. 57–58.
22. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных планарных полноблочно-кактусных графов// Мат. XX Междунар. семин. «Дискретная математика и ее приложения». — М., 2016. — С. 287–290.
23. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных кактусов без треугольников// Мат. XIX Междунар. семин. «Комбинаторные конфигурации и их приложения». — Кропивницкий, 2017. — С. 17–19.
24. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных двудольных k -циклических кактусов// Тр. X Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М., 2018. — С. 86–88.
25. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных эйлеровых кактусов без треугольников// Мат. XV Междунар. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения». — Тула, 2018. — С. 165–168.
26. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.
27. *Иванчик И. И.* Проблемы теории графов в статистической физике// Тр. Физ. ин-та АН СССР. — 1979. — 106. — С. 3–89.
28. *Калмыков Г. И.* Древесная классификация помеченных графов. — М.: Физматлит, 2003.
29. *Калмыков Г. И.* Каркасная классификация помеченных графов. — М.: Физматлит, 2006.
30. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. — М.: Наука, 1982.
31. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. — М.: Мир, 2005.
32. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: МЦНМО, 2004.
33. *Харари Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1973.
34. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.
35. *Amudha P., Sagayaraj A. C. S., Sheela A. C. S.* An application of graph theory in cryptography// Int. J. Pure Appl. Math. — 2018. — 119, № 13. — P. 375–383.
36. *Bergeron F., Labelle G., Leroux P.* Combinatorial Species and Tree-Like Structures. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
37. *Bodirsky M., Kang M.* Generating outerplanar graphs uniformly at random// Combin. Probab. Comput. — 2006. — 15, № 3. — P. 333–343.
38. *Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M.* Enumeration and limit laws of series-parallel graphs// Eur. J. Combin. — 2007. — 28, № 8. — P. 2091–2105.
39. *Carlitz L.* Single variable Bell polynomials// Collect. Math. — 1962 *s 13–25. — 14.
40. *Drmotič M.* Random Trees. — Wien–NewYork: Springer, 2009.
41. *Drmotič M., Fusy E., Kang M., Kraus V., Rue J.* Asymptotic study of subcritical graph classes// SIAM J. Discr. Math. — 2011. — 25, № 4. — P. 1615–1651.
42. *Flajolet P., Sedgewick G. E.* Analytic Combinatorics. — Cambridge Univ. Press, 2009.
43. *Fleisher L.* Building chain and cactus representations of all minimum cuts from Hao–Orlin in the same asymptotic run time// J. Algorithms. — 1999 *s 51–72. — 33, № 5.
44. *Ford G. W., Uhlenbeck G. E.* Combinatorial problems in the theory of graphs, I// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1956. — 42, № 3. — P. 122–128.

45. *Ford G. W., Uhlenbeck G. E.* Combinatorial problems in theory graphs, III// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1956. — 42. — P. 529–535.
46. *Frasser C. E.* k -Geodetic graphs and their application to the topological design of computer networks// Proc. Argentinian Workshop on Theoretical Computer Science (28 JAIIO-WAIT'99), 1999. — P. 187–203.
47. *Kumar A.* A study on Euler graph and its applications// Int. J. Math. Trends Technol. — 2017. — 43, № 1. — P. 9–14.
48. *Labelle G., Leroux P., Ducharme M. G.* Graph weights arising from Mayer's theory cluster integrals// Sémin. Lothar. Combin. — 2007. — 54. — B54m.
49. *Leroux P.* Enumerative problems inspired by Mayer's theory of cluster integrals// Electron. J. Combin. — 2004. — 11. — R32.
50. *McDiarmid C., Scott A.* Random graphs from a block stable class// Eur. J. Combin. — 2016. — 58. — P. 96–106.
51. *Moon J.* Counting Labelled Trees. — Montreal: Can. Math. Congr., 1970.
52. NIST Handbook of Mathematical Functions. — New York: Cambridge Univ. Press, 2010.
53. *Noy M.* Random planar graphs and beyond// in: Proc. Int. Congr. Math.. — Seoul, 2014. — P. 407–431.
54. *Noy M.* Graphs// in: Handbook of Enumerative Combinatorics. — CRC Press. — P. 403–442.
55. *Pancoska P., Moravek Z., Moll U. M.* Rational design of DNA sequences for nanotechnology, microarrays and molecular computers using Eulerian graphs// Nucl. Acids Res. — 2004. — 32, № 15. — P. 4630–4645.
56. *Percus J. M.* Combinatorial Methods. — New York–Heidelberg–Berlin: Springer, 1971.
57. *Radhavan S.* Low-connectivity network design on series-parallel graphs// Networks. — 2004. — 43, № 3. — P. 163–176.
58. *Randerath B., Volkmann L.* A characterization of well covered block-cactus graphs// Australas. J. Combin. — 1994. — 9. — P. 307–314.
59. *Read R. C.* Euler graphs on labelled nodes// Can. J. Math. — 1962. — 14. — P. 482–486.
60. *Riddell R. J.* On the theory of the virial development of the equation of state of monoatomic gases// J. Chem. Phys. — 1953. — 11, № 11. — P. 2056–2064.
61. *Stemple J. G., Watkins M. E.* On planar geodetic graphs// J. Combin. Theory. — 1968. — 4. — P. 101–117.
62. *Takamizawa K., Nishezeki T., Saito N.* Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs// J. ACM. — 1982. — 29, № 3. — P. 623–641.
63. *Tazawa S.* Enumeration of labeled 2-connected Euler graphs// J. Combin. Inform. System Sci. — 1998. — 23, № 1-4. — P. 407–414.
64. *Vicente R., Saad D., Kabashima Y.* Error-correcting code on a cactus: a solvable model// Europhys. Lett. — 2000. — 51, № 6. — P. 698–704.
65. *Whitney H.* Non-separable and planar graphs// Trans. Am. Math. Soc. — 1932. — 34. — P. 339–362.
66. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs, III// J. Graph Theory. — 1980. — 4, № 4. — P. 393–407.
67. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs, IV// J. Graph Theory. — 1983. — 7, № 2. — P. 219–229.

Воблый Виталий Антониевич

Всероссийский институт научной и технической информации, Москва

E-mail: vitvobl@yandex.ru