Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Гладышев, О калибровочных преобразованиях электромагнитных потенциалов в кватернионной форме, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 190, 50–56

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-190-50-56>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 09:45:37

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 50–56
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-50-56

УДК 517.53/.55

О КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В КВАТЕРНИОННОЙ ФОРМЕ

© 2021 г. Ю. А. ГЛАДЫШЕВ

Аннотация. В работе приведено определенное обобщение системы дифференциальных уравнений Коши—Римана теории функций комплексного переменного на кватернионные функции восьми переменных. Указано на сохранение для этих функций ряда свойств функций комплексного переменного. Дана электродинамическая интерпретация системы как системы уравнений Максвелла. В кватернионной форме введены электромагнитные потенциалы. С этих общих позиций введены их калибровочные преобразования и даны их конкретные формы.

Ключевые слова: кватернион, калибровочное преобразование, система Коши—Римана, система уравнений Максвелла.

ON GAUGE TRANSFORMATIONS OF ELECTROMAGNETIC POTENTIALS IN THE QUATERNION FORM

© 2021 YU. A. GLADYSHEV

ABSTRACT. In this paper, we generalize the Cauchy–Riemann equations of the theory of functions of a complex variable to quaternion functions of eight variables and indicate that some properties of functions of a complex variable remain valid in this case. We propose an interpretation of the system obtained as the system of electrodynamic Maxwell equations and introduce electromagnetic potentials in the quaternionic form. From these general positions, we also introduce gauge transformations and obtain their specific forms.

Keywords and phrases: quaternion, gauge transformation, Cauchy–Riemann system, Maxwell equations.

AMS Subject Classification: 30G35

1. Введение. Система Коши—Римана теории функций комплексного переменного

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

обладает многими качествами, которые выделяют ее из числа других систем дифференциальных уравнений на плоскости [6]. Перечислим некоторые из них.

I. Система (1) симметрична относительно непрерывной группы вращений на плоскости и дискретной группы отражения координат.

- II. Делает возможным введение производной, которая не зависит от направления на плоскости. Определенная ее операция дифференцирования опять дает решение этой системы, что позволяет распространить методы анализа на комплексные функции.
- III. Система (1) дает возможность ввести правую обратную операцию интегрирования по комплексному переменному, которая также дает решение этой системы.
- IV. При определенных условиях наличия непрерывных вторых производных система распадается на два, вообще говоря, независимых уравнения второго порядка.
- V. Она находится в полном соответствии с полем комплексных чисел, т.е. ее решение можно получить, проводя алгебраические операции комплексных переменных и функций.

Отметим огромное значение теории функций в решении задач гидродинамики, теории упругости, электродинамики и квантовой теории.

Есть основание считать, что первое обобщение теории функций комплексного переменного было проведено Берсом [9], хотя он указывает на результаты Бельтрами [7, 8].

Система Берса имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a_1(y) \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ a_2(y) \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{cases} \quad (2)$$

В этих обобщениях теории функций были утеряны свойства I и V, но сохранены свойства II, III и IV. Известное завершение этого обобщения теории функций комплексного переменного было сделано в теории псевдоаналитических функций.

Во всех рассмотренных случаях система при переходе к уравнениям более высокого порядка происходит разделение функций Φ , Ψ . Получаем уравнения отдельно для функций Φ , Ψ , обычно эллиптического типа. Можно указать на попытки распространения указанных методов на уравнения параболического типа.

Переход к трехмерному пространству связан с системой вида

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \\ 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где z , $\bar{z}$ — сопряженные комплексные переменные

$$z = x_2 + e_1 x_1, \quad \bar{z} = x_2 - e_1 x_1, \quad 1 \cdot e_1 = e_1 \cdot 1 = e_1, \quad e_1^2 = -1.$$

В [4] указаны операции дифференцирования и интегрирования, связанные с системой (3). Путем последовательного применения операции интегрирования можно построить последовательность базисных решений.

Надежды о простом алгебраическом методе получения решений трехмерных и четырехмерных уравнений Лапласа на основе алгебры кватернионов не оправдались. Таким образом, свойство V было утрачено.

Совершенно естественный с позиций кватернионов переход к четырехмерному пространству был начат румынскими математиками. Мойсил и Теодореску [11, 12] предложили изучать систему уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) (f_0 + e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_3) = 0. \quad (4)$$

Здесь e_i — единицы системы кватернионов со свойствами

$$e_0 = 1, \quad e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1, \quad e_1 e_2 = e_3 = -e_2 e_1, \quad e_2 e_3 = e_1 = -e_3 e_2, \quad e_3 e_1 = e_2 = -e_1 e_3,$$

а f_i — функции переменных x_0, x_1, x_2, x_3 .

Был найден ряд свойств, близких функциям комплексного переменного. Дальнейшее изучение было продолжено немецким математиком Фюетером в основном интегральными методами [10].

Им были введены понятия право- и леворегулярных функций и сделан ряд замечаний об их свойствах. Система, аналогичная (4), как нетрудно показать, может быть записана в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial z_2} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}_1} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Запись системы (4) в виде (5) позволяет ввести оператор дифференцирования и операцию интегрирования [4], аналогичную операциям комплексного анализа.

Отметим, что применение операций $\partial/\partial z_1$, $\partial/\partial z_2$ встречается в теории спинорных инвариантов и их законность показана [2].

2. Основные определения и термины кватернионной алгебры. В работе [3] было дано определенное обобщение известной системы Коши—Римана теории функций комплексного переменного в область функций двух кватернионных переменных. Было указано на возможную физическую интерпретацию этих условий как системы уравнений Максвелла классической электродинамики. Приведен метод введения электромагнитных потенциалов в кватернионной форме. В настоящей статье основное внимание обращено на построение калибровочных преобразований электромагнитных потенциалов в принятом ранее [3] кватернионном формализме.

Для удобства понимания метода напомним, что используются функции χ , ψ в общем случае восьми переменных x_j , $j = \overline{0, 7}$,

$$\chi = \chi_0 + \sum_{j=1}^3 e_j \chi_j, \quad \psi = \psi_0 + \sum_{j=1}^3 e_j \psi_j,$$

где e_j — единицы системы кватернионов. Часть кватерниона с единицами e_j , как обычно, назовем векторной частью [1].

Если x_j комплексные, то имеем бикватернионную алгебру [1]. Введение восьми переменных подчеркивает их математическую равноценность, но все же для дальнейшего введем наборы переменных вида (x_0, x_1, x_2, x_3) , (t_0, t_1, t_2, t_3) , сохранив для первых четырех символ x_j , а для четырех вторых заменив символ на t_j , $j = \overline{0, 3}$. Это удобно для физической интерпретации результатов. Первый набор назовем S , а второй T .

Введем кватернионные операторы

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{j=1}^3 e_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial t_0} + \sum_{j=1}^3 e_j \frac{\partial}{\partial t_j},$$

причем D_1 действует слева, а D_2 справа. Это связано с некоммутативностью тела кватернионов и было введено в [10]

Введение сопряженных по кватернионным единицам операторов $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$ приводит к результату

$$D_1 \overline{D}_1 = \overline{D}_1 D_1 = \sum_{j=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad D_2 \overline{D}_2 = \overline{D}_2 D_2 = \sum_{j=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial t_j^2},$$

т.е. к операторам Лапласа, если все x_j , t_j — действительные переменные. Для дальнейшего целесообразно выписать эти операторы в символах векторного анализа, считая e_1 , e_2 , e_3 базисными векторами.

$$D_1 Q = \frac{\partial q_0}{\partial x_0} - \operatorname{div}(x) \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_0} - \operatorname{grad}(x) q_0 - \operatorname{rot}(x) \mathbf{q}. \quad (6)$$

Здесь Q — кватернионная функция всех переменных с компонентами q_0 , q_1 , q_2 , q_3 , т.е.

$$Q = q_0 + e_1 q_1 + e_2 q_2 + e_3 q_3 = q_0 + \mathbf{q}.$$

Символ (x) показывает, по каким переменным проведена данная операция. Остальные выражения $\overline{D}_1 Q$ можем легко получить, меняя знак координат x_1 , x_2 , x_3 в операторах.

Операторы D_2 действуют справа, их выражения легко найти

$$QD_2 = \frac{\partial q_0}{\partial t_0} - \operatorname{div}(t)\mathbf{q} + \operatorname{grad}(t)q_0 + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t_0} - \operatorname{rot}(t)\mathbf{q}. \quad (7)$$

Выражение $Q\overline{D}_2$ найдем, меняя знак координат t_1, t_2, t_3 в операторах.

Система, которая определяет χ, ψ , по [3] может быть записана как

$$\begin{cases} D_1\chi - \psi D_2 = 0, \\ \chi\overline{D}_2 + \overline{D}_1\psi = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Кроме системы (8) будем рассматривать систему, полученную заменой D_1 на $\overline{D}_1$, $\overline{D}_1$ на D_1 и изменением знака операторов $D_2, \overline{D}_2$

$$\begin{cases} \overline{D}_1\tilde{\chi} + \tilde{\psi}D_2 = 0, \\ -\tilde{\chi}\overline{D}_2 + \overline{D}_1\tilde{\psi} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Разумеется, получим из (8) системы (1), (3), (5) при соответствующем выборе независимых переменных x_i .

Обратим внимание, что при получении системы (8) были использованы только чисто математические соображения.

Примем следующее

Определение 1. Назовем систему (8) основной, а систему (9) присоединенной к (8).

Очевидно, что эта операция над системой (9) возвращает к системе (8). Так же как условия Коши—Римана указывают на равноправие двух направлений на плоскости при нахождении производной, так и условие (8) содержит утверждение о равноправии (симметрии) пространств S и T .

Если все компоненты χ, ψ ($\tilde{\chi}, \tilde{\psi}$) принадлежат $C^{(2)}$, то χ, ψ ($\tilde{\chi}, \tilde{\psi}$) удовлетворяют уравнениям Лапласа в $\mathbb{R}^8$. Действительно, применяя операторы $\overline{D}_1$ слева к первому уравнению системы (8) и $\overline{D}_2$ справа ко второму, после их сложения получим

$$D_1\overline{D}_1\chi + D_2\overline{D}_2\chi = 0.$$

Аналогично, для ψ найдем

$$D_1\overline{D}_1\psi + D_2\overline{D}_2\psi = 0.$$

Это утверждение относится и к $\tilde{\chi}, \tilde{\psi}$.

3. Основные свойства обобщенной системы Коши—Римана. Следующие теоремы открывают возможность построения, вообще говоря, бесконечной последовательности решений (8), если все компоненты χ, ψ бесконечно дифференцируемы.

Теорема 1. Если χ, ψ удовлетворяют системе (8), то

$$\chi^{(-1)} = D_1\chi, \quad \psi^{(-1)} = D_1\psi$$

также удовлетворяют этой системе.

Доказательство состоит в применении оператора D_1 слева к указанным уравнениям и использовании свойства ассоциативности кватернионного умножения.

Тем же методом можно убедиться, что

$$\chi^{(-1)} = \overline{D}_1\chi, \quad \psi^{(-1)} = \overline{D}_1\psi$$

есть снова решение (8). Справедлива также следующая

Теорема 2. Если χ, ψ удовлетворяют системе (8), то

$$\tilde{\chi}^{(-1)} = D_1\chi, \quad \tilde{\psi}^{(-1)} = \overline{D}_1\psi$$

удовлетворяют системе (9).

Доказательство состоит в применении соответствующих операторов слева к уравнениям системы (8) и изменении знака операторов $D_2, \bar{D}_2$.

Приведенные ниже теоремы показывают тесную связь уравнений Лапласа с системой (8).

Теорема 3. *Если α — решение уравнения Лапласа*

$$D_1 \bar{D}_1 \alpha + D_2 \bar{D}_2 \alpha = 0,$$

то

$$\chi = \bar{D}_1 \alpha, \quad \psi = -\alpha \bar{D}_2 \quad (10)$$

— решения системы (8).

Для доказательства достаточно подставить (2) в систему (9).

Справедлива аналогичная

Теорема 4. *Если β — гармонический по всем компонентам кватернион, то*

$$\chi = \beta D_2, \quad \psi = D_1 \beta$$

— решения системы (8).

Эти теоремы позволяют заявить о том, что решение (8) можно записать как

$$\begin{cases} \chi = \bar{D}_1 \alpha + \beta D_2, \\ \psi = -\alpha \bar{D}_2 + D_1 \beta. \end{cases} \quad (11)$$

Результат (11) показывает, что решение системы (8) может быть выражено через две гармонические кватернионные функции α, β . При подстановке (11) в систему (8) убеждаемся, что сделанное предположение о том, что α, β — гармонические кватернионы не противоречит системе (8).

Обратим внимание, что для системы Коши—Римана имеем аналогичную конструкцию. Если χ, ψ принять за скорости v_x, v_y некоторого поля, то α, β будут потенциалом и функцией потока. Поэтому, не найдя ничего лучшего, назовем α, β кватернионными потенциалами. Это совпадает с их ролью при физической интерпретации, приведенной ниже.

Вопрос об однозначности восстановления α, β при заданных χ, ψ очевидно, равносильен задаче решения неоднородной системы (9). Таким образом, потенциалы α, β определены с точностью до двух кватернионных функций τ, θ

$$\alpha' = \alpha + \tau, \quad \beta' = \beta + \theta.$$

Тогда функции τ, θ для однозначности χ, ψ должны удовлетворять присоединенной системе

$$\begin{cases} \bar{D}_1 \tau + \theta D_2 = 0, \\ -\tau \bar{D}_2 + D_1 \theta = 0 \end{cases}$$

и являться ее общим решением.

Обращаясь к теореме 2, решение присоединенной системы через гармонический кватернион Ω запишем

$$\tau = D_1 \Omega, \quad \theta = \Omega \bar{D}_2. \quad (12)$$

Напомним, что гармонический кватернион Ω есть упорядоченный набор четырех гармонических функций ω_i от, в общем случае, восьми переменных.

Обратим внимание, что предложенная конструкция близка к теории Берса о введении понятия дифференцирования для усложненной зависимости от x системы (2). Термин «присоединенная система» заимствован непосредственно оттуда.

4. Электродинамическая интерпретация основной системы. Перейдем к электродинамической интерпретации полученных результатов, при этом будем непосредственно опираться на формулу (7) применения операторов $D_1, \bar{D}_1, D_2, \bar{D}_2$.

Сделаем следующие два предположения.

- (1) Все величины χ, ψ зависят только от t_0, x_1, x_2, x_3 и не зависят от x_0, t_1, t_2, t_3 .
- (2) Компоненты χ_0, ψ_0 кватернионов χ, ψ равны нулю

$$\chi_0 = \psi_0 = 0.$$

Учитывая эти условия и формулы (6), (7), найдем

$$\begin{cases} \operatorname{div} \chi = 0, \\ \operatorname{rot} \chi - \frac{\partial \psi}{\partial t_0} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \psi = 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial t_0} - \operatorname{rot} \psi = 0. \end{cases} \quad (13)$$

В формулах (13) χ, ψ — векторные части кватернионов χ, ψ .

Достаточно принять

$$\chi = \mathbf{H}, \quad \psi = i\mathbf{E}, \quad t_0 = it$$

и получить обычную систему уравнений Максвелла без зарядов и токов в данной области [5].

Перейдем к электромагнитным потенциалам, оставаясь в тех же предположениях. Примем, что α — векторный кватернион, а β — скалярный

$$\alpha = 0 + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}, \quad \beta = \beta_0 + \mathbf{0} = \beta_0,$$

поэтому найдем

$$\chi = \mathbf{H} = \operatorname{div} \alpha + \frac{\partial \beta_0}{\partial t_0} - \operatorname{rot} \alpha.$$

В силу того, что в левой части отсутствует скалярное слагаемое, потребуем

$$\operatorname{div} \alpha + \frac{\partial \beta_0}{\partial t_0} = 0.$$

Положив

$$\alpha = -\mathbf{A}, \quad \beta_0 = -i\varphi, \quad (14)$$

убеждаемся, что это условие Лоренца [5] для электромагнитных потенциалов

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Векторная часть дает обычную формулу $\mathbf{H}$: $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Обращаясь ко второму уравнению, получим

$$\psi = -\frac{\partial \alpha}{\partial t_0} + \operatorname{grad} \beta_0.$$

Учитывая (14), приходим к известному результату

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

В данном случае была взята одна ω_0 компонента Ω .

Отметим, что вместе с основной системой Максвелла получаем аналогичную систему в переменных x_0, t_1, t_2, t_3 . Это отражает симметрия системы (8). Таким образом, его теоретические методы классической электродинамики могут быть представлены в кватернионной форме.

Перейдем к вопросу о калибровочных преобразованиях потенциалов. Если в качестве кватерниона Ω в (12) взять скалярный кватернион $\Omega = \Omega_0 + \mathbf{0}$, то по (12) найдем

$$\tau = -\operatorname{grad} \Omega_0, \quad \theta = \frac{\partial \Omega_0}{\partial t_0}.$$

Калибровочные преобразования примут обычный вид [5]

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \Omega_0, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Omega_0}{\partial t_0}.$$

5. Заключение. В работе получено обобщение системы Коши—Римана в область кватернионных функций, приведены основные свойства этой системы. Дана электродинамическая интерпретация этой системы. Проведено введение электромагнитных потенциалов в кватернионной форме. С этих позиций изучен вопрос об их калибровочной инвариантности при скалярной произвольной функции. Не меньший интерес представляет изучение «векторного» калибровочного преобразования, когда $\Omega = \mathbf{\Omega}$, что предполагается сделать в дальнейшем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука, 1973.
2. *Бринкман Г.* Применение спинорных инвариантов в атомной физике. — М.: ИЛ, 1959.
3. *Гладышев Ю. А.* Об одном обобщении условий Коши—Римана теории функций комплексного переменного в область кватернионных функций// в кн.: Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий. — Воронеж: Научная книга, 2018. — С. 94–96.
4. *Гладышев Ю. А.* Формализм Бельтрами—Берса и его приложения в математической физике. — Калуга: КГУ им. К. Э. Циолковского, 1997.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. — М.: Физматлит, 2003.
6. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
7. *Beltrami E.* Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse// Oper. Mat. — 1911. — P. 115–128.
8. *Beltrami E.* Sulle teoria delle funzioni potenziali simmetriche// Oper. Mat. — 1911. — P. 349–377.
9. *Bers L., Gelbart A.* On a class of functions defined by partial differential equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1944. — 56. — P. 67–93.
10. *Fueter R.* Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen// Monats. Math. — 1936. — 43. — P. 69–74.
11. *Moisil G.* Sur les quaternions monogenes// Bull. Sci. Math. Paris. — 1931. — 55. — P. 169–194.
12. *Moisil G., Teodorescu N.* Fonctions holomorphes dans l'espace// Mathematica (Cluj). — 1931. — 5. — P. 142–159.

Гладышев Юрий Александрович

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: v572264@yandex.ru