Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Елисеев, Т. А. Ратникова, Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 190, 81–87

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-190-81-87>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:53:28

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 81–87
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-81-87

УДК 517.968.22

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ НАЛИЧИИ РАЦИОНАЛЬНОЙ «ПРОСТОЙ» ТОЧКИ ПОВОРОТА

© 2021 г. А. Г. ЕЛИСЕЕВ, Т. А. РАТНИКОВА

Аннотация. В статье на основе метода регуляризации С. А. Ломова построено асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши в случае нарушения условий стабильности спектра предельного оператора. В частности, рассмотрена задача с «простой» точкой поворота, т.е. одно собственное значение обращается в ноль при $t = 0$ и имеет вид $t^{m/n}$ (предельный оператор дискретно необратим).

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача Коши, асимптотическое решение, метод регуляризации, точка поворота.

ASYMPTOTIC SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM IN THE PRESENCE OF A RATIONAL “SIMPLE” TURNING POINT

© 2021 А. Г. ELISEEV, Т. А. RATNIKOVA

ABSTRACT. In this paper, based on S. A. Lomov's regularization method, we construct an asymptotic solution of a singularly perturbed Cauchy problem in the case of violation of the stability conditions for the spectrum of the limit operator. In particular, we consider the problem with a “simple” turning point, i.e., where one eigenvalue vanishes for $t = 0$ and has the form $t^{m/n}$ (the limit operator is discretely irreversible).

Keywords and phrases: singularly perturbed Cauchy problem, asymptotic solution, regularization method, turning point.

AMS Subject Classification: 34E20

В данной работе методом регуляризации С. А. Ломова (см. [1]) строится асимптотическое решение задачи Коши в случае рациональной «простой» точки поворота. Метод регуляризации позволяет построить равномерное на всем отрезке $[0, T]$ асимптотическое решение, а при дополнительных условиях на параметры сингулярно возмущенной задачи и ее правую часть — точное решение. Идея данной работы восходит к работе [2], в которой разработаны методы решения сингулярно возмущенной задачи Коши в случае «простой» точки поворота предельного оператора с натуральным показателем.

Поясним термин «простая» точка поворота. Пусть дана задача Коши

$$\begin{cases} \varepsilon u' = A(t)u + h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0 \end{cases} \quad (1)$$

и выполнены следующие условия:

- (i) $h(t) \in C^\infty([0, T], R^n)$;
- (ii) $A(t) \in C^\infty([0, T], L(R^n, R^n))$;
- (iii) спектр оператора $A(t)$ удовлетворяет условиям:
 - (a) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t) \forall i \neq j, i, j = \overline{1, n}$;
 - (b) $\lambda_i(t) \neq 0, i = \overline{2, n}$;
 - (c) условие «простой» точки поворота с натуральным показателем: $\lambda_1(t)$ имеет нуль k -порядка, т.е. $\lambda_1(t) = t^k a(t)$ для всех $t \in [0, T]$, где $a(t) \neq 0$.

Следует отметить, что термин «простая» точка поворота был предложен автором метода регуляризации С. А. Ломовым в [2].

1. Формализм метода регуляризации. Точка $\varepsilon = 0$ для задачи (1) является особой в том смысле, что классические теоремы существования решения задачи Коши не имеют места. Поэтому в решении этой задачи возникают существенно особые сингулярности. При выполнении условия стабильности для спектра $A(t)$ существенно особые сингулярности описываются с помощью экспонент вида:

$$e^{\varphi_i(t)/\varepsilon}, \quad \varphi_i(t) = \int_0^t \lambda_i(s) ds, \quad i = \overline{1, n},$$

где $\varphi_i(t)$ — гладкая (в общем случае комплексная) функция действительного переменного t . Для решения линейных однородных уравнений такие сингулярности были описаны еще Лиувилем (см. [3]).

Если же условия стабильности нарушены хотя бы для одной точки спектра оператора $A(t)$ (условие iiiс), то кроме экспоненциально существенно особых сингулярностей в решении неоднородного уравнения возникают еще и сингулярности вида:

$$\sigma_i = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon} \int_0^t e^{-\varphi_1(s)/\varepsilon} s^i ds, \quad i = \overline{0, k-1},$$

которые при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют степенной характер убывания при соответствующих ограничениях на $\lambda_1(t)$, при этом предполагается, что остальные точки спектра не обращаются в нуль при $t = 0$ (условия iiiа, iiib).

Сингулярно возмущенные задачи возникают обычно в случаях, когда область определения исходного оператора, зависящего от ε при $\varepsilon \neq 0$, не совпадает с областью определения предельного оператора при $\varepsilon = 0$. При изучении задач с «простой» точкой поворота возникают дополнительные условия, когда область значений исходного оператора не совпадает с областью значений предельного оператора.

Для того, чтобы выявить особенности построения решения в случае рациональной точки поворота, и не усложнять изложение материала дополнительными вычислениями при наличии стабильной части спектра, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon u' + t^{m/n} u = h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0, \end{cases} \quad (2)$$

и выполнены следующие условия:

- (i) $h(t) \in C^\infty([0, T], R)$;
- (ii) $m, n \in \mathbb{N}$.

Заменой переменной $\tau = t^{1/n}$ задача (2) сводится к задаче

$$\begin{cases} \varepsilon u'(\tau, \varepsilon) + \tau^p u(\tau, \varepsilon) = \tau^{n-1} h(\tau^n), \\ u(0, \varepsilon) = u^0, \quad \text{где } m + n - 1 = p, \end{cases} \quad (3)$$

методы решения которой изложены в [2].

В данной задаче на структуру решения (3) сильно влияет правая часть уравнения (так как она не принадлежит области значений предельного оператора).

Основные сингулярности данной задачи [2] имеют вид

$$e^{-\varphi(\tau)/\varepsilon}; \quad \sigma_i = e^{-\varphi(\tau)/\varepsilon} \int_0^\tau e^{\varphi(s)/\varepsilon} s^i ds, \quad i = \overline{0, p-1},$$

где $\varphi(\tau) = \tau^{p+1}/(p+1)$.

Согласно методу регуляризации в случае «простой» точки поворота решение ищется в виде

$$u(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k u_k = e^{-\varphi(\tau)/\varepsilon} x(\tau, \varepsilon) + \sum_{i=0}^{p-1} y^i(\tau, \varepsilon) \sigma_i + z(\tau, \varepsilon), \quad (4)$$

где $x(\tau, \varepsilon)$, $y^i(\tau, \varepsilon)$, $z(\tau, \varepsilon)$, $i = \overline{0, p-1}$, — гладкие по τ функции, степенным образом зависящие от ε .

Подставляя (4) в задачу (3) и выделяя слагаемые при одинаковых сингулярностях, получим следующую задачу:

$$\begin{cases} (x(\tau, \varepsilon))' = 0, \\ (y^i(\tau, \varepsilon))' = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \tau^p z(\tau, \varepsilon) = \tau^{n-1} h(\tau^n) - \varepsilon [y^0(\tau, \varepsilon) + \tau y^1(\tau, \varepsilon) + \dots + \tau^{p-1} y^{p-1}(\tau, \varepsilon)] - \varepsilon z'(\tau, \varepsilon), \\ x(0, \varepsilon) + z(0, \varepsilon) = u^0. \end{cases} \quad (5)$$

Функции $y^i(\tau, \varepsilon)$ не участвуют в начальном условии системы (5), так как $\sigma_i(0, \varepsilon) = 0$.

Задача (5) является регулярной по степеням ε , поэтому, разлагая функции x , y^i , z в ряды по степеням ε :

$$\begin{cases} x = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(\tau), \\ y^i = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k y_k^i(\tau), \quad i = \overline{0, p-1}, \\ z = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\tau) \end{cases} \quad (6)$$

и приравнявая выражения при одинаковых степенях ε , получим серию итерационных задач:

$$\begin{cases} x'_k(\tau) = 0, \\ (y_k^i(\tau))' = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \tau^p z_k(\tau) = -z'_{k-1}(\tau) - \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i y_{k-1}^i(\tau) + \delta_0^k \tau^{n-1} h(\tau^n), \\ x_k(0) + z_k(0) = \delta_0^k u^0, \quad k = \overline{-1, \infty}, \end{cases} \quad (7)$$

где δ_0^k — символ Кронекера.

Отрицательная степень по ε возникает из-за того, что $\tau^{n-1} h(\tau^n)$ не принадлежит области значений предельного оператора.

Для решения итерационных задач (7) сформулируем теорему о точечной разрешимости уравнения

$$\tau^p z(\tau) = \tau^{n-s} h(\tau^n),$$

где s — любое натуральное фиксированное число, $0 \leq s \leq n-1$.

Теорема 1. Пусть дано уравнение

$$\tau^p z(\tau) = \tau^{n-s} h(\tau^n), \quad m+n-1=p, \quad (8)$$

и выполнены условия (i) и (ii) задачи (2). Тогда уравнение (8) разрешимо в классе гладких функций тогда и только тогда, когда

$$h^k(0) = 0, \quad k = 0, \overline{\left[\frac{m+s-1}{n} \right]}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (8) разрешимо. Тогда

$$z(\tau) = \tau^{n-s-p} h(\tau^n). \quad (9)$$

Разложим $h(\tau^n)$ по формуле Маклорена

$$z(\tau) = \sum_{k=0}^N \frac{h^{(k)}(0)}{k!} \tau^{(k+1)n-p-s} + o(\tau^{(N+1)n-p-s}).$$

Из гладкости решения (9) с необходимостью следует, что

$$(N+1)n - s \leq p < (N+2)n - s.$$

Учитывая, что $p = m + n - 1$, получим

$$N - \frac{s-1}{n} \leq \frac{m}{n} < (N+1) - \frac{s-1}{n}.$$

Отсюда $N = \left[\frac{m+s-1}{n} \right]$ и $h^k(0) = 0$, $k = \overline{0, N}$.

Достаточность очевидна.

Решение (8) при выполнении условий теоремы запишется в виде

$$z(\tau) = \tau^{n-\nu} h_1(\tau^n), \quad (10)$$

где $0 \leq \nu \leq n-1$, $h_1(0) \neq 0$. □

Замечание. При решении итерационных задач при определении частного решения $z_k(\tau)$ приходится дифференцировать выражение $\tau^{n-\nu} h_1(\tau^n)$:

$$\frac{d}{d\tau} \tau^{n-\nu} h_1(\tau^n) = (n-\nu) \tau^{n-\nu-1} h_1(\tau^n) + n \tau^{2n-\nu-1} h_1(\tau^n) = \tau^{n-\nu-1} h_2(\tau^n).$$

Таким образом, через $(n-1)$ шагов получим:

$$\frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} \tau^{n-1} h(\tau^n) = h_1(\tau^n).$$

Рассмотрим систему (7) при $k = -1$:

$$\begin{cases} x'_{-1}(\tau) = 0, \\ (y^i_{-1}(\tau))' = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \tau^p z_{-1}(\tau) = 0, \\ x_{-1}(0) + z_{-1}(0) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Решение системы (8) запишется в виде

$$\begin{cases} x_{-1}(\tau) = x_{-1}(0) = 0, \\ y^i_{-1}(\tau) = y^i_{-1}(0), \quad i = \overline{0, p-1}, \\ z_{-1}(\tau) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

На данном итерационном шаге ($k = -1$) $y_{-1}^i(0)$ — произвольные числа, которые определяются из условия точечной разрешимости при $k = 0$:

$$\begin{cases} x_0'(\tau) = 0, \\ (y_0^i(\tau))' = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \tau^p z_0(\tau) = -z_{-1}'(\tau) - \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i y_{-1}^i(0) + \tau^{n-1} h(\tau^n), \\ x_0(0) + z_0(0) = u^0. \end{cases} \quad (13)$$

Решение задачи (13) запишется как $x_0(\tau) = x_0(0)$, $y_0^i(\tau) = y_0^i(0)$, $i = \overline{0, p-1}$, которые определяются из условия разрешимости уравнения

$$\tau^p z_0(\tau) = \tau^{n-1} h(\tau^n) - \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i y_{-1}^i(0) \quad (14)$$

и начальных условий.

На основании теоремы разрешимости следует, что

$$y_{-1}^i(0) = \frac{h^j(0)}{j!},$$

где

$$\text{ord}(\tau^i) = \text{ord}(\tau^{n(j+1)-1}), \quad i = \overline{0, p-1}, \quad j = \overline{0, N}, \quad N = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor. \quad (15)$$

$\text{ord}(\tau^i) = i$ означает степень τ^i .

Остальные $y_{-1}^i(0) = 0$. Решение $z_0(\tau)$ запишется в виде

$$z_0(\tau) = \tau^{n(N+2)-p-1} h_0(\tau^n) = \tau^s h_0(\tau^n), \quad (16)$$

где s — целое число, $s \in [0, n-1]$. Величина $x_0(0)$ определяется из начальных условий $x_0(0) + z_0(0) = u^0$. Тогда

$$x_0(0) = \begin{cases} u^0, & \text{если } z_0(0) = 0, \\ u^0 - z_0(0), & \text{если } z_0(0) \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, решение на « -1 » шаге определено:

$$u_{-1}(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^j(0)}{j!} \sigma_i,$$

где суммирование ведется по слагаемым, удовлетворяющих условию

$$\text{ord}(\tau^i) = \text{ord}(\tau^{n(j+1)-1}).$$

Чтобы определить $y_0^i(\tau)$, рассмотрим итерационную систему на шаге $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1'(\tau) = 0, \\ (y_1^i(\tau))' = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \tau^p z_1(\tau) = -z_0'(\tau) - \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i y_0^i(0), \\ x_0(0) + z_0(0) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Рассмотрим уравнение относительно $z_1(\tau)$. Согласно замечанию

$$\tau^p z_1(\tau) = -\tau^{s-1} h_0(\tau^n) - \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i y_0^i(0),$$

где $h_0(\tau^n)$ — некоторая гладкая функция, $h_0(0) \neq 0$.

На основании теоремы разрешимости имеем $y_0^i(0) = h_0^{(j)}(0)/j!$, для которых

$$\text{ord}(\tau^i) = \text{ord}(nj + s - 1), \quad i = \overline{0, p-1}, \quad j = \overline{0, N}, \quad \text{где } N = \left\lfloor \frac{m-s}{n} \right\rfloor. \quad (18)$$

Отсюда $z_1(\tau) = \tau^{n-q}h_1(\tau^n)$, $0 \leq q \leq n-1$ и

$$x_0(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } z_1(0) = 0, \\ -z_1(0), & \text{если } z_1(0) \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, на нулевом итерационном шаге полностью находится главный член асимптотики:

$$u_{\text{гл}}(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^j(0)}{j!} \sigma_i + x_0(0) e^{-\varphi(\tau)/\varepsilon} + \sum_{i=0}^{p-1} y_0^i(0) \sigma_i, \quad (19)$$

где в первом слагаемом суммирование ведется по условию (15), в третьем слагаемом суммирование ведется по условию (18).

Аналогично можно найти любой член асимптотического решения.

2. Оценка асимптотического члена. Пусть

$$u(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^N \varepsilon^k u_k(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{N+1} R_N(\tau, \varepsilon), \quad (20)$$

где $u_k(\tau, \varepsilon)$ — решения итерационных задач. Подставим уравнение (20) в задачу (3). Тогда получим задачу Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon R'_n(\tau, \varepsilon) + \tau^p R_n(\tau, \varepsilon) = H(\tau), \\ R_n(0, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь

$$H(\tau) = \tau^p z_{N+1} + z'_N + \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i y_N^i(0)$$

удовлетворяет условию точечной разрешимости. Тогда, оценивая $R_n(\tau, \varepsilon)$ по норме $C[0, T]$, получим оценку $\|R_n(\tau, \varepsilon)\| \leq C$.

Теорема 2. Пусть задана задача (3) и выполнены условия (i) и (ii). $C > 0$ — константа, не зависящая от ε . Тогда верна оценка

$$\left\| u(\tau, \varepsilon) - \sum_{k=-1}^N \varepsilon^k u_k(\tau, \varepsilon) \right\| \leq C \varepsilon^{N+1}.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и дополнительные условия точечной разрешимости $h^i(0) = 0$, $i = \overline{0, k}$, $k = [m/n]$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\tau, \varepsilon) = u_0(\tau), \quad \text{где } u_0(\tau) = \frac{\tau^{n-1} h(\tau^{n-1})}{\tau^p} = \tau^{n-s} h_1(\tau^n).$$

Здесь $h_1(0) \neq 0$, $0 \leq s \leq n-1$, или — в терминах исходной задачи — $u_0(t) = t^{(1-s/n)} h_1(t)$.

3. Примеры. В заключение приведем два примера.

Пример 1.

$$\begin{cases} \varepsilon u' + t^{3/2} u = h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0, \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Регуляризирующие функции в данном случае будут

$$e^{-2t^{5/2}/5\varepsilon}; \quad \sigma_i = e^{-2t^{5/2}/5\varepsilon} \int_0^{\sqrt{t}} e^{2s^{5/2}/5\varepsilon} s^i ds, \quad i = \overline{0, 3}.$$

Главный член асимптотики решения задачи запишется в виде

$$u = e^{-2t^{5/2}/5\varepsilon} u^0 + \sigma_0(-z'_0(0)) + \sigma_1\left(\frac{h(0)}{\varepsilon}\right) + \\ + \sigma_2(-z''_0(0)) + \sigma_3\left(\frac{h'(0)}{\varepsilon}\right) + \frac{(h(t) - h(0) - h'(0)t)\sqrt{t}}{t^2},$$

где

$$z_0 = \frac{(h(t) - h(0) - h'(0)t)\sqrt{t}}{t^2}.$$

Пример 2.

$$\begin{cases} \varepsilon u' + t^{1/2}u = h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0, \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Регуляризирующие функции в данном случае будут

$$e^{-2t^{3/2}/3\varepsilon}; \quad \sigma_i = e^{-2t^{3/2}/3\varepsilon} \int_0^{\sqrt{t}} e^{2s^{3/2}/3\varepsilon} s^i ds, \quad i = 0, 1.$$

Главный член асимптотики решения задачи запишется в виде

$$u = e^{-2t^{3/2}/3\varepsilon} u^0 + \sigma_0(-h'_0(0)) + \sigma_1\left(\frac{h(0)}{\varepsilon}\right) + \frac{(h(t) - h(0))\sqrt{t}}{t}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
2. Елисеев А. Г., Ломов С. А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // Мат. сб. — 1986. — 131, № 173. — С. 544–557.
3. Liouville J. Second memoire sur le development des fonctions en series dont divers termes sont assujettis, a une meme equation // J. Math. Pure Appl. — 1837. — 2. — Р. 16–35.
4. Турсунов Д. А., Кожбеков К. Г. Асимптотика решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дробной точкой поворота // Изв. Иркутск. ун-та. — 2017. — 21. — С. 108–121.

Елисеев Александр Георгиевич

Национальный исследовательский университет

«Московский энергетический институт»

E-mail: eliseevag@mpei.ru

Ратникова Татьяна Анатольевна

Национальный исследовательский университет

«Московский энергетический институт»

E-mail: ratnikovata@mpei.ru