Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Завьялова, Г. А. Тимофеева, Исследование динамики скачкообразного изменения цены в обобщенной модели Блэка—Шоулза, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 190, 88–92

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-190-88-92>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 08:00:52

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 88–92
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-88-92

УДК 519.217

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СКАЧКООБРАЗНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕНЫ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ БЛЭКА—ШОУЛЗА

© 2021 г. Т. В. ЗАВЬЯЛОВА, Г. А. ТИМОФЕЕВА

Посвящается профессору И. Я. Кацу

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы устойчивости обобщенной модели Блэка—Шоулза. Предполагается, что динамика цены опциона зависит от случайных скачкообразных изменений волатильности. Показано, что исследование вопроса среднеквадратической устойчивости стохастической системы Блэка—Шоулза можно свести к исследованию устойчивости детерминированной системы моментов второго порядка для базового актива. На примере опциона, имеющего два структурных состояния волатильности, получены условия среднеквадратической устойчивости.

Ключевые слова: стохастическая система, волатильность, модель Блэка—Шоулза, устойчивость.

STUDY OF THE DYNAMICS OF A JUMP-LIKE CHANGE IN PRICE IN THE GENERALIZED BLACK–SCHOLES MODEL

© 2021 Т. V. ZAVYALOVA, G. A. TIMOFEEVA

ABSTRACT. In this paper, we examine the stability of the generalized Black–Scholes model. We assume that the dynamics of the option price depends on random spasmodic changes in the volatility. We prove that the study of the mean-square stability of the Black–Scholes stochastic system can be reduced to the study of the stability of a deterministic system of second-order moments for the underlying asset. Using the example of an option with two structural volatility states, we obtain conditions of mean-square stability.

Keywords and phrases: stochastic system, volatility, Black–Scholes model, stability.

AMS Subject Classification: 60J75

1. Введение. Важным фактором, влияющим на цену опциона, является волатильность базового актива. Волатильность является мерой изменчивости базового актива, т.е. силы его ценовых колебаний. Более сильные исторические колебания цены актива дают большие значения волатильности. Как правило, ее и рассчитывают на основе исторических временных рядов как среднеквадратичное отклонение. Рассчитанная таким способом волатильность называется исторической (historical volatility). Существует множество моделей определения взаимосвязи цены опциона и волатильности. По существу, самое большое влияние на цену опциона оказывают два параметра: цена страйк (цена исполнения) и волатильность. Поэтому если трейдеры, например, предполагают, что цена акции не сильно изменится в течение небольшого периода времени, но

будет колебаться с возрастающей силой, то, купив опцион, они смогут продать его дороже. Чем больше волатильность, тем дороже опцион (выше премия), и наоборот. Эту взаимосвязь и используют при определении цены опциона. Чтобы рассчитать стоимость опциона, как правило, используют модель Блэка—Шоулза. В этой математической модели закладывается либо историческая волатильность, либо ожидаемая. На практике же оказывается, что такие расчетные модели являются грубыми и дают значимые расхождения с фактической ценой опциона. Чтобы адекватно описать динамику цены опциона в рассматриваемой математической модели Блэка—Шоулза, мы предполагаем, что волатильность является случайным марковским процессом. Таким образом, основной параметр, влияющий на цену опциона, изменяется скачкообразно в случайные моменты времени, что соответствует действительности. Если волатильность постоянна на некотором промежутке времени, то динамика всего процесса описывается уравнением Блэка—Шоулза. Такое математическое моделирование волатильности позволяет описывать скачки цены на опцион. В [8] рассмотрена модель Блэка—Шоулза в предположении, что процентные ставки изменяются скачкообразно, и показано, что малые скачки процентных ставок мало влияют на краткосрочные цены опционов. Исследованию стохастической волатильности посвящено значительное число работ, среди них наиболее известны [3–7].

2. Постановка задачи. Пусть динамика цены базового актива удовлетворяет стохастическому уравнению

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma(t)S(t)dw(t) \quad (1)$$

и задана начальная стоимость актива $S(0) = S_0$. Здесь $S(t)$ — цена опциона акций в каждый момент времени t , $\mu \in \mathbb{R}$ — процентная ставка, $t \in T = [0; t]$, $w(t)$ — стандартный винеровский процесс.

Предполагается, что волатильность $\sigma(t)$ на промежутке $t \in T[0; t]$ непостоянна, зависит от времени и является случайным процессом, а именно, задается простой марковской цепью, имеющей счетное число состояний. Переходные вероятности случайного процесса известны в каждый момент времени:

$$P\{\sigma(t) = \sigma_j \mid \sigma(s) = \sigma_i \neq \sigma_j\} = q_{ij}(t-s) + o(t-s), \quad (2)$$

$$P\{\sigma(t) = \sigma_i, s \leq \tau \leq t \mid \sigma(s) = \sigma_i\} = 1 - q_i(t-s) + o(t-s), \quad (3)$$

где $P\{\cdot \mid \cdot\}$ — условная вероятность события, q_{ij} — известные величины, характеризующие интенсивность перехода марковской цепи из i -го состояния в j -е; $o(t-s)$ — бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем $(t-s)$. На интервалах постоянства волатильности динамика цены опциона описывается уравнением (1) при $\sigma(t) = \sigma_i$. В момент скачкообразного изменения волатильности $\sigma_i \rightarrow \sigma_j$ система уже будет описываться уравнением (1) при $\sigma(t) = \sigma_j$. Но для рассмотрения системы с другим состоянием $\sigma(t) = \sigma_j$ необходимо задать новые начальные условия.

Будем предполагать, что в случайный момент времени $t = \tau$ происходит изменение волатильности скачкообразно. В этом случае скачком изменится и цена базового актива:

$$S(\tau + 0) = (k_{ij} + \alpha\xi)S(\tau - 0), \quad (4)$$

$k_{ij} = k(\sigma_i, \sigma_j)$ — функция, зависящая от случайных значений волатильности $\sigma(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ — некоторые постоянные, ξ — центрированная случайная величина, у которой $M\xi = 0$, $M\xi^2 = 1$.

Условие продолжения динамики цены $S(t)$ (4) обобщает классические модели Блэка—Шоулза, поскольку учитывает другие возможные модели волатильности. А именно, если волатильность не изменяется, то $k(\sigma_i, \sigma_j) = 1$ и $\alpha = 0$ и динамика цены непрерывна; если $\alpha = 0$ и $k(\sigma_i, \sigma_j) \neq 1$, то цена актива изменяется скачком детерминированно. Таким образом, исходная стохастическая модель цены актива сводится к исследованию динамики случайного марковского процесса $\{S(t), \sigma(t)\}$ с заданными начальными условиями, описанного соотношениями (1)–(4).

3. Исследование устойчивости. Для исследования устойчивости будем использовать математический аппарат для систем со случайной структурой и случайными скачками фазовой

траектории, опубликованных в работах авторов [1, 2]. Предварительно введем определения для таких систем.

Определение 1. Решение $S = 0$ системы (1) называется устойчивым в среднем квадратичном, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для любого решения с начальными данными, удовлетворяющими условиям

$$\|S_0\| \leq \delta, \quad \sigma_0 \in \Sigma, \quad t_0 \geq 0,$$

будет при всех $t \geq t_0$ справедливо неравенство

$$M(\|S(t)\|^2 | S_0, \sigma_0) < \varepsilon.$$

Определение 2. Решение системы (1) будем называть экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном, если при любых начальных условиях существуют такие постоянные $B > 0$, $\lambda > 0$, что при всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$M[\|S(t)\|^2 | S_0, \sigma_0] \leq B \|S_0\|^2 e^{-\lambda(t-t_0)}. \quad (5)$$

Найдем условия, при которых цена на опцион устойчива в среднем квадратичном. Для изучения динамики будем использовать метод моментов второго порядка. Обозначим условное математическое ожидание для данного показателя волатильности

$$M_i(t) = M[S^2(t)\chi_i(\sigma(t)) \mid S(t) = S^0, \sigma(t) = \sigma_i \in \Sigma], \quad (6)$$

где

$$\chi_i(\sigma_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq j, \\ 0, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

$i, j = 1, \dots, k$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Справедливо следующее утверждение, вытекающее из результатов [1, 2].

Теорема 1. Для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном системы со случайной структурой (1), испытывающей воздействие простой марковской цепи (2)–(3) и случайным условием скачка (4) необходимо и достаточно, чтобы была экспоненциально устойчива система дифференциальных уравнений для моментов второго порядка:

$$\frac{dM_i(t)}{dt} = (2\mu - q_i + \sigma_i^2)M_i(t) + q_{ji}(k_{ji}^2 + \alpha^2)M_j(t), \quad i, j = 1, \dots, k,$$

которые следует решать при начальных условиях $M_i(0) = S_0^2 \chi_i(\sigma_0)$.

Доказательство. Предположим, что система (5) с условием скачка (4) экспоненциально устойчива в среднем квадратичном. Тогда, учитывая (2)–(5), следующие равенства отражают с точностью до $o(h)$ моменты второго порядка для различных состояний волатильности:

$$\begin{aligned} M[S^2(t+h)\chi_i(\sigma(t+h)) \mid S(t), \sigma(t) = \sigma_i \in \Sigma] = \\ = M[(h\mu + \Delta h\sigma_i + 1)((h\mu + \Delta h\sigma_i + 1))S^2(t)(1 - q_i h)], \end{aligned} \quad (7)$$

$$M[S^2(t+h)\chi_i(\sigma(t+h)) \mid S(t), \sigma(t) = \sigma_j \in \Sigma] = M[(k_{ij} + \alpha\xi)^2 S^2(t) \cdot q_{ji} h], \quad (8)$$

где $\Delta h = \sqrt{h}$, поскольку приращение винеровского процесса $w(t)$ имеет порядок малости $\sqrt{h}$. Соотношения (7), (8) можно объединить и записать в общем виде для любого значения волатильности $\sigma(t) \in \Sigma$. Имеем

$$\begin{aligned} M[S^2(t+h)\chi_i(\sigma(t+h)) \mid S(t), \sigma(t)] = \\ = M[(h\mu + \Delta h\sigma_i + 1)^2 S^2(t) \cdot (1 - q_i h)\chi_i(\sigma(t))] + M[(k_{ij} + \alpha\xi)^2 S^2(t) \cdot q_{ji} h \cdot \chi_j(\sigma(t))]. \end{aligned}$$

Учитывая, что $M\xi = 0$, $M\xi^2 = 1$ и используя формулу повторного математического ожидания $M[M[\xi|\eta]] = M[\xi]$, получим

$$M_i(t+h) = 2h\mu \cdot M_i(t) + h\sigma_i^2 \cdot M_i(t) - hq_i \cdot M_i(t) + hq_{ji}(k_{ji}^2 + \alpha^2) \cdot M_j(t) + M_i(t),$$

здесь использовано обозначение (6). Перенесем $M_i(t)$ в левую часть равенства, разделим на h и перейдем к пределу при $h \rightarrow 0$. Имеем

$$\frac{dM_i(t)}{dt} = (2\mu - q_i + \sigma_i^2) \cdot M_i(t) + q_{ji}(k_{ji}^2 + \alpha^2) \cdot M_j(t), \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (9)$$

Заметим, что полученная система из k обыкновенных дифференциальных уравнений не зависит от случайной составляющей в соотношении скачка (4). Учитывая, что $\|S\|^2 = S^2$ в наших обозначениях, то

$$M(\|S\|^2 | S_0, \sigma_0) = \text{tr} \left(\sum_{i=1}^k M_i(t) \right).$$

Здесь $\text{tr}(\cdot)$ — след матрицы. Следовательно, из экспоненциальной устойчивости системы (9) следует экспоненциальная устойчивость системы (1) со случайным условием скачка (4). $\square$

4. Пример. Рассмотрим динамику актива со случайными скачками волатильности. Модель описывается стохастическим уравнением (1). Для учета влияния случайных скачков волатильности предположим, что волатильность опциона имеет состояния: σ_1 — малая волатильность актива, соответствующая росту финансового рынка, устойчивому состоянию экономики; σ_2 — высокая волатильность актива, соответствующая экономическому спаду, кризисному состоянию экономики. При каждом фиксированном состоянии цена $S(t)$ описывается уравнением (1). При переходе из состояния (1) в состояние (2) в случайный момент времени $t = \tau$ происходит изменение волатильности $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$. Введем обозначение $\sigma_2 = k_{12}\sigma_1$ ($k_{12} \neq 1$) и будем считать, что скачком изменяется цена на акцию:

$$S(\tau+0) = (\alpha\xi + k_{ij}) \cdot S(\tau-0), \quad (10)$$

где ξ — случайная величина, у которой $M\xi = 0$, $M\xi^2 = 1$, α — некоторый параметр.

Если $k_{12} = 1$, то волатильность не изменилась, если $k_{12} \neq 1$, то увеличилась (уменьшилась) в k_{12} раз.

Следуя разделу 3, построим систему для моментов второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1(t)}{dt} &= (2\mu - q_{12} + \sigma_1^2) \cdot M_1(t) + q_{21}(k_{21}^2 + a^2) \cdot M_2(t), \\ \frac{dM_2(t)}{dt} &= (2\mu - q_{21} + \sigma_2^2) \cdot M_2(t) + q_{12}(k_{12}^2 + a^2) \cdot M_1(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку марковская цепь имеет два состояния, то из соотношения

$$q_i = \sum_{j \neq i}^k q_{ij}$$

заключаем, что $q_1 = q_{12}$, $q_2 = q_{21}$.

Составим характеристическое уравнение для системы (11):

$$\begin{aligned} \Delta = |B - \lambda E| &= \lambda^2 + \lambda(q_{12} + q_{21} - 4\mu - \sigma_1^2 - \sigma_2^2) + 4\mu^2 + 2\mu(-q_{12} - q_{21} + \sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \\ &+ \sigma_1^2(1 - q_{21}) + \sigma_2^2(1 - q_{12}) + q_{12}q_{21}(1 - (k_{12}^2 + a^2)(k_{21}^2 + a^2)). \end{aligned}$$

Пользуясь критерием Гурвица, получим условия устойчивости системы (11):

$$\begin{cases} q_{12} + q_{21} - 4\mu - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 > 0, \\ \sigma_1^2(2\mu + 1 - q_{21}) + \sigma_2^2(2\mu + 1 - q_{12}) - \left(\frac{1}{k^2} + k^2 \right) a^2 q_{12}q_{21} + 4\mu^2 - 2\mu(q_{12} + q_{21}) - a^4 > 0. \end{cases}$$

Полученные соотношения запишем в виде

$$y(k) > \frac{Bk^2 - Ck + B}{A(k^2 + k)}, \quad y(k) < \frac{D}{1 + k}, \quad (12)$$

Здесь введены обозначения $k_{12} = k$, $y = \sigma_2^2$, $y = k\sigma_1^2$, $q_{12} = q_{21} = q$, $A = 2\mu - q + 1$, $B = \alpha^2 q^2$, $C = 4\mu - 4\mu q - \alpha^4$, $D = 2q - 4\mu$.

Из системы (12) вытекают условия среднеквадратической устойчивости системы (1)–(4), накладываемые на случайный параметр скачка фазового вектора:

$$\begin{cases} \alpha > \alpha_1 \vee \alpha < \alpha_2, \\ 4\mu q + 2q - 8\mu^2 - q^2 > 0. \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{-q + \sqrt{4\mu q + 2q - 8\mu^2 - q^2}}, \quad \alpha_2 = -\sqrt{-q + \sqrt{4\mu q + 2q - 8\mu^2 - q^2}}.$$

Проанализируем полученные условия (13) среднеквадратической устойчивости (1)–(4) относительно параметров волатильности. Если зафиксировать значения процентной ставки и интенсивности переходов, исходя из практической ситуации, то модель Блэка–Шоулза (1)–(4) не будет устойчивой в среднем квадратичном, как и модель без скачков траектории. Рассмотрим случай $\alpha = 0$ и очень большие значения k , тогда система (1)–(4) будет устойчивой в среднем квадратичном. Другими словами, на длительном промежутке времени при больших скачках волатильности и очень малых значениях случайных изменений область устойчивости существует. Таким образом, даже неустойчивую исходную модель Блэка–Шоулза со скачками волатильности можно привести в устойчивое состояние за счет малого параметра α в условии (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Завьялова Т. В., Кац И. Я., Тимофеева Г. А. Об устойчивости движения стохастических систем со случайным условием скачка фазовой траектории // Автомат. телемех. — 2002. — 7. — С. 33–43.
2. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. — Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 1998.
3. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. I. Факты. Модели. — М.: Фазис, 1998.
4. Bates D. Jump and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutsche mark options // Rev. Fin. Stud. — 1996. — 9. — P. 69–107.
5. Heston S. L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // Rev. Fin. Stud. — 1993. — 6. — P. 327–344.
6. Jorion P. On jump processes in the foreign exchange and stock markets // Rev. Fin. Stud. — 1988. — 1. — P. 427–445.
7. Merton R. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous // J. Fin. Econ. — 1976. — 3. — P. 125–144.
8. Scott L. O. The information content of prices in derivative security markets // IMF Staff Papers. — 1992. — 39. — P. 596–625.

Завьялова Татьяна Викторовна

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Москва

E-mail: tzava@yandex.ru

Тимофеева Галина Адольфовна

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

E-mail: Gtimofeeva@usurt.ru