Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Хацкевич, Об условии, обеспечивающем гидродинамическую устойчивость и единственность стационарного и периодического течений жидкости, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 190, 122–129

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-190-122-129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:20:30

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 122–129
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-122-129

УДК 532.5

ОБ УСЛОВИИ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО И ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ

© 2021 г. В. Л. ХАЦКЕВИЧ

Аннотация. Предложено условие, обеспечивающее применение первого метода Ляпунова к обоснованию устойчивости стационарных и периодических течений жидкости в ограниченной области, а также единственность решений соответствующих задач.

Ключевые слова: эволюционные уравнения Навье—Стокса, гидродинамическая устойчивость, линеаризованная задача, свойство равномерной диссипативности.

ON A CONDITION THAT ENSURES HYDRODYNAMIC STABILITY AND UNIQUENESS OF STATIONARY AND PERIODIC FLUID FLOWS

© 2021 V. L. KHATSKEVICH

ABSTRACT. In this paper, we propose a condition that ensures the applicability of the first Lyapunov method to justifying stability of stationary and periodic fluid flows in a bounded region and the uniqueness of solutions of the corresponding problems.

Keywords and phrases: evolutionary Navier–Stokes equations, hydrodynamic stability, linearized problem, property of uniform dissipativity.

AMS Subject Classification: 35B35, 35Q30

1. Введение. Одним из основных методов изучения устойчивости течения жидкости в настоящее время является метод линеаризации с последующим исследованием спектра линеаризованной задачи (см., напр., [1, 2, 6, 12]). В настоящей работе предлагается использовать условие равномерной диссипативности для оператора линеаризованной задачи. Это условие обеспечивает расположение спектра линеаризованной задачи, гарантирующее устойчивость рассматриваемых стационарных и периодических течений в соответствующих пространствах.

Кроме того, в работе установлена единственность решений стационарной и периодической задач для системы уравнений Навье—Стокса в случае, если соответствующая линеаризованная задача обладает свойством равномерной диссипативности. Это придает новый качественный смысл утверждениям о гидродинамической устойчивости. Также в данной работе приведены условия, обеспечивающие равномерную диссипативность для оператора линеаризованной задачи. В последней части статьи показывается применение условия равномерной диссипативности линеаризованного оператора в обосновании принципа усреднения в задаче Навье—Стокса с быстро осциллирующей массовой силой.

2. Устойчивость стационарных течений. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) с границей $\partial\Omega$ класса C^2 . В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассматривается эволюционная система уравнений

Навье—Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}(x, 0) = a(x) \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{v}$ — вектор скорости, $\nu > 0$ характеризует вязкость, p — давление, $\mathbf{F}$ — массовая сила. Ниже в этом пункте будем предполагать, что массовая сила $\mathbf{F}$ задана, не зависит от времени и квадратично суммируема на Ω .

Пусть система (1)–(4) имеет стационарное решение $(\mathbf{v}^0(x), p^0(x))$, т.е. $(\mathbf{v}^0(x), p^0(x))$ является решением стационарной задачи:

$$-\nu \Delta \mathbf{v} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{F} \quad \text{в } \Omega, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (6)$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (7)$$

Рассмотрим уравнения Навье—Стокса, линеаризованные в окрестности этого решения:

$$-\nu \Delta \mathbf{v} + \sum_{i=1}^n v_i^0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial x_i} = -\operatorname{grad} q + \mathbf{F}, \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (9)$$

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (10)$$

Отметим, что разрешимость задач (1)–(4), (5)–(7), (8), (9), а также встречающейся ниже периодической задачи хорошо изучена (см., напр, книги О. А. Ладыженской [3], Ж. Л. Лионса [7], Р. Темама [9]).

Введем необходимые обозначения. Пусть $\mathbf{L}^2(\Omega)$ — гильбертово пространство векторных квадратично суммируемых функций со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} u_j v_j^* dx, \quad \|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2},$$

где знак $*$ означает комплексное сопряжение. Для гладких функций определим скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_1$ и норму $\|\cdot\|_1$ формулами

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 = \sum_{k,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j^*}{\partial x_k} dx, \quad \|\mathbf{u}\|_1 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_1^{1/2}.$$

Через H и H_1 обозначим замыкание пространства гладких, финитных в Ω соленоидальных векторных полей по нормам $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$, соответственно.

Определим в H оператор L , полагая в качестве его области определения $D(L)$ множество соленоидальных, исчезающих на $\partial\Omega$ векторах из $\mathbf{W}_2^2(\Omega)$:

$$L\mathbf{u} \equiv \Pi \left[-\nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n v_i^0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial x_i} \right], \quad \mathbf{u} \in D(L), \quad (11)$$

где Π — оператор ортогонального проектирования в $\mathbf{L}^2(\Omega)$ на подпространство H .

Отметим, что между нормами $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ имеет место взаимосвязь

$$\|\mathbf{u}\|_1^2 \geq \lambda_1 \|\mathbf{u}\|^2, \quad \mathbf{u} \in H_1.$$

Здесь λ_1 — первое собственное значение оператора Стокса, действующего в H по формуле $A\mathbf{u} = -\Pi \Delta \mathbf{u}$ на области определения $D(A) = H_1 \cap \mathbf{W}_2^2(\Omega)$.

Ниже будем использовать следующее утверждение (см., например, [12, гл. I, § 5]).

Утверждение 1. *Оператор L замкнут, спектр у него чисто точечный: состоит из бесконечной последовательности чисел $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots$. При этом $\operatorname{Re} \sigma_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$).*

В [12, гл. 2, § 2] установлена следующая теорема.

Утверждение 2. *Пусть спектр оператора L расположен внутри правой полуплоскости:*

$$\operatorname{Re} \sigma(L) \geq \sigma_0 > 0. \quad (12)$$

Если область Ω двумерна, то стационарное решение $\mathbf{v}^0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову в H . Если область Ω — трехмерная, то стационарное решение $\mathbf{v}^0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову в H .

Отметим, что для трехмерной области Ω справедлив близкий результат (см. [12]) по устойчивости в пространстве S_p ($p \geq 3$), являющимся замыканием гладких соленоидальных, исчезающих на $\partial\Omega$ векторов по норме $\mathbf{L}^p(\Omega)$.

Нас заинтересовало требование на оператор L , которое может обеспечить выполнение условий утверждения 2. Оказалось, что его можно формулировать в терминах диссипативности оператора L (по поводу диссипативных операторов см., например, [8, гл. 1, § 6]). В связи с этим введем следующее определение.

Рассматриваемый в гильбертовом пространстве H оператор $L: D(L) \rightarrow H$ называется *равномерно κ -диссипативным*, если выполнено условие

$$\operatorname{Re}(L\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \kappa \|\mathbf{u}\|^2, \quad \mathbf{u} \in D(L), \quad (13)$$

где $\kappa > 0$ — фиксированная постоянная.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Если для линеаризованного оператора L , определяемого формулой (11), выполнено условие равномерной κ -диссипативности (13) в H , то спектр оператора L удовлетворяет соотношению (12) при $\sigma_0 = \kappa$.*

Доказательство. Действительно, пусть σ — собственное значение оператора L и ψ — отвечающая ему собственная функция. Тогда согласно (13)

$$\operatorname{Re}(L\psi, \psi) = \operatorname{Re}(\sigma\psi, \psi) = \operatorname{Re} \sigma \|\psi\|^2 \geq \kappa \|\psi\|^2.$$

Отсюда следует (12) при $\sigma_0 = \kappa$. □

Таким образом, в силу утверждения 2, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть линеаризованный на $\mathbf{v}^0$ оператор L равномерно диссипативен. Тогда стационарное решение $\mathbf{v}^0$ асимптотически устойчиво в пространстве H в случае двумерной области Ω .*

Оказывается, диссипативность оператора L обеспечивается малостью нормы $\|\mathbf{v}^0\|_1$ стационарного решения. Покажем это. Рассмотрим трилинейную форму

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \sum_{k,j=1}^n \int_{\Omega} u_k \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) w_j^* dx, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_1.$$

Мы будем использовать модификацию известного свойства трилинейной формы [9, гл. 2, § 11], а именно, для комплекснозначных функций $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ справедливо равенство

$$\operatorname{Re} b(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_1. \quad (14)$$

Кроме того, известно соотношение

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq C \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_1 \quad (15)$$

(см. [9, гл. 2, § 11]), где постоянная C зависит от области Ω .

Заметим, что для стационарного решения $\mathbf{v}^0$ задачи (2)–(7) справедливо соотношение

$$\nu(\mathbf{v}^0, \mathbf{v})_1 + b(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^0, \mathbf{v}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in H_1, \quad (16)$$

т.е. $\mathbf{v}^0$ — слабое решение.

Из (16) при $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0$ в силу (14) следует оценка

$$\|\mathbf{v}^0\|_1 \leq \frac{1}{\nu\sqrt{\lambda_1}} \|\mathbf{F}\|. \quad (17)$$

Теорема 2. Если выполнено соотношение

$$\nu - \frac{c}{\nu\sqrt{\lambda_1}} \|\mathbf{F}\| > 0, \quad (18)$$

то оператор L , линейризованный на $\mathbf{v}^0$, равномерно диссипативен при

$$\kappa = \lambda_1 \left(\nu - \frac{c}{\nu\sqrt{\lambda_1}} \|\mathbf{F}\| \right).$$

Доказательство. В силу определения оператора L и с учетом (14) имеем

$$\operatorname{Re}(L\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -\nu\|\mathbf{u}\|_1^2 + \operatorname{Re} b(\mathbf{v}^0, \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \operatorname{Re} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{u}) = -\nu\|\mathbf{u}\|_1^2 + \operatorname{Re} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{u}).$$

При этом согласно (15), (17)

$$\operatorname{Re} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{u}) \leq |b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{u})| \leq C\|\mathbf{v}^0\|_1\|\mathbf{u}\|_1^2 \leq C \frac{\|\mathbf{F}\|}{\nu\sqrt{\lambda_1}} \|\mathbf{u}\|_1^2.$$

Тогда

$$\operatorname{Re}(L\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \left(\nu - \frac{\|\mathbf{F}\|}{\nu\sqrt{\lambda_1}} \right) \|\mathbf{u}\|_1^2,$$

что и обеспечивает справедливость утверждения. $\square$

Согласно (17) малость нормы $\|\mathbf{v}^0\|_1$ обеспечена, если вязкость $\nu > 0$ достаточно велика, либо массовая сила $\mathbf{F}$ мала по норме L_2 .

Но при этом, как известно (см. [9, гл. II, § 1]), стационарное решение единственно. Это наводит на мысль, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{v}^0$ — решение стационарной задачи (5)–(7), а соответствующий ему линейризованный оператор L , определяемый равенством (11), обладает свойством равномерной диссипативности (13). Тогда $\mathbf{v}^0$ является единственным решением стационарной задачи (5)–(7).

Доказательство. Пусть $\mathbf{v}^0$ — решение стационарной задачи (5)–(7). Тогда оно удовлетворяет соотношению (16). Пусть $\mathbf{u}^0$ — некоторое другое решение задачи (16). Положим $\mathbf{u} = \mathbf{v}^0 - \mathbf{u}^0$. Вычтем друг из друга уравнения (16), соответствующие $\mathbf{v}^0$ и $\mathbf{u}^0$. Тогда получим соотношение

$$\nu(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 + b(\mathbf{v}^0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{v} \in V. \quad (19)$$

Полагая в (19) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ и используя свойство (14) для вещественнозначных функций, находим

$$\nu(\mathbf{u}, \mathbf{u})_1 + b(\mathbf{v}^0, \mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{u}) = 0.$$

С другой стороны, по определению оператора L левая часть этого равенства равна $(L\mathbf{u}, \mathbf{u})$. Тогда в силу предположения о равномерной диссипативности (13) оператора L и вещественнозначности функции $\mathbf{u}$ имеем $(L\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \operatorname{Re}(L\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \kappa\|\mathbf{u}\|^2$. Следовательно, $0 \geq \kappa\|\mathbf{u}\|^2$, т.е. $\mathbf{u} = 0$, что и требовалось доказать. $\square$

Отметим, что на самом деле результат теоремы 3 справедлив, если предполагать, что $\mathbf{v}^0$ — только слабое решение, т.е. удовлетворяет (16).

Вообще, вопрос о единственности решений стационарной задачи открыт до настоящего времени. Известны случаи неединственности близких задач (результаты Юдовича, Рабиновича, Вельте и др., см., например, [9, гл. II, § 4]). Единственность решения стационарного уравнения Навье—

Стокса (5)–(7) установлена лишь в предположении, что ν достаточно велико или что заданные силы достаточно малы (см., например, [9, гл. II, § 1]).

Поэтому вопрос, какие дополнительные условия обеспечивают единственность, весьма актуален. В нашем случае это условие равномерной диссипативности линеаризованного оператора. Теорема 3 придает новый качественный смысл теореме 1 о гидродинамической устойчивости, поскольку в условиях теоремы 1 решение стационарной задачи единственно по теореме 3.

3. Устойчивость периодических течений. Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях жидкости в ограниченной области с фиксированным периодом $T > 0$.

Пусть Ω — n -мерная ($n = 2, 3$) ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2 . В бесконечном цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о T -периодических решениях системы Навье—Стокса (1)–(3). Ниже предполагается, что массовая сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x)$ является T -периодической по t , а при каждом фиксированном t квадратично суммируема по $x \in \Omega$.

Пусть $\mathbf{v}^0(t)$ — некоторое T -периодическое решение задачи (1)–(3). Аналогично (11) на области определения $D(L) = H_1 \cap \mathbf{W}_2^2(\Omega)$ рассмотрим оператор $L(t)$, определяемый формулой

$$L(t)\mathbf{z} \equiv \Pi \left(-\nu \Delta \mathbf{z} + \sum_{i=1}^n v_i^0(t) \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial x_i} \right). \quad (20)$$

Согласно [12, гл. III, § 3] в H рассматривается линеаризованное на $\mathbf{v}^0(t)$ однородное уравнение

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} + L(t)\mathbf{z} = 0. \quad (21)$$

Решение уравнения (21) ищется в виде

$$\mathbf{z}(t) = e^{\sigma t} \mathbf{w}(t) \quad (22)$$

с T -периодической по t вектор-функцией $\mathbf{w}(t)$.

Комплексные значения параметра σ , для которых уравнение (21) имеет ненулевые решения вида (22) ищут, решая спектральную задачу

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} + L(t)\mathbf{w} + \sigma \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{w}(t+T) = \mathbf{w}(t). \quad (23)$$

Совокупность всех таких σ называется спектром устойчивости основного течения $\mathbf{v}^0(t)$ и обозначается $\mathfrak{S}$.

Утверждение 3 (см. [12, гл. III, § 3]). *Спектр устойчивости $\mathfrak{S}$ состоит из конечнократных собственных значений.*

Утверждение 4 (см. [12, гл. III, § 3]). *Пусть спектр устойчивости периодического решения $\mathbf{v}^0(t)$ лежит внутри левой полуплоскости, т.е. для всех собственных значений задачи (23) справедливо неравенство $\operatorname{Re} \sigma \leq -\sigma_0 < 0$. Тогда течение $\mathbf{v}^0(t)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову в пространстве H_1 .*

Укажем условие, обеспечивающее выполнение предположений утверждения 4.

Лемма 2. *Пусть при каждом t для линеаризованного оператора $L(t)$, определяемого формулой (20), выполнено условие равномерной κ -диссипативности (13). Тогда спектр задачи (23) лежит внутри левой полуплоскости; более того $\operatorname{Re} \sigma \leq -\kappa$ для всех $\sigma \in \mathfrak{S}$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть найдется такое $\sigma_0 \in \mathfrak{S}$, что $\operatorname{Re} \sigma_0 > -\kappa$. Положим $\gamma = \kappa + \operatorname{Re} \sigma_0$. По определению $\gamma > 0$. Рассмотрим оператор $B(t) = L(t) + \sigma_0 I$, где I — единичный оператор в H . Тогда согласно условию (13) и сделанному предположению имеем

$$\operatorname{Re}(B(t)\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \operatorname{Re}(L(t)\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \operatorname{Re} \sigma_0 (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \gamma \|\mathbf{u}\|^2, \quad \mathbf{u} \in D(L). \quad (24)$$

Как известно (см., например, [10, гл. II, § 2.1]), условие (24) обеспечивает единственность T -периодического решения уравнения (23). Следовательно, $\mathbf{w}(t) \equiv 0$. Таким образом, σ_0 не входит в спектральное множество $\mathfrak{S}$. Полученное противоречие доказывает лемму 2. $\square$

Из утверждения 4 и леммы 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть при каждом t для линеаризованного оператора $L(t)$, определяемого формулой (20), выполнено условие равномерной κ -диссипативности (13). Тогда периодическое течение $\mathbf{v}^0(t)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову в пространстве H_1 .

Кроме того, условие (13) на $L(t)$ обеспечивает единственность T -периодического решения задачи (1)–(3).

Вопрос о единственности в общей ситуации, по-видимому, до сих пор остается открытым. Единственность решения задачи (19), (20) установлена в предположении «малости» неоднородности $\mathbf{F}$, в частности, при достаточной малости $\|\mathbf{F}\|_{L^\infty(0,T;H)}$ (см. [6, с. 498]). В нашей ситуации имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $\mathbf{v}^0(t)$ есть T -периодическое решение задачи (1)–(3). Пусть при каждом t для линеаризованного на $\mathbf{v}^0(t)$ оператора $L(t)$ выполнено условие равномерной κ -диссипативности (13). Тогда $\mathbf{v}^0(t)$ является единственным T -периодическим решением задачи (1)–(3).

Доказательство. Заметим, что $\mathbf{v}^0(t)$ удовлетворяет соотношению (слабое решение)

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{v}^0, \mathbf{v}\right) + \nu(\mathbf{v}^0, \mathbf{v})_1 + b(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^0, \mathbf{v}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in H_1. \quad (25)$$

Пусть $\mathbf{u}^0$ — некоторое другое T -периодическое решение задачи (1)–(3). Положим $\mathbf{u} = \mathbf{v}^0 - \mathbf{u}^0$. Вычтем друг из друга уравнения (25), соответствующие $\mathbf{v}^0$ и $\mathbf{u}^0$. Тогда получим соотношение

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) + \nu(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}^0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{v} \in H_1.$$

Полагая здесь $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ и используя (14) для вещественнозначных функций, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|^2 + \nu \|\mathbf{u}(t)\|_1^2 + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{u}) = 0.$$

Согласно определению оператора $L(t)$ и (14) это равенство можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|^2 + (L(t)\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0.$$

Отсюда в силу равномерной κ -диссипативности оператора $L(t)$ (13) и вещественнозначности функции $u(t)$ получим

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|^2 \leq -2\kappa \|\mathbf{u}(t)\|^2.$$

Тогда при всех $\tau \in \mathbb{R}$ имеем

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 \leq e^{-2\kappa(t-\tau)} \|\mathbf{u}(\tau)\|^2, \quad t \geq \tau. \quad (26)$$

Устремляя в (26) $\tau \rightarrow -\infty$ и используя периодичность (а значит, ограниченность функции $\mathbf{u}(\tau)$), убедимся, что $\mathbf{u}(t) \equiv 0$. $\square$

Следствие. Для разности решений $\mathbf{v}^0$ и $\mathbf{v}$ задачи (1)–(3) справедлива оценка

$$\|\mathbf{v}^0(t) - \mathbf{v}(t)\| \leq e^{-\kappa t} \|\mathbf{v}^0(0) - \mathbf{v}(0)\|, \quad t \geq 0. \quad (27)$$

Оценка (27) гарантирует экспоненциальную асимптотическую устойчивость (конвергентность) T -периодического решения $\mathbf{v}^0(t)$.

Отметим, что аналогично теореме 2 справедливо утверждение об условиях, обеспечивающих равномерную κ -диссипативность оператора $L(t)$. При этом используются оценки периодических решений задачи (1)–(3) (см., например, [11]). Можно показать, что (в частности) условие малости $\|\mathbf{F}\|_{L^\infty(0,T;H)}$ обеспечивает равномерную диссипативность оператора $L(t)$.

4. О принципе усреднения в периодической задаче для системы уравнений Навье—Стокса. Условие равномерной диссипативности линеаризованного оператора полезно также и при обосновании метода усреднения в задачах с быстро осциллирующей массовой силой. Опишем этот класс задач (см. [2, 4, 5, 11]).

В бесконечном цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассматривается задача о T/ω -периодическом решении

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \text{grad } p = \mathbf{f}(x, \omega t), \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (28)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = 0, \quad (29)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}(x, T/\omega). \quad (30)$$

Здесь $T > 0$ — фиксированное число, $\omega > 0$ — «большой» параметр осцилляции. При этом предполагается, что функция $\mathbf{f}(x, \tau)$ — T -периодична по второму аргументу.

Наряду с (28)–(30) в Ω рассматривается усредненная стационарная задача

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \bar{\mathbf{f}} - \text{grad } q, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (31)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = 0, \quad (32)$$

где в правой части фигурирует среднее значение $\bar{\mathbf{f}}$ функции $\mathbf{f}(x, \tau)$, задаваемое формулой

$$\bar{\mathbf{f}}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(x, \tau) d\tau.$$

Пусть $\mathbf{u}^0$ — некоторое решение задачи (31), (32). Рассмотрим линеаризованную на $\mathbf{u}^0$ задачу

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n u_i^0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_i} + \text{grad } q = \bar{\mathbf{f}}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (33)$$

$$\int_{\Omega} q dx = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (34)$$

Определим в пространстве H линейный оператор A_0 , соответствующий задаче (33), (34):

$$A_0 \mathbf{z} \equiv \Pi \left[-\nu \Delta \mathbf{z} + \sum_{i=1}^n u_i^0 \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_i} \right] \mathbf{z} \in H_1 \cap \mathbf{W}_2^2(\Omega), \quad (35)$$

где Π — проектор в $L_2(\Omega)$ на подпространство H соленоидальных векторных полей.

Сформулируем в удобном для нас виде результат из [5, гл. XI, § 5] (см. также [2, 4, 5, 11]).

Утверждение 5. Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, граница $\partial\Omega$ области класса C^2 , неоднородность $\mathbf{f}(x, \tau)$ принадлежит классу $C(0, T; H)$. Пусть $\mathbf{u}^0$ — некоторое решение задачи (31), (32) и спектр линейного оператора (35) не содержит точек мнимой оси. Тогда найдутся такие значения параметра осцилляции $\omega_0 > 0$ и положительное число r , что при $\omega > \omega_0$ задача (28)–(30) имеет единственное в шаре $\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}\|_1 \leq r$ (возможно, обобщенное) решение $\mathbf{u}^\omega$. При этом $\|\mathbf{u}^\omega - \mathbf{u}^0\|_1 \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow +\infty$.

В силу леммы 1 и теоремы 5 имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть оператор A_0 , определяемый формулой (35), равномерно диссипативен. Тогда справедливо заключение утверждения 5. При этом решение $\mathbf{u}^0$ задачи (31), (32) единственно.

Отметим, что единственность $\mathbf{u}^0$ придает новый качественный смысл обоснованию метода усреднения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. — М., 1981.
2. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
3. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
4. Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование системы Навье—Стокса с быстро осциллирующей массовой силой// Диффер. уравн. — 2001. — 37, № 5. — С. 696–705.
5. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: МГУ, 1978.
6. Линь Цзя-цзяо Теория гидродинамической устойчивости. — М., 1958.
7. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
8. Симоненко И. Б. Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с применением к задачам гидродинамической устойчивости. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1989.
9. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.
10. Трубников Ю. А., Перов А. И. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. — Наука и техника, 1986.
11. Хацкевич В. Л. О принципе усреднения в периодической по времени задаче для уравнений Навье—Стокса с быстро осциллирующей массовой силой// Мат. заметки. — 2016. — 99, № 5. — С. 764–777.
12. Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1984.
13. Юдович В. И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями// Усп. мех. — 2006. — 4, № 3. — С. 26–129.

Хацкевич Владимир Львович

Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж

E-mail: vlkhats@mail.ru