Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Шубарин, Условия неизоморфности пары весовых пространств непрерывных функций, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 190, 144–155

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-190-144-155>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 03:23:41

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 144–155
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-144-155

УДК 517.982.272, 517.982.27

УСЛОВИЯ НЕИЗОМОРФНОСТИ ПАРЫ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

© 2021 г. М. А. ШУБАРИН

Аннотация. В статье формулируются условия неизоморфности пары пространств Фреше. Эти условия формулируются в терминах инвариантных классов пространств (D_1) и (D_2) . В качестве следствия доказывается неизоморфность весовых пространств непрерывных функций специального вида. Эти пространства можно рассматривать как модификацию пространств степенных рядов конечного и бесконечного типа.

Ключевые слова: изоморфные пространства, ограниченный оператор, метод вещественной интерполяции, весовое пространство непрерывных функций.

CONDITIONS FOR THE NONISOMORPHISM OF A PAIR OF WEIGHTED SPACES OF CONTINUOUS FUNCTIONS

© 2021 М. А. SHUBARIN

ABSTRACT. In this paper, we formulate conditions for a pair of Fréchet spaces to be nonisomorphic. These conditions are formulated in terms of invariant classes of the spaces (D_1) and (D_2) . As a consequence, we prove that weighted spaces of continuous functions of a special form are nonisomorphic. These spaces can be considered as a modification of spaces of power series of finite and infinite type.

Keywords and phrases: isomorphic spaces, bounded operator, real interpolation method, weighted space of continuous functions.

AMS Subject Classification: 47B10, 46B70, 46A63

1. Введение. Постановка задачи.

1.1. В статье рассматривается проблема изоморфной классификации пространств Фреше и, в частности, весовых пространств непрерывных функций.

Пространства Фреше (т.е. полные метризуемые локально выпуклые пространства) X и Y называют изоморфными (и пишут $X \cong Y$), если существует непрерывный биективный линейный оператор $T: X \rightarrow Y$. Оператор T , удовлетворяющий перечисленным условиям, называют изоморфизмом. Если не существует изоморфизма $T: X \rightarrow Y$, то говорят, что пространства X и Y неизоморфны и пишут $X \not\cong Y$.

Проблема изоморфной классификации состоит в нахождении условий изоморфности или неизоморфности двух пространств Фреше.

1.2. Практикуется два подхода к решению этой проблемы. Первый из них основан на изучении линейных топологических инвариантов. По определению, линейным топологическим инвариантом (сокращённо — ЛТИ) называют произвольное отображение Ψ , заданное на некотором множестве $\mathcal{K}$ пространств Фреше и удовлетворяющее следующему условию: если пространства Фреше X, Y из $\mathcal{K}$ изоморфны, то $\Psi(X) = \Psi(Y)$. Таким образом, в терминах ЛТИ можно сформулировать необходимое условие изоморфности пространств из $\mathcal{K}$. Представляет интерес выделить в $\mathcal{K}$ подмножество $\mathcal{K}_0$, на котором Ψ будет сильнейшим линейным топологическим инвариантом. Другими словами, из равенства $\Psi(X) = \Psi(Y)$ для пространств из $\mathcal{K}_0$ должна следовать изоморфность этих пространств.

Нетривиальными ЛТИ являются:

- (1) аппроксимативная размерность (см. [7, 12, 17]);
- (2) диаметральная размерность (см. [11]) и её модификации (см. [8], дальнейшие обобщения и библиография в [24]).

1.3. Другой подход к решению проблемы изоморфной классификации состоит в нахождении условий, при выполнении которых ни один линейный оператор, действующий в рассматриваемых пространствах, не будет изоморфизмом.

Условия, из которых следует неизоморфизм оператора T , можно сформулировать в терминах «малости» образа этого оператора.

Самое сильное условие малости образа оператора — конечномерность образа этого оператора.

Теорема 1.1. Пусть пространство Фреше X бесконечномерно и произвольный линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ имеет конечномерный образ. Тогда пространства X и Y не изоморфны.

Доказательство этого утверждения основано на том, что при сделанных предположениях X или Y конечномерно.

Более сильное условие неизоморфности формулируется в терминах компактных операторов: линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ называют компактным, если в X существует окрестность нуля U такая, что её образ TU будет относительно компактным подмножеством в Y .

Определение 1.1 (Захарюта В. П. [23]). Пространства Фреше X, Y называют сильно различными (и пишут $(X, Y) \in R$), если любой линейный непрерывный оператор $T: X \rightarrow Y$ компактен.

Теорема 1.2. Сильно различные бесконечномерные пространства Фреше не изоморфны.

1.4. Таким образом, доказательство неизоморфности пространств X и Y сводится к нахождению условий сильного различия этих пространств. Один из вариантов этих условий был получен В. П. Захарютой [23] для пространств Кёте и были сформулированы в терминах инвариантных классов (d_1) и (d_2) .

Бесконечную матрицу $A = (a_{p,n})_{p,n=1}^{+\infty}$ называют матрицей Кёте, если выполняются следующие условия: $0 < a_{p,n} \leq a_{p+1,n}$ для произвольных натуральных чисел p и n . Пространством Кёте называют векторное пространство

$$K(A) := \left\{ x = (x_n) \in \omega : \forall p \|x\|_p := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| a_{p,n} < +\infty \right\}.$$

Набор норм $(\|\cdot\|_p)$ задаёт в X топологию пространства Фреше.

Пусть $K(A)$ — пространство Кёте. Говорят, что пространство $K(A)$ имеет тип (d_1) и пишут $K(A) \in (d_1)$, если

$$\exists p_0 \forall p \forall \tau \in (0, 1) \exists p_1 : \exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} a_{p,n} \leq C a_{p_0,n}^{\tau} a_{p_1,n}^{1-\tau}.$$

Говорят, что пространство $K(A)$ имеет тип (d_2) и пишут $K(A) \in (d_2)$, если

$$\forall q_0 \forall \tau \in (0, 1) \exists q \forall q_1 : \exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} a_{q,n} \geq C^{-1} a_{q_0,n}^{1-\tau} a_{q_1,n}^{\tau}.$$

Классы пространств (d_j) в терминах поперечников Колмогорова были определены М. М. Драгилевым [2]. Приведённые выше условия (без дополнительных ограничений на пространства) содержатся в работе В. П. Захарюты [23].

Теорема 1.3 (Захарюта В. П. [3, теорема 2], [23]). *Пусть выполняются следующие условия:*

- (1) $X \cong K(A)$, $Y \cong K(B)$;
- (2) X — монтелевское пространство;
- (3) $K(A) \in (d_2)$, $K(B) \in (d_1)$.

Тогда пространства X и Y сильно различны. В частности, эти пространства не изоморфны.

Пример 1.1. Пусть $0 < r \leq +\infty$. Через A_r обозначают пространство функций, аналитических в круге $|z| < r$. Топология пространства Фреше в этом пространстве определяется как топология равномерной сходимости на компактных подмножествах в круге $|z| < r$. Пространства A_r не являются пространствами Кёте, но в них есть абсолютный базис и поэтому они изоморфны подходящим пространствам Кёте. Известно, что

- (1) A_1 изоморфно пространству Кёте из (d_2) ,
- (2) A_∞ изоморфно пространству Кёте из (d_1) ,
- (3) A_∞ — монтелевское пространство.

Неизоморфность пространств A_1 и A_∞ есть следствие перечисленных свойств и теоремы 1.3.

Рассматриваемые в примере пространства интересны тем, что их можно рассматривать в качестве контрпримера к следующей гипотезе: если пространства X , Y таковы, что $(X, Y) \in R$, следует ли отсюда, что $(Y, X) \in R$? Для доказательства того, что $(Y, X) \notin R$ достаточно заметить, что A_∞ изоморфно подпространству в A_1 (см. [18, лемма 2.1]).

1.5. Обобщение теоремы 1.3 можно разбить на следующие, частично связанные, темы:

- (А) рассматриваемые условия неизоморфности пространств должны быть безбазисными;
- (В) требование сильного различия пространств должно быть ослаблено, возможность этого ослабления была изначально заложена в доказательстве теоремы 1.3.

Эта программа была частично реализована в предлагаемой статье:

- (В) вместо компактных операторов рассматриваются операторы, которые в работах Д. Фогта были названы ограниченными операторами (по терминологии Д. Фогта — bounded map);
- (А) вместо классов (d_j) рассматриваются классы пространств (D_j) , которые изначально имели безбазисное определение;
- (С) на основе полученных в статье результатов (теорема 3.2) было доказано утверждение о неизоморфности весовых пространств непрерывных функций специального вида (теорема 4.4).

2. Инвариантные классы.

2.1. Пусть X — пространство Фреше, $(\|\cdot\|_p)$ — монотонный набор норм, определяющий топологию в X . Говорят, что это пространство имеет тип $(D_1) = (DN)$ и пишут $X \in (D_1) = (DN)$, если

$$\exists p_0 \forall p \forall \tau \in (0, 1) \exists p_1 : \exists C > 0 \forall x \in X \|x\|_p \leq C \|x\|_{p_0}^\tau \|x\|_{p_1}^{1-\tau}. \quad (1)$$

Говорят, что это пространство имеет тип $(D_2) = (\overline{\Omega})$ и пишут $X \in (D_2) = (\overline{\Omega})$, если

$$\forall q_0 \forall \tau \in (0, 1) \exists q \forall q_1 : \exists C > 0 \forall n \|x'\|_p' \leq C (\|x'\|_{p_0}'^{1-\tau} (\|x'\|_{p_1}'^\tau). \quad (2)$$

Здесь $\|x'\|_s := \sup\{|x'(x)| : x \in X, \|x\|_s \leq 1\}$.

Эти классы были определены в [6, 19, 22].

В работах В. П. Захарюты в терминах инвариантных классов была построена частичная изоморфная классификация пространств аналитических и пространств Кёте специального вида — степенных пространств Кёте первого и второго рода. Д. Фогт, М.-Й. Вагнер в терминах этих классов дали характеристику подпространств и факторпространств в пространствах степенных рядов конечного и бесконечного типа. Основное отличие в подходах этих авторов заключается

в том, что В. П. Захарюта определил классы пространств (D_j) в терминах комплексных интерполяционных шкал. Непосредственно проверяется, что для пространства Кёте $K(A)$ утверждения $K(A) \in (d_j)$ и $K(A) \in (D_j)$ равносильны.

2.2. Пусть X — пространство Фреше и (U_p) — базис окрестностей нуля в X . Всегда можно считать, что $U_p \supset U_{p+1}$ для произвольного p .

Теорема 2.1. *Принадлежность пространства X классу (D_1) равносильна каждому из следующих условий:*

$$\exists p_0 \forall p \forall d > 0 \exists p_1 \exists C > 0 : \forall x \in X \forall t > 0 \|x\|_p \leq t^d \|x\|_{p_0} + \frac{C}{t} \|x\|_{p_1}, \quad (3)$$

$$\exists p_0 \forall p \forall d > 0 \exists p_1 \exists C > 0 : \forall t > 0 U_p^\circ \subset t^d U_{p_0}^\circ + \frac{C}{t} U_{p_1}^\circ, \quad (4)$$

Теорема 2.2. *Принадлежность пространства X классу (D_2) равносильна каждому из следующих условий:*

$$\forall p_0 \forall d > 0 \exists p \forall p_1 \exists C > 0 : \forall x' \in X' \forall t > 0 \|x'\|'_p \leq t^d \|x'\|'_{p_0} + \frac{C}{t} \|x'\|'_{p_1}, \quad (5)$$

$$\forall p_0 \forall d > 0 \exists p \forall p_1 \exists C > 0 : \forall t > 0 U_p \leq t^d U_{p_0} + \frac{C}{t} U_{p_1}, \quad (6)$$

Здесь $(\|\cdot\|'_p)$ — набор сопряжённых норм в X' :

$$\|x'\|'_p := \sup\{x'(x) : \|x\|_p \leq 1\}.$$

2.3. Пусть X — пространство Фреше, (X_p) — проективный спектр банаховых пространств, определяющих это пространство, $\|\cdot\|_p$ — норма в X_p . Покажем, что свойство пространства Фреше принадлежать инвариантным классам (D_j) можно рассматривать как внутреннее интерполяционное свойство рассматриваемого пространства, которое формулируются в терминах метода вещественной интерполяции.

В теоремах 2.3–2.4 используются следующая интерпретация семейств, сопряжённых к интерполяционным семействам банаховых пространств [15]. Пусть даны банаховы пространства $E_0, E_1, \dots$ и банахово пространство E , непрерывно и плотно вкладываются во все пространства E_j . Это замечание позволяет отождествлять пространство E_j с пространством $E_j^\sharp$:

$$E_j^\sharp := \left\{ x' \in E' : |x|_E^\sharp := \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{|x'(x)|}{|x|_E} < +\infty \right\},$$

наделённого нормой $|\cdot|_E^\sharp$. При таком отождествлении семейство $E_0^\sharp, E_1^\sharp, \dots$ непрерывно вкладываются в одно и то же отделимое локально выпуклое пространство E' . Тогда произвольный функционал $x' \in E_j^\sharp$ однозначно определяется своим сужением на E . В частности, полярной B° подмножества B в E_j называют подмножество в $E_j^\sharp$ вида

$$B^\circ := \{y' \in E' : \forall y \in B |y'(e)| \leq 1\}.$$

В теоремах 2.3–2.5 предполагается, что даны такие банаховы пространства X_0, X, X_1 и векторное пространство E , что

- (1) $X_1 \subset X \subset X_0$ с плотными операторами вложения;
- (2) E всюду плотно во всех пространствах X_0, X, X_1 ;
- (3) $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ — нормы соответственно в X_0, X, X_1 ;
- (4) V_0, V, V_1 — единичные шары соответственно в X_0, X, X_1 ;
- (5) $U_0 := V_0 \cap E, U := V \cap E, U_1 := V_1 \cap E$ — единичные шары соответственно в $(E, \|\cdot\|_0), (E, \|\cdot\|), (E, \|\cdot\|_1)$.

Теорема 2.3. *Следующие условия эквивалентны:*

- (1) $\exists \tau \in (0, 1) \exists C > 0 \forall x \in X_1 \|x\| \leq C \|x\|_0^{1-\tau} \|x\|_1^\tau$;

$$(2) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \exists C > 0 \forall t > 0 \forall x \in X_1 \|x\| \leq t^d \|x\|_0 + \frac{C}{t} \|x\|_1;$$

$$(3) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \exists C > 0 \forall t > 0 U^\circ \subset t^d U_0^\circ + \frac{C}{t} U_1^\circ;$$

$$(4) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \forall p \in [1, +\infty) X \supset (X_0, X_1)_{\tau, p}.$$

В условии (3) предполагается, что B° — поляр подмножества B .

Доказательство. Эквивалентность условий (1)–(3) (и равенство $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$) доказывается по схеме, разработанной в работах Д. Фогта [19]. Импликация (4) $\Rightarrow$ (1) следует из [9, теорема 1.3.3].

Предположим, что условие (3) выполняется при $\tau = \tau_0 = \frac{1}{1+d_0}$. После подстановки $t = s^{d_0+1}$ условие (3) преобразуется к следующему виду:

$$\forall s > 0 U^\circ \subset s^{\tau_0} U_0^\circ + \frac{C}{s^{1-\tau_0}} U_1^\circ. \quad (7)$$

Фиксируем произвольное $s > 0$. Из (7) следует, что для произвольного $x' \in U^\circ$ существует разложение

$$x' = s^{\tau_0} x'_0 + \frac{C}{s^{1-\tau_0}} x'_1,$$

в котором $x'_j \in U_j^\circ$, $j = 0, 1$. Из определения K -функционала следует, что

$$K(x', s) \leq s^{\tau_0} \|x'_0\|'_0 + Cs \cdot s^{-(1-\tau_0)} \|x'_1\|'_1 \leq C_1 s^{\tau_0}. \quad (8)$$

При $s \in (0, 1]$ условие (8) можно уточнить. Для этого фиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, (1 - \tau_0)/2)$. Существует число $C_2 > 0$ такое, что

$$U^\circ \subset C_2 U_1^\circ \subset C_2 s^{2\varepsilon - (1-\tau_0)} U_1^\circ,$$

$s \in (0, 1]$. Из доказанного включения следует, что для произвольного $x' \in U^\circ$ существует $x'_1 \in U_1^\circ$ такое, что

$$K(x', s) \leq s \cdot C_2 s^{2\varepsilon - (1-\tau_0)} \|x'_1\|'_1 = C_2 s^{\tau_0 + 2\varepsilon}. \quad (9)$$

Но тогда для произвольных $q \in (1, +\infty)$ и $x' \in U^\circ$ верна цепочка неравенств

$$\|x'\|(X_0^\sharp, X_1^\sharp)_{\tau, q}\|^q = \int_0^1 [s^{-\tau_0} K(x', s)]^q \frac{ds}{s} + \int_1^{+\infty} [s^{-\tau_0} K(x', s)]^q \frac{ds}{s} \leq \int_0^1 s^{\varepsilon q} \frac{ds}{s} + \int_1^{+\infty} s^{-\varepsilon q} \frac{ds}{s} := C_4 < +\infty.$$

Если же $q = \infty$, то

$$\|x'\|(X_0^\sharp, X_1^\sharp)_{\tau, \infty}\| = \sup_{s > 0} s^{-\tau_0} K(x', s) \leq \max\left\{ \sup_{s \in (0, 1]} s^\varepsilon, \sup_{s > 1] } s^{-\varepsilon} \right\} := C_5 < +\infty.$$

Из полученных неравенств следует, что

$$\|x'\|(X_0, X_1)_{\tau, p}^\sharp \stackrel{(*)}{\leq} C_6 \|x'\|(X_0^\sharp, X_1^\sharp)_{\tau, p} \leq \|x'\|' \quad (10)$$

для произвольного $x' \in X'$. Неравенство $(*)$ есть следствие теоремы двойственности для вещественного метода интерполяции [9, 1.11.2]. Возможность применения этого утверждения следует из того, что по условию X_1 плотно вкладывается в X_0 .

Из (10) следует, что $X' \subset (X_0, X_1)_{\tau, p}^\sharp$. Искомое утверждение следует из леммы 2.1. $\square$

Лемма 2.1. Пусть даны банаховы пространства E_0, E_1 , промежуточные между X_0 и X_1 , причём $X_1 \subset E_j$ с плотным образом оператора вложения. Тогда следующие условия (а) и (б) равносильны (операторы вложения в этих условиях имеют всюду плотный образ):

$$(a) E_1 \subset E_0;$$

$$(b) E_0^\sharp \subset E_1^\sharp.$$

Теорема 2.4. Следующие условия эквивалентны:

$$(1) \exists \tau \in (0, 1) \exists C > 0 \forall x \in X'_0 \|x'\|' \leq C (\|x'\|'_0)^{1-\tau} (\|x'\|'_1)^\tau;$$

$$(2) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \exists C > 0 \forall t > 0 \forall x' \in X'_0 \|x\|' \leq t^d \|x'\|'_1 + \frac{C}{t} \|x'\|'_0;$$

$$(3) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \exists C > 0 \forall t > 0 U \subset t^d U_1 + \frac{C}{t} U_0;$$

$$(4) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \forall p \in [1, +\infty) X \subset (X_1, X_0)_{\tau, p}.$$

Если τ_j — наилучшее значение числа τ в условии j , то $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.4, в доказательстве нуждается только эквивалентность условий (3) и (4).

Докажем импликацию (4) $\Rightarrow$ (1). Для этого перейдём в условии (4) к сопряжённым пространствам:

$$(X_1^\sharp, X_0^\sharp)_{\tau, q} = (X_1, X_0)_{\tau, q}^\sharp \subset X^\sharp, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Тогда условие (1) (и равносильное ему условие (3)) есть следствие [9, теорема 1.3.3].

Доказательство импликации (3) $\Rightarrow$ (4) дословно повторяет доказательство импликации (3) $\Rightarrow$ (4) из теоремы 2.3. $\square$

В теоремах 2.3 и 2.4 условия (4) формулируются в терминах пространств $(E_0, E_1)_{\tau, p}$ с конечным p . Ограничение обусловлено использованием теорем действенности и плотности для метода вещественной интерполяции.

Для произвольной интерполяционной пары банаховых пространств $[E_0, E_1]$ обозначим через $(E_0, E_1)_{\tau, \infty}^\circ$ замыкание $E_0 \cap E_1$ в топологии пространства $(E_0, E_1)_{\tau, \infty}$.

Теорема 2.5. *Справедливы импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3), где*

$$(1) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) X \supset (X_0, X_1)_{\tau, \infty}.$$

$$(2) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \exists C > 0 \forall t > 0 U^\circ \subset t^d U_0^\circ + \frac{C}{t} U_1^\circ;$$

$$(3) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) X \supset (X_0, X_1)_{\tau, \infty}^\circ.$$

и импликации (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6), где

$$(4) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) X \subset (X_1, X_0)_{\tau, \infty}^\circ,$$

$$(5) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \exists C > 0 \forall t > 0 U \subset t^d U_1 + \frac{C}{t} U_0;$$

$$(6) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) X \subset (X_1, X_0)_{\tau, \infty}.$$

3. Ограниченные операторы.

3.1. Возможность обобщения теоремы 1.3 изначально содержалась в доказательстве этого утверждения. Заметим, что условие монтелевости пространства $K(B)$ применялось только на последнем этапе доказательства, на котором из ограниченности подмножества в пространстве $K(B)$ выводилась относительно компактность этого множества. Это замечание приводит к следующему определению:

Определение 3.1 (см. [20], [16, с. 375]). Линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ называют ограниченным (по терминологии авторов — bounded map), если существует окрестность нуля U в X такая, что множество TU ограничено в Y .

Тогда верно следующее утверждение.

Теорема 3.1 (см. [23]). Пусть выполняются следующие условия:

$$(1) X \cong K(A), Y \cong K(B);$$

$$(2) K(A) \in (d_2), K(B) \in (d_1).$$

Тогда любой непрерывный линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ ограничен. Если, кроме того, эти пространства не нормируемые, то они не изоморфны.

Следует отметить, что свойство линейного оператора $T: X \rightarrow Y$ быть ограниченным нетривиально только для ненормируемых пространств X, Y .

Теорема 3.2 (см. [10]). Пусть X, Y — пространства Фреше и $X \in (D_2)$, $X \in (D_1)$. Тогда любой непрерывный линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ ограничен. Если, кроме того, эти пространства не нормируемые, то они не изоморфны.

Доказательство. Пусть выполняются все условия теоремы. Тогда из определения классов (D_j) и теорем 2.3 и 2.4 следует, что:

$$\exists p_0 \forall q_0 \exists q = q(q_0) > q_0 \forall p > p_0 \exists p_1 = p_1(p) > p \forall q_1 > q$$

$$\|x\|_{2,p} \leq C_1 \|y\|_{(Y_{1,p_1}, Y_{1,p_0})_{1/3,2}} = C_1 \|y\|_{(Y_{1,p_0}, Y_{1,p_1})_{2/3,2}}, \quad (11)$$

$$\|x\|_{(X_{1,p_0}, X_{1,p_1})_{2/3,2}} \leq C_2 \|x\|_{0,p},$$

$$\|Tx|Y\|_{p_j} \leq \|x|X\|_{q_j} \quad (12)$$

для произвольных $x \in X$, $y \in Y$. Фиксируем индексы p_0, p, q_0 так, чтобы выполнялись условия (11), (12). При этом всегда можно считать, что $p_0 < q_0$, $p_1 < q_1$. Таким образом, индекс q зависит только от q_0 , который зависит только от p_0 .

Но тогда для произвольного $x \in X_0$ выполняется неравенство

$$\|Tx|Y\|_{2,p} \leq C_1 \|Tx\|_{(Y_{1,p_1}, Y_{1,p_0})_{1/3,2}} \leq C_1 \|x\|_{(X_{1,q_0}, X_{1,q_1})_{2/3,2}} \leq C_1 C_2 \|x|X\|_{0,q}.$$

Из сделанных предположений относительно индексов норм p_0, p, p_1 и q_0, q, q_1 и предыдущего неравенства следует ограниченность оператора T . Теорема доказана. $\square$

4. Весовые пространства непрерывных функций.

4.1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — область (т.е. открытое и связное множество). Функцию $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *весовой* (точнее *вещественной весовой функцией*, другие варианты определения весовой функции в пространствах непрерывных функций см. в [1, 13, 14], если она непрерывна. Из определения весовой функции следует, что

$$\forall x \in D \exists R = R_F(x) > 0 : \forall y \in D, \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} < R \implies |F(x) - F(y)| < 1 \quad (13)$$

для произвольной функции $F \in \mathcal{C}$. Всюду L с различными добавочными индексами — числа, не зависящие от функции f .

Если F — весовая функция, то через $C(D, F)$ обозначим множество всех непрерывных функций $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, для которых конечна норма

$$\|f\|_F := \sup_{x \in D} |f(x)| e^{-F(x)}.$$

Лемма 4.1. При сделанных предположениях $C(D, F)$ — банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|_F$.

Через $C_0(D, F)$ обозначим множество всех $f \in C(D, F)$, для которых $|f(x)| = O(e^{F(x)})$ при $x \rightarrow \partial D$. Другими словами, $f \in C_0(D, F)$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \Subset D : |f(x)| \leq \varepsilon e^{F(x)} \quad \forall x \in D \setminus K.$$

По построению, $C_0(D, F)$ есть замкнутое подпространство в $C(D, F)$. Необходимость рассмотрения пространств $C_0(D, F)$ обусловлена следующими утверждениями.

Лемма 4.2. Множество непрерывных функций $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем всюду плотно в $C_0(D, F)$.

Как обычно, носителем $\text{supp}(f)$ непрерывной функции f называют замыкание подмножества в D , на котором функция не обращается в ноль.

Лемма 4.3. Следующие условия равносильны для любых весовых функций $G_0 \in \mathcal{C}_D$, $G_1 \in \mathcal{C}_D$:

(1) $\exists R > 0 : \forall x \in D \ G_1(x) \leq G_0(x) + R$;

- (2) $C(D, G_1) \subset C(D, G_0)$;
- (3) $C_0(D, G_1) \subset C_0(D, G_0)$.

Лемма 4.4. Пусть F_0, F_1 — такие весовые функции в области D , что $F_1(x) < F_0(x)$ в D и $F_1(x) - F_0(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow \partial D$. Тогда $C_0(D, F_1)$ есть всюду плотное векторное подпространство в $C_0(D, F_0)$.

4.2. Пусть $\mathcal{F} = (F_p)$ — семейство вещественных весовых функций в области D . Будем называть это семейство весовым (точнее, вещественным весовым семейством), если

- (1) $F_{p+1}(x) \leq F_p(x)$ для всех $x \in D$;
- (2) $F_p(x) - F_{p+1}(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow \partial D$

для произвольного p . Множество всех вещественных весовых семейств обозначим через $(\mathcal{C}_D)$.

Если $\mathcal{F} = (F_p) \in (\mathcal{C}_D)$, то $C(D, \mathcal{F})$ — множество всех непрерывных функций $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, для которых конечны все нормы $\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{F_p}$.

Лемма 4.5. При сделанных предположениях $C(D, \mathcal{F})$ — пространство Фреше, топология в котором определяется набором норм $(\|\cdot\|_p)$. Кроме того, пополнение $C(D, \mathcal{F})$ по норме $\|\cdot\|_p$ совпадает с $C_0(D, F_p)$.

4.3. Изоморфная классификация пространств аналитических функций, построенная В. П. Захарютой (см. [3, 4, 6]), существенно опирается на изучение интерполяционных свойств пространств этого типа. В свою очередь, интерполяционные свойства пространств аналитических функций есть следствие теоремы о шкале пространств аналитических функций и аналитических функционалов (см. [5]).

Если опустить некоторые технические детали, то теорему В. П. Захарюты о шкалах можно сформулировать следующим образом: пусть даны область $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ и компакт $K \Subset \Omega$. При выполнении ряда дополнительных условий найдутся такие плюрисубгармоническая функция $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ и сепарабельные гильбертовы пространства H_0, H_1 , что $A(\overline{D}) \subset H_1 \subset A(D) \subset A(K) \subset H_0 \subset AC(K)$. Тогда

$$A(K_\alpha) \subset (H_0)^{1-\alpha}(H_1)^\alpha \subset A(D_\alpha) \quad (14)$$

для произвольного $\alpha \in (0, 1)$. В (14) используются следующие обозначения:

- (1) $D_\alpha := \{z \in D : u(z) < \alpha\}$;
- (2) $A(\Omega)$ — пространство функций, аналитических в области Ω , наделённое топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах в Ω ;
- (3) $K_\alpha := \{z \in D : u(z) \leq \alpha\}$;
- (4) если $K \Subset \Omega$, то $A(K)$ состоит из функций, аналитических на множестве K ;
- (5) $[(H_0)^{1-\alpha}(H_1)^\alpha]$ — комплексная шкала, построенная по пространствам H_0 и H_1 .

В статье доказывается аналог теоремы В. П. Захарюты о шкале, в котором рассматриваются семейства весовых банаховых пространств непрерывных функций. Основное отличие заключается в том, что вместо метода комплексных шкал применяется метод вещественной интерполяции.

Теорема 4.1. Пусть F_0, F_1 — весовые функции в области D такие, что $F_1(x) < F_0(x)$ для произвольного $x \in D$. Положим $F_\tau := (1 - \tau)F_0 + \tau F_1$. Тогда

$$C(D, F_{\tau+\varepsilon}) \subset (C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty} \subset C(D, F_\tau) \quad (15)$$

для любого $\tau \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, 1 - \tau)$.

Доказательство теоремы 4.1 разбивается на две части — более простую (лемма 4.6) и более сложную (лемма 4.7). Возможность доказательства теоремы 4.1 связана с тем, что пространства $C(D, F_0)$ и $C(D, F_1)$ имеют много общих бесконечномерных пространств.

Лемма 4.6. Пусть F_0, F_1 — весовые функции в области D такие, что $F_1(x) < F_0(x)$ для произвольного $x \in D$. Тогда

$$(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty} \subset C(D, F_\tau) \quad (16)$$

для любого $\tau \in (0, 1)$.

Доказательство. Для доказательства непрерывности вложения (16) фиксируем произвольную ненулевую функцию f , принадлежащую левой части условия (16). Из определения K -функционала следует, что для произвольного положительного t существование разложения $f = f_0 + f_1$ такое, что $f_j \in C(D, F_j)$, $j = 0, 1$ и $K(f, t) \leq \|f_0\|_{F_0} + t\|f_1\|_{F_1} \leq 2K(f, t)$. Но тогда для любого $x \in D$ такого, что $f(x) \neq 0$, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} 2K(f, t) &\geq \|f_0\|_{F_0} + t\|f_1\|_{F_1} \geq |f_0(x)|e^{-F_0(x)} + t|f_1(x)|e^{-F_1(x)} = \\ &= (|f_0(x)| + |f_1(x)|) \left(\frac{|f_0(x)|}{|f_0(x)| + |f_1(x)|} e^{-F_0(x)} + t \frac{|f_1(x)|}{|f_0(x)| + |f_1(x)|} e^{-F_1(x)} \right) \geq \\ &\geq |f(x)| \inf_{\tau \in [0, 1]} ((1 - \tau)e^{-F_0(x)} + \tau te^{-F_1(x)}) = |f(x)| \min\{e^{-F_0(x)}, te^{-F_1(x)}\}. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что $2K(f, t) \geq |f(x)| \min\{e^{-F_0(x)}, te^{-F_1(x)}\}$ для произвольной функции $f \in (C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}$. Но тогда

$$\|f|(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}\| \geq \frac{1}{2} \sup_{t > 0} \left[t^{-\tau} |f(x)| \min\{e^{-F_0(x)}, te^{-F_1(x)}\} \right] = \frac{1}{2} |f(x)| e^{-F_\tau(x)}.$$

Если в полученном неравенстве перейти к точной по всем $x \in D$, то получается неравенство

$$\|f\|_{F_\tau} = \sup_{x \in D} |f(x)| e^{-F_\tau(x)} \leq 2\|f|(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}\|,$$

из которого следует, что $f \in C(D, F_\tau)$. Но тогда $(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}$ непрерывно вкладывается в $C(D, F_\tau)$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.7. Пусть F_0, F_1 — весовые функции в области D — удовлетворяют условиям теоремы 4.1. Тогда

$$C(D, F_{\tau+\varepsilon}) \subset (C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}$$

для любого $\tau \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, 1 - \tau)$.

Доказательство. Для произвольной ненулевой функции $f \in C(D, F_1)$ положим

$$\Phi(f) = \Phi(f; F_0, F_1) := \inf_{x \in D, f(x) \neq 0} \max_{j=0,1} \frac{\|f\|_{F_j}}{|f(x)| e^{-F_j(x)}}.$$

Из определения функционала $\Phi(\cdot)$ и метода вещественной интерполяции следует, что

$$\forall f \in C(D, F_1) \quad \|f|(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}\| \leq 2\Phi(f)\|f\|_\tau,$$

где $\text{supp}(f)$ — носитель функции f (т.е. замыкание в $\mathbb{R}^n$ множества всех $x \in D$, где $f(x) \neq 0$).

Фиксируем произвольные $\tau \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, 1 - \tau)$. Предположим, что для произвольной ненулевой функции $f \in C(D, F_{\tau+\varepsilon})$ найдено такое разложение $f = \sum_{s=0}^{+\infty} f_s$, что

- (a) $f_s \in C(D, F_1)$;
- (b) числовая последовательность $(\Phi(f_s))$ ограничена;
- (c) существует число L_1 такое, что

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\|f_s\|_\tau}{\|f_s\|_{\tau+\varepsilon}} \leq L_1;$$

- (d) $\|f_s\|_{\tau+\varepsilon} \leq \|f\|_{\tau+\varepsilon}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \|f|(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}\| &\leq \sum_{s=0}^{+\infty} \|f_s|(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}\| \leq \\ &\leq 2 \sum_{s=0}^{+\infty} \Phi(f_s) \|f_s\|_\tau \leq L_2 \sum_{s=0}^{+\infty} \|f_s\|_{\tau+\varepsilon} \frac{\|f_s\|_\tau}{\|f_s\|_{\tau+\varepsilon}} \leq L_3 \|f\|_{\tau+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Докажем, что для произвольной ненулевой функции $f \in C(D, F_{\tau+\varepsilon})$ найдётся разложение, удовлетворяющее условиям (а)–(d). Пусть $(\lambda_s)_{s \geq 0}$ — такая числовая последовательность, что $\lambda_0 = 1$, $\lambda_s \downarrow 0$ и $\lambda_{s+1} \asymp \lambda_s$ при $s \uparrow +\infty$, $\sum_{s=0}^{+\infty} \lambda_s^\varepsilon < +\infty$ для произвольного $\varepsilon > 0$.

Положим $K_s := \{x \in D : \ln(\lambda_{s+1}) < F_1(x) - F_0(x) \leq \ln(\lambda_s)\}$, $s \geq 0$. По построению множества K_s попарно не пересекаются и $\bigcup_{s \geq 0} K_s = D$. Из свойств последовательности (λ_s) следует существование такого числа $L_4 > 0$, что

$$\ln \frac{\lambda_s}{L_4} \leq F_1(x) - F_0(x) \leq \ln(L_4 \lambda_s)$$

для произвольных $s \geq 0$ и $x \in \Omega_s := \bigcup_{x \in K_s} B(x, R(x))$, где $R(x) := \min\{R_{F_0}(x), R_{F_1}(x)\} > 0$,

$B(x, r)$ — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x радиуса r , отображение $x \mapsto R_F(x)$ определяется условием (13) по весовой функции F . Существуют такие последовательность (x_k) точек из D и семейство множеств $(N_s)_{s \geq 0}$, что

- (е) множества N_s попарно не пересекаются и $\bigcup_{s \geq 0} N_s = \mathbb{N}$;
- (f) семейство $\{B(x_k, R(x_k))\}$ образует локально конечное открытое покрытие области D (т.е. каждая точка $x \in D$ содержится в конечном множестве шаров $B(x_k, R(x_k))$);
- (g) $x_k \in K_s$, $k \in N_s$.

По семейству шаров строится такое семейство гладких функций (ψ_k) , что

- (h) $0 \leq \psi_k(x) \leq 1$ в D ;
- (i) $\text{supp}(\psi_k(x)) \subset B(x_k, R(x_k))$;
- (j) $\sum_k \psi_k(x) \equiv 1$ в D .

Наконец, положим $\Psi_s := \sum_{k \in N_s} \psi_k$. По построению $\Psi_s(x) \geq 0$, $\text{supp}(\Psi_s) \subset \Omega_s$, $\sum_{s \geq 0} \Psi_s \equiv 1$ в D .

Из условий (h)–(j) следует, что разложение $f = \sum_{s \geq 0} f \Psi_s$ удовлетворяет условиям (а)–(d).

Таким образом, доказано существование такого числа $L > 0$, зависящего только от $\tau \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, 1 - \tau)$, что $\|f\|(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty} \leq L\|f\|_{\tau+\varepsilon}$ для произвольной функции $f \in C(D, F_{\tau+\varepsilon})$. Но тогда $C(D, F_{\tau+\varepsilon})$ непрерывно вкладывается в $(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}$. Лемма доказана. $\square$

Теорема 4.2. Пусть F_0, F_1 — такие весовые функции в области D , что $F_1(x) < F_0(x)$ для произвольного $x \in D$ и $F_0(x) - F_1(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \partial D$. Тогда

$$C_0(D, F_{\tau+\varepsilon}) \subset (C_0(D, F_0), C_0(D, F_1))_{\tau, \infty}^\circ \subset (C_0(D, F_0), C_0(D, F_1))_{\tau, \infty} \subset C_0(D, F_{\tau-\varepsilon}) \quad (17)$$

для любого $\tau \in (0, 1)$ и $0 < \varepsilon < \min(\tau, 1 - \tau)$.

4.4. Условие принадлежности пространства $C(D, \mathcal{F})$ классам (D_1) и (D_2) можно сформулировать непосредственно в терминах весового семейства $\mathcal{F}$.

Теорема 4.3. Пусть $\mathcal{F} = (F_p)$ — весовое семейство функций. Тогда следующие условия (1)–(2), (3)–(4) попарно эквивалентны:

- (1) $C(D, \mathcal{F}) \in (D_1)$;
- (2) $\exists p_0 \forall p \forall \tau \in (0, 1) \exists p_1 \forall y \in D F_p(y) \geq -C + (1 - \tau)F_{p_0}(y) + \tau F_{p_1}(y)$;
- (3) $C(D, \mathcal{F}) \in (D_2)$;
- (4) $\forall p_0 \forall \tau \in (0, 1) \exists p \forall p_1 \forall y \in D F_p(y) \leq C + \tau F_{p_0}(y) + (1 - \tau)F_{p_1}(y)$.

Доказательство. Доказательство эквивалентности условий (1)–(2) есть следствие локализуемости свойств непрерывных функций и не нуждается в применении теоремы 4.2.

Пусть $C(D, \mathcal{F}) \in (D_1)$, т.е.

$$\exists p_0 \forall p \exists \tau \in (0, 1) \exists p_1 C_0(D, F_p) \supset (C_0(D, F_{p_0}), C_0(D, F_{p_1}))_{\tau, \infty}^\circ \quad (18)$$

Условие (18) есть следствие определения класса (D_2) , теоремы 2.5. Из теоремы 4.2 и (18) следует, что

$$C_0(D, F_p) \supset (C_0(D, F_{p_0}), C_0(D, F_{p_1}))_{\tau, \infty}^\circ \supset C_0(D, (1 - \tau')F_{p_0} + \tau'F_{p_1}), \quad \tau' = \tau + \varepsilon$$

для произвольного $\varepsilon \in (0, 1 - \tau)$. Но тогда из леммы 4.3 следует условие (6). Обратно, из условия (2) и теоремы 4.2 следует, что

$$\exists p_0 \forall p \exists p_1 \exists \tau \in (0, 1) \quad C_0(D, F_p) \supset C_0(D, (1 - \tau)F_{p_0} + \tau F_{p_1}) \supset (C_0(D, F_{p_0}), C_0(D, F_{p_1}))_{\tau, \infty}.$$

Но тогда условие (1) есть следствие теоремы 2.5. $\square$

4.5. Пусть

- (1) $a: D \rightarrow \mathbb{R}$ — такая непрерывная функция, что $a(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow \partial D$;
- (2) $-\infty \leq \delta < +\infty$,
- (3) (δ_p) , $\delta_{p+1} < \delta_p$ для произвольного p .

Семейство функций $\mathcal{F} = (\delta_p a)$ будет весовым. Положим $C_\delta(D, a) = C(D, \mathcal{F})$. Пространство $C_\delta(D, a)$ не зависит от выбора последовательности (δ_p) .

Теорема 4.4. При сделанных предположениях $C_\infty(D, a) \in (D_1)$, $C_0(D, a) \in (D_2)$.

Теорема 4.5. При сделанных предположениях справедливы следующие утверждения:

- (1) пространства $C_\delta(D, a)$ и $C_0(D, a)$ изоморфны для произвольного конечного δ ;
- (2) произвольный линейный непрерывный оператор $T: C_0(D, a) \rightarrow C_{-\infty}(D, a)$ ограничен;
- (3) пространства $C_{-\infty}(D, a)$ и $C_0(D, a)$ всегда не изоморфны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абанин А. В. Весовые пространства непрерывных и голоморфных функций // Тр. Междунар. конф. «Математический анализ и математическое моделирование». — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2010. — С. 15–20.
2. Драгилев М. М. О правильных базисах в ядерных пространствах // Мат. сб. — 1965. — 68, № 3. — С. 153–173.
3. Захарюта В. П. Об изоморфизме декартовых произведений линейных топологических пространств // Функци. анализ. прилож. — 1970. — 4, № 2. — С. 87–89.
4. Захарюта В. П. Некоторые линейные топологические инварианты и изоморфизм тензорных произведений центров шкал // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естеств. наук. — 1974. — 4. — С. 62–64.
5. Захарюта В. П. Экстремальные плюрисубгармонические функции, гильбертовы шкалы и изоморфизм пространств аналитических функций многих переменных, // Теор. функций, функц. анализ. прилож. (Харьков). — 1974. — 19. — С. 133–157.
6. Захарюта В. П. Изоморфизмы пространств аналитических функций // Докл. АН СССР. — 1980. — 255, № 1. — С. 11–14.
7. Колмогоров А. Н. О линейной размерности топологических векторных пространств // Докл. АН СССР. — 1958. — 120, № 2. — С. 239–241.
8. Митягин Б. С. Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах // Stud. Math. — 1971. — 37. — С. 111–137.
9. Трибель Х. Теория интерполяции, Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
10. Шубарин М. А. Операторные идеалы, определяемые инвариантными классами пространств Фреше // Мат. форум (Итоги науки. Юг России). — 2013. — 8. — С. 100–112.
11. Bessaga C., Pelczynski A., Rolewicz S. On diametral approximative dimension und linear homogeneity of F-spaces // Bull. Acad. Pol. Sci. — 1961. — 9. — P. 677–683.
12. Bessaga C., Pelczynski A., Rolewicz S. Approximative dimension of liner topological spaces and some of its applications // Stud. Math., Ser. Spec. — 1963. — 1. — P. 26–29.
13. Bierstedt K. D., Bonet J. Weighted (LF)-spaces of continuous functions // Math. Nachr. — 1994. — 165. — P. 25–48.
14. Bierstedt K. D., Meise R., Summers V. H. A projective descriptions of weighted inductive limits // Trans. Am. Math. Soc.. — 272, № 1. — P. 107–160.

15. *Cwikel M.* Lecture notes on duality and interpolation spaces/ [arXiv:0803.3558v2 \[math.FA\]](#).
16. *Meise R., Vogt D.* Introduction to Functional Analysis. — Oxford: Clarendon Press, 1997.
17. *Pelczyński A.* On the approximation of S-spaces by finite dimension space// Bull. Acad. Pol. Sci. — 1957. — 5, № 9. — P. 879–881.
18. *Rolewicz S.* On spaces of holomorphic functions// Stud. Math. — 1962. — 21, № 2. — P. 135–160.
19. *Vogt D.* Charakterisierung der Unterräume von// Math. Z. — 1977. — 155. — P. 109–117.
20. *Vogt D.* Frecheträume, zwischen denen jede stetige linear Abbildung beschränkt ist// J. Reine Angew. Math. — 1983. — 345. — P. 182–200.
21. *Vogt D., Wagner M. J.* Charakterisierung der Unterräume und Quotientenräume der nuclearen stabilen Potenzreihenräumen von unendlichem Typ// Stud. Math. — 1981. — 70. — P. 63–80.
22. *Wagner M.-J.* Quotientenräume von stabilen Potenzreihenräumen endlichen Typs// Manuscr. Math. — 1980. — 31. — P. 97–109.
23. *Zachariuta V. P.* On isomorphism of Cartesian products of local convex spaces// Stud. Math. — 1973. — 46. — P. 201–221.
24. *Zachariuta V.* Linear topologic invariants and their applications to isomorphic classification of generalized power spaces// Tr. J. Math. — 1996. — 20. — P. 237–289.

Шубарин Михаил Александрович
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: mas102@mail.ru