Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Булатова, Нестационарный пограничный слой модифицированной вязкой жидкости, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 191, 10–15

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-191-10-15>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:29:04

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2021 г. Р. Р. БУЛАТОВА

Аннотация. Изучается система уравнений нестационарного симметричного пограничного слоя нелинейно вязкой несжимаемой жидкости. С помощью преобразования Крокко система пограничного слоя сводится к одному квазилинейному вырождающемуся параболическому уравнению. Доказана однозначная разрешимость основной краевой задачи.

Ключевые слова: пограничный слой, нестационарный поток, переменные Крокко, модифицированная жидкость Ладыженской.

UNSTEADY BOUNDARY LAYER OF A MODIFIED VISCOUS FLUID

© 2021 R. R. BULATOVA

ABSTRACT. In this paper, a system of equations for a nonstationary, symmetric boundary layer of a nonlinearly viscous, incompressible fluid is studied. By using the Crocco transformation, we reduce the boundary-layer system to a single quasilinear degenerate parabolic equation. The unique solvability of the main boundary-value problem is proved.

Keywords and phrases: boundary layer, unsteady flow, Crocco variables, modified Ladyzhenskaya fluid.

AMS Subject Classification: 34B15

1. Введение. Теория пограничного слоя, изучающая движение вязких сплошных сред в окрестности твердой поверхности, составляет один из важнейших разделов гидродинамики. Её основателем является Л. Прандтль, предложивший для описания динамики маловязкой жидкости вблизи обтекаемой твердой поверхности систему уравнений, которая при определенных предположениях выводится из системы Навье—Стокса и является ее упрощением. На основе аксиом Прандтля для неньютоновских жидкостей можно также вывести систему уравнений, обобщающую классическую систему пограничного слоя, которая применяется для описания движения вязких сред со сложной реологией. О корректной разрешимости основных краевых и начально-краевых задач для системы уравнений Прандтля (см. [2]).

Позже О. А. Ладыженская предложила некоторую модификацию системы уравнений Навье—Стокса с целью получить корректную разрешимость основных краевых задач для уравнений гидродинамики в трехмерном случае. В [3] из модифицированной системы уравнений выведена соответствующая система уравнений пограничного слоя и доказана однозначная разрешимость основной граничной задачи для нее. Изучение системы пограничного слоя в электромагнитной среде было продолжено в ряде более поздних работ (см. [1, 5]).

В данной работе изучается задача о пограничном слое, возникающем при обтекании симметричного тела нестационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости Ладыженской. Основным

методом решения поставленных задач является преобразование Крокко, которое переводит нестационарную систему уравнений пограничного слоя в одно квазилинейное уравнение. Решение задачи получено в некоторой окрестности критической точки (см. [4]). Задача о нестационарном симметричном слое решена в целом по t . При этом решения рассматриваются в классе функций, имеющих асимптотику вида $u(t, x, y) - U(t, x) \sim \exp\{-My^2\}$ при $y \rightarrow \infty$.

2. Преобразование Крокко. Рассмотрим случай двумерного нестационарного течения модифицированной системы уравнений пограничного слоя:

$$\nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yy} - u_t - uu_x - vu_y = -U_t - UU_x, \quad u_x + v_y = 0. \quad (1)$$

Здесь ν, d — постоянные, зависящие от свойств жидкости, плотность жидкости ρ предполагается равной единице, $U(t, x)$ — заданная функция, связанная с давлением $p(t, x)$ уравнение Эйлера для скорости внешнего потока

$$-p_x = U_t + UU_x.$$

Система уравнений (1) рассматривается в области $D = \{0 < t < \infty, 0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, x, y) &= u_0(x, y), \quad u(t, 0, y) = 0, \quad u(t, x, 0) = 0, \\ v(t, x, 0) &= v_0(t, x), \quad u(t, x, y) \rightarrow U(t, x) \text{ при } y \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

где $U(t, 0) = 0$, $U_x(t, 0) > 0$, $U(t, x) > 0$ при $x > 0$, а функция $v_0(t, x)$ предполагается заданной. Условия $U(t, 0) = 0$ и $u(t, 0, y) = 0$ определяют точку $x = 0$ как точку, в которой происходит остановка внешнего потока жидкости и пограничный слой симметричен относительно этой точки. Дополнительно предположим, что $U(t, x) = xV(t, x)$, $V(t, x) > 0$ и V, V_x, V_t, v_0 ограничены при $0 < x \leq X$.

Определение 1. Решением задачи (1), (2) называется пара функций $u(t, x, y)$ и $v(t, x, y)$, обладающая следующими свойствами: $u(t, x, y)$ непрерывна и ограничена в замкнутой области $\bar{D}$, $v(t, x, y)$ непрерывна по y в $\bar{D}$ и ограничена при ограниченных y ; обобщенные производные $u_t, u_x, u_y, u_{yy}, v_y$ являются ограниченными измеримыми функциями; u и v удовлетворяют системе (1) в D и граничным условиям (2).

Задачу (1), (2) сведем к некоторой вспомогательной краевой задаче для одного квазилинейного уравнения. Для этого введем новые независимые переменные τ, ξ, η и новую неизвестную функцию $w(\tau, \xi, \eta)$ следующим образом:

$$\tau = t, \quad \xi = x, \quad \eta = \frac{u(t, x, y)}{U(t, x)}, \quad w(\tau, \xi, \eta) = \frac{u_y(t, x, y)}{U(t, x)}. \quad (3)$$

Приведем систему (1) к одному квазилинейному уравнению. Исключим v из системы уравнений (1), продифференцировав эти уравнения по y . Имеем

$$\nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yyy} + 6\nu d u_{yy}^2 u_y - u_{ty} - u_y u_x - uu_{xy} - v_y u_y - vu_{yy} = 0.$$

Из системы уравнений (1) находим

$$v = \frac{1}{u_y}(\nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yy} - u_t - uu_x + U_t + UU_x), \quad v_y = -u_x.$$

Как следствие этих трех равенств, выводим

$$\begin{aligned} 0 &= \nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yyy} - \nu(1 + 3d(u_y)^2)\frac{u_{yy}^2}{u_y} + \nu u_{yy}^2 6du_y - u_{ty} + u_t \frac{u_{yy}}{u_y} - \\ &- \left(uu_{xy} - \frac{u_{yy}}{u_y} uu_x \right) - UU_x \frac{u_{yy}}{u_y} - U_t \frac{u_{yy}}{u_y} = \nu(1 + 3d(u_y)^2) \frac{u_{yyy}u_y - u_{yy}^2}{u_y} - \\ &- u \frac{u_{xy}u_y - u_{yy}u_x}{u_y} - \frac{u_{yy}}{u_y} UU_x + 6\nu d u_y u_{yy}^2 - u_{ty} + u_t \frac{u_{yy}}{u_y} - U_t \frac{u_{yy}}{u_y}. \end{aligned}$$

Вернемся к соотношениям (3), из которых получим

$$\begin{aligned}
u &= \eta U, \quad u_y = wU, \quad x = \xi, \\
u_{yy} &= w_\eta \eta_y U = w_\eta u_y, \quad \frac{u_{yy}}{u_y} = w_\eta, \\
u_{yyy} &= w_{\eta\eta} \eta_y u_y + w_\eta u_{yy} = w_{\eta\eta} \frac{u_y^2}{U} + w_\eta u_{yy}, \\
u_{yx} &= wU_\xi + Uw_\xi + w_\eta u_\xi - w_\eta u \frac{U_\xi}{U}, \quad u_y u_{yy}^2 = w_\eta^2 w^3 U^3, \\
\frac{u_{xy} u_y - u_x u_{yy}}{u_y} &= w_\xi U + wU_\xi - w_\eta u_\xi + w_\eta u_\xi - w_\eta \eta U_\xi, \\
\frac{u_{yyy} u_y - u_{yy}^2}{u_y} &= w_{\eta\eta} \frac{u_y^2}{U} + w_\eta u_{yy} - \frac{u_{yy}}{u_y} u_{yy} = w_{\eta\eta} \frac{u_y^2}{U} + w_\eta u_{yy} - w_\eta u_{yy} = w_{\eta\eta} \frac{u_y^2}{U^2} U = w_{\eta\eta} w^2 U, \\
-\frac{1}{U} \left(u \frac{u_{xy} u_y - u_x u_{yy}}{u_y} + \frac{u_{yy}}{u_y} U U_x \right) &= -\frac{u}{U} (w_\xi U + wU_\xi - w_\eta \eta U_\xi) - w_\eta U_\xi = \\
&= -\eta w_\xi U - \eta w U_\xi + \eta^2 w_\eta U_\xi - w_\eta U_\xi = (\eta^2 - 1) w_\eta U_\xi - \eta w_\xi U - \eta w U_\xi, \\
u_{ty} &= (w_\tau \tau_t + w_\eta \eta_t) U + w U_t = w_\tau U + \eta_t w_\eta U + w U_t = w_\tau U + \frac{u_t U - u U_t}{U^2} w_\eta U + w U_t = \\
&= w_\tau U + w U_t + w_\eta u_t - \eta w_\eta U_t, \\
\frac{1}{U} \left(-u_{ty} + u_t \frac{u_{yy}}{u_y} - U_t \frac{u_{yy}}{u_y} \right) &= \frac{1}{U} (-w_\tau U - w U_t - u_t w_\eta + \eta U_t w_\eta + u_t w_\eta - U_t w_\eta) = \\
&= (\eta - 1) \frac{U_t}{U} w_\eta - \frac{U_t}{U} w - w_\tau.
\end{aligned}$$

Преобразуем граничные условия:

$$\begin{aligned}
v u_y &= -u_t - u u_x + \nu(1 + 3d(u_y)^2) u_{yy} + U_t + U U_x, \\
v \frac{u_y}{U} &= -\frac{u_t}{U} - u \frac{u_x}{U} + \nu(1 + 3d(u_y)^2) \frac{u_{yy}}{U} + \frac{U_t}{U} + U_x, \\
v \frac{u_y}{U} &= -\frac{u_t}{U} - u \frac{u_x}{U} + \nu \left(\frac{u_y}{U} + 3d \frac{u_y^3}{U^3} U^2 \right) \frac{u_{yy}}{u_y} + \frac{U_t}{U} + U_x, \\
v w &= -\frac{u_t}{U} - u \frac{u_\xi}{U} + \nu(w + 3dU^2 w^3) w_\eta + \frac{U_t}{U} + U_x.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что $u(t, x, 0) = 0$ и, следовательно, из $y = 0$ вытекает $\eta = 0$. Таким образом, из условия $y = 0$, следует

$$\nu(1 + 3dU^2 w^2) w w_\eta - v_0 w + \frac{U_t}{U} + U_x = 0.$$

В итоге, учитывая (2), выводим одно квазилинейное уравнение

$$\begin{aligned}
\nu(1 + 3dU^2 w^2) w^2 w_{\eta\eta} - w_\tau - \eta U w_\xi + (\eta^2 - 1) U_x w_\eta + (\eta - 1) \frac{U_t}{U} w_\eta - \\
- \eta U_x w + 6\nu d U^2 w_\eta^2 w^3 - \frac{U_t}{U} w = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

в области $\Omega = \{0 < \tau < \infty, 0 < \xi < X, 0 < \eta < 1\}$ с условиями

$$\begin{aligned}
w(\tau, \xi, 1) &= 0, \quad \left(\nu(1 + 3dU^2 w^2) w w_\eta - v_0 w + \frac{U_t}{U} + U_x \right) \Big|_{\eta=0} = 0, \\
w(0, \xi, \eta) &= w_0(\xi, \eta),
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$w_0(\xi, \eta) = \frac{u_{0y}(x, y)}{U(0, x)}.$$

Определение 2. Функция $w(\tau, \xi, \eta)$ называется решением задачи (4), (5), если она непрерывна в $\bar{\Omega}$ и имеет ограниченные обобщенные производные w_τ, w_ξ, w_η , причем w_η непрерывна по η при $\eta = 0$; существует такая обобщенная производная $w_{\eta\eta}$, что произведение ww_η ограничено в $\bar{\Omega}$; уравнение (4) выполняется для w почти всюду в Ω и w удовлетворяет условиям (5).

Далее воспользуемся введенным ранее предположением $U = xV$ и для удобства примем обозначения:

$$A = (\eta^2 - 1)(V + \xi V_x) + (\eta - 1)\frac{V_t}{V}, \quad B = -\eta(V + \xi V_x) - \frac{V_t}{V}, \quad C = V + \xi V_x + \frac{V_t}{V}.$$

Тогда задача (4) примет вид

$$\nu(1 + 3d\xi^2 V^2 w^2)w^2 w_{\eta\eta} - w_\tau - \eta\xi V w_\xi + Aw_\eta + Bw + 6\nu d\xi^2 V^2 w^3 w_\eta^2 = 0,$$

а ее начальное и граничные условия (5) — вид

$$w(\tau, \xi, 1) = 0, \quad (\nu(1 + 3d\xi^2 V^2 w^2)ww_\eta - v_0 w + C)|_{\eta=0} = 0, \\ w(0, \xi, \eta) = w_0(\xi, \eta).$$

Рассмотрим вспомогательную граничную задачу, решение которой будем использовать для оценок решений искомой задачи, а именно, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(Y) \equiv \nu Y^2 Y_{\eta\eta} + (\eta^2 - 1)aY_\eta - \eta aY = 0, \quad 0 < \eta < 1 \quad (6)$$

с граничными условиями

$$l(Y) \equiv (\nu Y Y_\eta - bY + a)|_{\eta=0} = 0, \quad Y(1) = 0, \quad (7)$$

где $a > 0$, b — некоторые константы. Всюду C_i, M_i — положительные постоянные.

3. Основные утверждения. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $U_x > 0$ при $0 \leq x \leq X$; функции $V, V_x, v_0, v_{0x}, A_x, B_x, C_x$ ограничены;

$$|V_t| \leq M_8 x, \quad |A_t| \leq M_9 x, \quad |B_t| \leq M_{10} x, \quad |C_t| \leq M_{11} x, \quad |v_{0t}| \geq -M_{12} x, \\ Y e^{-M_1 \xi} \leq w_0 \leq Y e^{M_2 \xi}, \quad |w_{0\xi}| \leq M_3(1 - \eta);$$

w_0 непрерывно дифференцируема по $\eta \in [0, 1)$ и

$$Y_\eta e^{M_4 \xi} \leq w_{0\eta} \leq Y_\eta e^{-M_5 \xi}, \\ -M_6(1 - \eta) \leq \nu(1 + 3d\xi^2 V^2 w_0^2)w_0^2 w_{0\eta\eta} + Aw_{0\eta} + Bw_0 + 6\nu d\xi^2 V^2 w_0^3 w_{0\eta}^2 \leq M_7 x(1 - \eta), \\ \left(\nu(1 + 3d\xi^2 V^2 w_0^2)w_0 w_{0\eta} - v_0 w_0 + U_x + \frac{U_t}{U} \right) \Big|_{\eta=0, \tau=0} = 0.$$

Тогда задача (4), (5) в области Ω при X , зависящем от V, v_0, w_0 имеет решение $w(\tau, \xi, \eta)$, обладающее следующими свойствами: w непрерывна в $\bar{\Omega}$,

$$Y e^{-C_1 \xi} \leq w \leq Y e^{C_2 \xi};$$

w_η непрерывна по $\eta < 1$,

$$Y_\eta e^{C_3 \xi} \leq w_\eta \leq Y_\eta e^{-C_3 \xi};$$

обобщенные производные $w_\tau, w_\xi, w_{\eta\eta}$ удовлетворяют неравенствам

$$-C_5(1 - \eta) \leq w_\tau \leq C_6 \xi(1 - \eta), \quad |w_\xi| \leq C_7 Y, \quad -C_8 \leq w^2 w_{\eta\eta} \leq -C_9.$$

Решение задачи с такими свойствами единственно.

Обращая преобразование переменных (3), что возможно в силу свойств решения задачи (4), (5), получаем основной результат о существовании и единственности классического решения задачи (1), (2) в смысле данного нами определения.

Теорема 2. *Предположим, что*

$$U(t, x) = x(a + xa_1(t, x)), \quad v_0(t, x) = b + xb_1(t, x),$$

где $a = \text{const} > 0$, $b = \text{const}$; $U(t, x) > 0$ при $x > 0$; $a_1(t, x)$, $a_{1x}(t, x)$, $a_{1xx}(t, x)$, $b_1(t, x)$, $b_{1x}(t, x)$ ограничены при $0 \leq t < \infty$, $0 \leq x \leq X$. Пусть $u_0(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям: функция u_0/U непрерывна в $\overline{D}$, $u_0 > 0$ при $y > 0$, $x > 0$; $u_0(x, 0) = 0$, $u_0/U \rightarrow 1$ при $y \rightarrow \infty$; $u_{0y}/U > 0$ при $y \geq 0$; $u_{0y}/U \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$; кроме того,

$$U(x)Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{-M_1x} \leq u_{0y} \leq U(x)Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{M_2x},$$

$$Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right)e^{M_4x} \leq \frac{u_{0yy}}{u_{0y}} \leq Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right)e^{-M_5x},$$

Пусть выполнены условия согласования

$$v_0(0, x)u_{0y}(x, 0) = U_t(0, x) + U(0, x)U_x(0, x) + \nu(1 + 3d(u_{0y})^2)u_{0yy}.$$

Тогда при некотором X , зависящем от функций U , u_0 , v_0 , задача (1), (2) в области D имеет единственное решение u , v , которое обладает следующими свойствами: $u > 0$ при $y > 0$ и $x > 0$; функции u/U , u_y/U ограничены и непрерывны в $\overline{D}$; $u_y > 0$ при $y \geq 0$; $u \rightarrow U$ при $y \rightarrow \infty$, $u_y/U \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$; функции u_x , u_y , u_{yy} , u_t , v_y ограничены и непрерывны в D ; функция v непрерывна в $\overline{D}$ по y и ограничена при ограниченных y ; уравнения (1) выполняются почти всюду в D ; имеют место оценки

$$U(x)Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{-C_1x} \leq u_y \leq U(x)Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{C_2x}, \quad Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right)e^{C_4x} \leq \frac{u_{yy}}{u_y} \leq Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right)e^{-C_5x},$$

$$\exp\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{2C_2x}\right] \leq 1 - \frac{u}{U} \leq \exp\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{-2C_1x}\right].$$

где $Y(\eta)$ — решение задачи (6), (7).

4. Вспомогательные утверждения. Доказательство существования решения задачи (4), (5) проведем на основе метода прямых, т.е. дискретизацией по ξ и заменой уравнения (4) системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для любой функции $f(\tau, \xi, \eta)$ введем обозначение

$$f^{m,k} = f^{m,k}(\eta) \equiv f(mh, kh, \eta), \quad h = \text{const} > 0,$$

$$m = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, [X/h], \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

Уравнения (4) с условиями (5) заменим системой уравнений

$$L_{m,k}(w) := \nu(1 + 3d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^2)(w^{m,k})^2w_\eta^{m,k} - \frac{w^{m,k} - w^{m-1,k}}{h} -$$

$$- \eta kh V^{m,k} \frac{w^{m,k} - w^{m,k-1}}{h} + (\eta^2 - 1)(V^{m,k} + kh V_\xi^{m,k})w_\eta^{m,k} -$$

$$- \eta(V^{m,k} + kh V_\xi^{m,k})w^{m,k} + 6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^3(w_\eta^{m,k})^2 = 0 \quad (8)$$

с граничными условиями

$$w^{0,k}(\eta) = w_0(mh, \eta), \quad w^{m,k}(1) = 0,$$

$$l_{m,k}(w) := \left(\nu w^{m,k} w_\eta^{m,k} (1 + 3d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^2) - v_0^{m,k} w^{m,k} + C^{m,k} \right) \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (9)$$

Далее всюду C_i , M_i — положительные постоянные, не зависящие от h .

Доказательство основных результатов проводим с помощью следующих лемм.

Лемма 1. *Предположим, что при $0 \leq x \leq X$ выполнено неравенство $U_x > 0$; функции V , V_x , v_0 ограничены,*

$$\left| \frac{V_t}{V} \right| \leq M_1x, \quad M_2(1 - \eta) \leq w_0(\xi, \eta) \leq M_3(1 - \eta)$$

$w_0(\xi, \eta)$ имеет непрерывную производную по $\eta \in [0, 1)$. Тогда при $0 \leq mh \leq \infty$, $0 \leq kh \leq X$, где X зависит от V , v_0 , w_0 , задача (8), (9) имеет решение $w^{m,k}(\eta)$, обладающее непрерывной производной третьего порядка при $0 \leq \eta < 1$. Для этого решения справедливы неравенства

$$C_1(1 - \eta) \leq w^{m,k}(\eta) \leq C_2(1 - \eta).$$

Доказательство леммы проводится методом эллиптической регуляризации.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1 и функция $v_{0x}(t, x)$ ограничена при $0 \leq t \leq \infty$ и $0 \leq x \leq X$. Пусть, кроме того, выполнены неравенства

$$Y(\eta)e^{-M_4\xi} \leq w_0(\xi, \eta) \leq Y(\eta)e^{M_5\xi}.$$

Тогда при $0 \leq mh \leq \infty$, $0 \leq kh \leq X$, где X зависит от V , v_0 , решения $w^{m,k}(\eta)$ задачи (8), (9) удовлетворяют неравенствам

$$Y(\eta)e^{-C_3kh} \leq w^{m,k}(\eta) \leq Y(\eta)e^{C_4kh}.$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 2 и, кроме того,

$$\begin{aligned} |w_{0\xi}| &\leq M_6(1 - \eta), \quad Y_\eta e^{M_7\xi} \leq w_{0\eta} \leq Y_\eta e^{-M_8\xi}, \\ -M_9(1 - \eta) &\leq \nu(1 + 3d\xi^2 V^2 w_0^2) w_0^2 w_{0\eta\eta} + Aw_{0\eta} + Bw_0 + 6\nu d\xi^2 V^2 w_0^3 w_{0\eta}^2 \leq M_{10}\xi(1 - \eta), \\ \left(\nu(1 + 3d\xi V^2 w_0^2) w_0 w_{0\eta} - v_0 w_0 + C \right) \Big|_{\eta=0, \tau=0} &= 0, \end{aligned}$$

где A_ξ , B_ξ , C_ξ ограничены,

$$|V_\tau| \leq M_{11}\xi, \quad B_\tau \leq M_{12}\xi, \quad C_\tau \leq M_{13}\xi, \quad |v_0| \leq M_{14}, \quad v_{0\tau} \leq -M_{15}\xi.$$

Тогда при $0 \leq mh \leq \infty$, $0 \leq kh \leq X$, где X зависит от V , v_0 , решения $w^{m,k}(\eta)$ задачи (8), (9) удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} -C_5(1 - \eta) &\leq \frac{w^{m,k} - w^{m-1,k}}{h} \leq C_6kh(1 - \eta), \quad \left| \frac{w^{m,k} - w^{m,k-1}}{h} \right| \leq C_7Y, \quad k \geq 1, \\ Y_\eta(\eta)e^{C_8kh} &\leq w_\eta^{m,k}(\eta) \leq Y_\eta(\eta)e^{C_9kh}, \quad |w^{m,k} w_{\eta\eta}^{m,k}| \leq C_{10}, \quad w^{m,k} w_{\eta\eta}^{m,k} \leq -C_{11}, \end{aligned}$$

где постоянные C_j не зависят от h .

Автор выражает глубокую признательность проф. В. Н. Самохину и своему научному руководителю проф. Г. А. Чечкину за постановку задачи и ценные советы при планировании исследования и рекомендации по оформлению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатова Р. Р., Самохин В. Н., Чечкин Г. А. Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя для модифицированной несжимаемой вязкой среды. Отрыв пограничного слоя // Пробл. мат. анализ. — 2018. — 92. — С. 83–100.
2. Олейник О. А., Самохин В. Н. Математические методы в теории пограничного слоя. — М.: Наука, 1997.
3. Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А. Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье—Стокса // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 2011. — 28. — С. 329–361.
4. Самохин В. Н., Чечкин Г. А. Уравнения пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды в окрестности критической точки // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 2016. — 31. — С. 158–176.
5. Bulatova R. R., Chechkin G. A., Chechkina T. P. and Samokhin V. N. On the influence of a magnetic field on the separation of the boundary layer of a non-Newtonian MHD medium // C. R. Mecanique. — 2018. — 346, № 9. — P. 807–814.

Булатова Регина Рашидовна

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: regina.bulatova@mech.math.msu.su