Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ф. Долгий, Р. И. Шевченко, Аппроксимации в задаче устойчивости линейных периодических систем с последствием, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 191, 29–37

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-191-29-37>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 02:46:26

АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© 2021 г. Ю. Ф. ДОЛГИЙ, Р. И. ШЕВЧЕНКО

Аннотация. Асимптотическая устойчивость линейной периодической системы дифференциальных уравнений с последействием определяется расположением спектра бесконечномерного вполне непрерывного оператора монодромии. Аналитическое представление такого оператора удастся получить только для систем специального вида. В численных методах используются конечномерные аппроксимации оператора монодромии. В работе исследуется предложенная Н. Н. Красовским процедура аппроксимации системы дифференциальных уравнений с последействием системами обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. В гильбертовом пространстве состояний периодической системы с последействием построены конечномерные аппроксимации для оператора монодромии. Доказана теорема, что при росте размерности конечномерных приближений точность аппроксимации оператора монодромии увеличивается.

Ключевые слова: система с последействием, устойчивость движения, конечномерная аппроксимация.

APPROXIMATIONS IN THE STABILITY PROBLEM FOR LINEAR PERIODIC SYSTEMS WITH AFTEREFFECT

© 2021 YU. F. DOLGIY, R. I. SHEVCHENKO

ABSTRACT. The asymptotic stability of a linear periodic system of differential equations with aftereffect is determined by the location of the spectrum of the infinite-dimensional, compact monodromy operator. Analytical representations of such operators can be obtained only for systems of a special type. In numerical simulations, finite-dimensional approximations of the monodromy operators are used. In this paper, we examine a procedure for approximating a system of differential equations with aftereffect by systems of ordinary differential equations of large dimension proposed by N. N. Krasovskii. Finite-dimensional approximations for monodromy operators are constructed in the Hilbert space of states of a periodic system with aftereffect. We prove that increasing of the dimension of finite-dimensional approximations leads to increasing of the approximation accuracy.

Keywords and phrases: system with aftereffect, stability of motion, finite-dimensional approximation.

AMS Subject Classification: 39B82

1. Введение. Статья посвящена развитию теории устойчивости для функционально-дифференциальных уравнений (см. [10]). Объект исследования описывается линейной периодической системой дифференциальных уравнений с последействием. Условия ее асимптотической устойчивости определяются в терминах спектра оператора монодромии, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве (см. [10]). Абстрактные конструкции построения конечномерных аппроксимаций для вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве описаны в [2].

Они использовались в [3] для построения характеристических уравнений, определяющих спектры операторов монодромии для линейных периодических систем дифференциальных уравнений с последействием.

Для линейных периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений теория устойчивости хорошо разработана (см. [12]). При исследовании устойчивости линейной периодической системы дифференциальных уравнений с последействием в статье используются аппроксимирующие системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, которые являются модификациями аппроксимирующих систем, предложенных Н. Н. Красовским (см. [5]).

Существует несколько способов построения аппроксимирующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Собственные числа и собственные функции оператора монодромии используются при каноническом разложении линейной периодической системы с последействием (см. [10, 11]), которое позволяет строить конечномерные аппроксимации периодических систем с последействием. Канонические аппроксимации использовались при нахождении управлений в задаче оптимальной стабилизации периодических систем с последействием (см. [6, 16]).

В работе по теории управления автономной линейной системой с запаздыванием (см. [5]) Н. Н. Красовский использовал аппроксимационные системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, при построении которых применялась замена звена запаздывания последовательной цепочкой инерциальных звеньев. Такие аппроксимационные системы широко используются в теории управления (см. [13, 14]), теории стабилизации (см. [15]) и теории дифференциальных игр (см. [7]).

Различные модификации аппроксимационных систем Н. Н. Красовского предложены в [8, 9]. Они применялись в исследованиях по теории устойчивости, теории нелинейных колебаний, теории стабилизации, теории управления и теории дифференциальных игр.

2. Конечномерные аппроксимации оператора монодромии. Рассматривается линейная периодическая система дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 A(t, \vartheta)x(t + \vartheta)d\vartheta, \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty), \quad (1)$$

где $x: [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, матричнозначная функция $A_0(\cdot)$ ω -периодична и локально интегрируема по Лебегу, матричнозначная функция $A_1(\cdot)$ ω -периодична и непрерывна, матричнозначная функция $A(\cdot, \cdot)$ ω -периодична и непрерывна по первому аргументу, а также интегрируема по Лебегу с квадратом по второму аргументу, $\omega > \tau > 0$.

Для системы дифференциальных уравнений с последействием (1) предлагаются аппроксимационные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [5, 8])

$$\frac{dy_0^N}{dt} = A_0(t)y_0^N + A_1(t)y_N^N + \sum_{i=1}^N A_i^N(t)y_i^N, \quad (2)$$

$$\frac{dy_i^N}{dt} = \frac{N}{\tau}(y_{i-1}^N - y_i^N), \quad i = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Здесь $y_i^N \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0, N}$, $N \geq 1$, $A_i^N(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, — ω -периодические матричнозначные функции, определяемые формулами

$$A_i^N(t) = \int_{-i\tau/N}^{-(i-1)\tau/N} A(t, \vartheta)d\vartheta, \quad i = \overline{1, N}.$$

Введем функциональное пространство $\mathbb{H} = L_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{H}} = y^T(0)x(0) + \int_{-\Delta}^0 y^T(\vartheta)x(\vartheta)d\vartheta, \quad x, y \in \mathbb{H},$$

и нормой $\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{H}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{H}}^{1/2}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$. Задача Коши для системы (1) равномерно корректна. Оператор монодромии для этой системы вполне непрерывен и определяется формулой

$$(\mathbf{U}\varphi)(\vartheta) = x(\omega + \vartheta, \varphi), \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad \varphi \in \mathbb{H},$$

где $x(t, \varphi)$, $t \geq -\tau$, — решение задачи Коши с начальной функцией $\varphi \in \mathbb{H}$ (см. [10]). Всюду далее символом $|\cdot|$ обозначена векторная евклидова норма пространства $\mathbb{R}^n$ и согласованная с ней норма матрицы как линейного оператора.

Введем фундаментальные нормированные матрицы $\mathcal{Y}^N(t) = \{\mathcal{Y}_{ij}^N(t)\}_{i,j=0}^N$, $t \geq 0$, системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2), (3), $\mathcal{Y}^N(0) = I_{(N+1)n}$, $I_{(N+1)n}$ — единичная матрица. Рассматривается решение задачи Коши $y^N(t, \varphi) = \{y_i^N(t, \varphi)\}_{i=0}^N = \mathcal{Y}^N(t)\{y_i^N(0)\}_{i=0}^N$, $t \geq 0$, системы (2), (3) со специальными начальными условиями

$$y_0^N(0) = \varphi(0), \quad y_i^N(0) = \frac{N}{\tau} \int_{-i\tau/N}^{-(i-1)\tau/N} \varphi(\vartheta) d\vartheta, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Конечномерные аппроксимации оператора монодромии определяются формулами

$$(\mathbf{U}_N\varphi)(\vartheta) = y_0^N(\omega + \vartheta, \varphi) = \mathcal{Y}_{00}^N(\omega + \vartheta)\varphi(0) + \frac{N}{\tau} \sum_{j=1}^N \mathcal{Y}_{0j}^N(\omega + \vartheta) \int_{-j\tau/N}^{-(j-1)\tau/N} \varphi(s) ds,$$

$\vartheta \in [-\tau, 0]$, $\varphi \in \mathbb{H}$. В работе доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *При выполнении условий, наложенных на коэффициенты системы (1), последовательность аппроксимирующих операторов сходится к оператору $\mathbf{U}$ на $\mathbb{H}$, т.е.*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{U}_N\varphi = \mathbf{U}\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{H}.$$

Используются подходы, предложенные в работах Н. Н. Красовского и А. Б. Куржанского [8]. Так, в [5] рассматривалась автономная система дифференциальных уравнений с запаздыванием, а в [8] рассматривалась неавтономная система с одним переменным запаздыванием.

3. Сходимость аппроксимаций оператора монодромии. Операторы $\mathbf{U}_N$, $N \geq 1$, определяются неявным образом системой обыкновенных дифференциальных уравнений (2), (3). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Компонента $y_0^N(t, \varphi)$, $t \geq 0$, решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2), (3) со специальными начальными условиями*

$$y_0^N(0) = \varphi(0), \quad y_i^N(0) = \frac{N}{\tau} \int_{-i\tau/N}^{-(i-1)\tau/N} \varphi(\vartheta) d\vartheta, \quad 1 \leq i \leq N,$$

где $\varphi \in \mathbb{H}$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$y_0^N(t) = \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{\mathcal{A}}^N(t, \vartheta) \varphi(\vartheta) d\vartheta + \int_0^t \mathcal{A}^N(t, s) y_0^N(s) ds, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Здесь матричнозначные функции $\hat{\mathcal{A}}^N$ и $\mathcal{A}^N$ определяются формулами

$$\hat{\mathcal{A}}^N(t, \vartheta) = \int_0^t \left[A_1(s_1) \hat{\psi}_N^N(s_1, \vartheta) + \int_{-\tau}^0 A(s_1, \vartheta_1) \hat{\psi}^N(s_1, \vartheta, \vartheta_1) d\vartheta_1 \right] ds_1, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad t \geq 0,$$

$$\mathcal{A}^N(t, s) = A_0(s) + \int_s^t \left[A_1(s_1) \psi_N^N(s_1, s) + \int_{-\tau}^0 A(s_1, \vartheta_1) \psi^N(s_1, s, \vartheta_1) d\vartheta_1 \right] ds_1, \quad 0 \leq s \leq t, \quad t \geq 0,$$

где скалярные функции $\hat{\psi}^N$ и ψ^N определяются формулами

$$\begin{aligned}\hat{\psi}^N(t, \vartheta, \vartheta_1) &= \sum_{i=1}^N \chi_{[-i\tau/N, -(i-1)\tau/N]}(\vartheta_1) \hat{\psi}_i^N(t, \vartheta), \quad \vartheta_1, \vartheta \in [-\tau, 0], \quad t \geq 0, \\ \psi^N(t, s, \vartheta_1) &= \sum_{i=1}^N \chi_{[-i\tau/N, -(i-1)\tau/N]}(\vartheta_1) \psi_i^N(t, s), \quad \vartheta_1 \in [-\tau, 0], \quad 0 \leq s \leq t, \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

а скалярные функции $\hat{\psi}_i^N$ и ψ_i^N , $1 \leq i \leq N$, — формулами

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_i^N(t, \vartheta) &= \frac{N}{\tau} \sum_{k=1}^i \frac{1}{(i-k)!} \left(\frac{tN}{\tau} \right)^{i-k} \chi_{[-k\tau/N, -(k-1)\tau/N]}(\vartheta) e^{-\frac{N}{\tau}t}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad t \geq 0, \\ \psi_i^N(t, s) &= \frac{1}{(i-1)!} \left(\frac{N}{\tau} \right)^i (t-s)^{i-1} e^{-\frac{N}{\tau}(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t, \quad t \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N.\end{aligned}$$

Для индикатора множества E используется обозначение χ_E .

Доказательство. Учитывая определения матричнозначных функций A_i^N , $1 \leq i \leq N$, систему (2) перепишем в виде

$$\frac{dy_0^N(t)}{dt} = A_0(t)y_0^N(t) + A_1(t)y_N^N(t) + \sum_{i=1}^N \int_{-\tau}^0 A(t, \vartheta_1) \chi_{[-i\tau/N, -(i-1)\tau/N]}(\vartheta_1) d\vartheta_1 y_i^N(t), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Используя следующие формулы представления общего решения системы (3) (см. [5])

$$\begin{aligned}y_i^N(t) &= \frac{1}{(i-1)!} \left(\frac{N}{\tau} \right)^i \int_0^t (t-s)^{i-1} e^{-\frac{N}{\tau}(t-s)} y_0^N(s) ds + \sum_{k=1}^i \frac{1}{(i-k)!} \left(\frac{tN}{\tau} \right)^{i-k} y_k^N(0) e^{-\frac{N}{\tau}t}, \\ &1 \leq i \leq N, \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \chi_{[-i\tau/N, -(i-1)\tau/N]}(\vartheta_1) y_i^N(t) &= \int_0^t \sum_{i=1}^N \chi_{[-i\tau/N, -(i-1)\tau/N]}(\vartheta_1) \psi_i^N(t, s) y_0^N(s) ds + \\ &+ \int_{-\tau}^0 \sum_{i=1}^N \chi_{[-i\tau/N, -(i-1)\tau/N]}(\vartheta_1) \hat{\psi}_i^N(t, \vartheta) \varphi(\vartheta) d\vartheta = \int_0^t \psi^N(t, s, \vartheta_1) y_0^N(s) ds + \int_{-\tau}^0 \hat{\psi}^N(t, \vartheta, \vartheta_1) \varphi(\vartheta) d\vartheta, \\ &\vartheta_1 \in [-\tau, 0], \quad t \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N.\end{aligned}$$

В результате равенство (5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\frac{dy_0^N(t)}{dt} &= A_0(t)y_0^N(t) + A_1(t) \left[\int_0^t \psi_N^N(t, s) y_0^N(s) ds + \int_{-\tau}^0 \hat{\psi}_N^N(t, \vartheta) \varphi(\vartheta) d\vartheta \right] + \\ &+ \int_{-\tau}^0 A(t, \vartheta_1) \left[\int_0^t \psi^N(t, s, \vartheta_1) y_0^N(s) ds + \int_{-\tau}^0 \hat{\psi}^N(t, \vartheta, \vartheta_1) \varphi(\vartheta) d\vartheta \right] d\vartheta_1 = \\ &= A_0(t)y_0^N(t) + \int_0^t \left[A_1(t) \psi_N^N(t, s) + \int_{-\tau}^0 A(t, \vartheta_1) \psi^N(t, s, \vartheta_1) d\vartheta_1 \right] y_0^N(s) ds + \\ &+ \int_{-\tau}^0 \left[A_1(t) \hat{\psi}_N^N(t, \vartheta) + \int_{-\tau}^0 A(t, \vartheta_1) \hat{\psi}^N(t, \vartheta, \vartheta_1) d\vartheta_1 \right] \varphi(\vartheta) d\vartheta, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Интегрируя полученное равенство, находим интегральное уравнение

$$y_0^N(t) = \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \int_0^t \left[A_1(s) \hat{\psi}_N^N(s, \vartheta) + \int_{-\tau}^0 A(s, \vartheta_1) \hat{\psi}^N(s, \vartheta, \vartheta_1) d\vartheta_1 \right] ds \varphi(\vartheta) d\vartheta + \\ + \int_0^t \left\{ A_0(s) + \int_s^t \left[A_1(s_1) \hat{\psi}_N^N(s_1, s) + \int_{-\tau}^0 A(s_1, \vartheta_1) \hat{\psi}^N(s_1, s, \vartheta_1) d\vartheta_1 \right] ds_1 \right\} y_0^N(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Лемма доказана. $\square$

Аппроксимирующие операторы U_N , $N \geq 1$, определяются интегральными уравнениями (4) неявным образом. Оператор U также определим неявным образом с помощью интегрального уравнения. Докажем лемму.

Лемма 2. *Решение задачи Коши для системы (1) с начальной функцией $\varphi \in \mathbb{H}$ удовлетворяет интегральному уравнению*

$$x(t) = \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{\mathcal{A}}(t, \vartheta) \varphi(\vartheta) d\vartheta + \int_0^t \mathcal{A}(t, s) x(s) ds, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где матричнозначные функции $\hat{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{A}$ определяются формулами

$$\hat{\mathcal{A}}(t, \vartheta) = \chi_{[-\tau, t-\tau]}(\vartheta) A_1(\vartheta + \tau) + \int_{-\tau}^0 \chi_{[\vartheta_1, t+\vartheta_1]}(\vartheta) A(\vartheta - \vartheta_1, \vartheta_1) d\vartheta_1, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad t \geq 0, \\ \mathcal{A}(t, s) = A_0(s) + \chi_{[-\tau, t-\tau]}(s) A_1(s + \tau) + \int_{-\tau}^0 \chi_{[\vartheta_1, t+\vartheta_1]}(s) A(s - \vartheta_1, \vartheta_1) d\vartheta_1, \quad 0 \leq s \leq t, \quad t \geq 0.$$

Доказательство. Решение задачи Коши для системы (1) удовлетворяет условию $x(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-\tau, 0]$ и уравнению

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t A_0(s) x(s) ds + \int_0^t A_1(s) x(s - \tau) ds + \int_0^t \int_{-\tau}^0 A(s_1, \vartheta_1) x(s_1 + \vartheta_1) d\vartheta_1 ds_1, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Справедливы равенства

$$\int_0^t A_1(s) x(s - \tau) ds = \int_{-\tau}^t \chi_{[-\tau, t-\tau]}(s) A_1(s + \tau) x(s) ds = \\ = \int_{-\tau}^0 \chi_{[-\tau, t-\tau]}(\vartheta) A_1(\vartheta + \tau) \varphi(\vartheta) d\vartheta + \int_0^t \chi_{[-\tau, t-\tau]}(s) A_1(s + \tau) x(s) ds, \quad t \geq 0,$$

$$\int_0^t \int_{-\tau}^0 A(s_1, \vartheta_1) x(s_1 + \vartheta_1) d\vartheta_1 ds_1 = \\ = \int_{-\tau}^0 \int_{\vartheta_1}^{t+\vartheta_1} A(s - \vartheta_1, \vartheta_1) x(s) ds d\vartheta_1 = \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^t \chi_{[\vartheta_1, t+\vartheta_1]}(s) A(s - \vartheta_1, \vartheta_1) x(s) ds d\vartheta_1 =$$

$$= \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \chi_{[\vartheta_1, t+\vartheta_1]}(\vartheta) A(\vartheta - \vartheta_1, \vartheta_1) d\vartheta_1 \varphi(\vartheta) d\vartheta + \int_0^t \int_{-\tau}^0 \chi_{[\vartheta_1, t+\vartheta_1]}(s) A(s - \vartheta_1, \vartheta_1) d\vartheta_1 x(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Подстановка этих равенств в (7) завершает доказательство леммы. $\square$

Для доказательства сходимости аппроксимирующих операторов используем теорему Банаха—Штейнгауза (см. [4, с. 266]).

Лемма 3. *Аппроксимирующие операторы монодромии $\mathbf{U}_N$, $N \geq 1$, равномерно ограничены.*

Доказательство. Представим уравнение (4) в операторной форме

$$y_0^N(t) = (\mathbf{K}_N \varphi)(t) + (\mathbf{V}_N y_0^N)(t), \quad t \in [0, \omega], \quad \varphi \in \mathbb{H},$$

где операторы $\mathbf{K}_N$ и $\mathbf{V}_N$ определяются формулами

$$(\mathbf{K}_N \varphi)(t) = \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{\mathcal{A}}^N(t, \vartheta) \varphi(\vartheta) d\vartheta, \quad 0 \leq t \leq \omega, \quad \varphi \in \mathbb{H},$$

$$(\mathbf{V}_N y_0^N)(t) = \int_0^t \mathcal{A}^N(t, s) y_0^N(s) ds, \quad 0 \leq t \leq \omega.$$

Здесь $\mathbf{K}_N: \mathbb{H} \rightarrow C([0, \omega], \mathbb{R}^n)$ — конечномерный оператор, $\mathbf{V}_N: C([0, \omega], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([0, \omega], \mathbb{R}^n)$ — вольтеров оператор.

Имеет место неравенство

$$\sup_{t \in [0, \omega]} |(\mathbf{K}_N \varphi)(t)| \leq |\varphi(0)| + \int_{-\tau}^0 \sup_{t \in [0, \omega]} |\hat{\mathcal{A}}^N(t, \vartheta)| |\varphi(\vartheta)| d\vartheta,$$

где

$$\sup_{t \in [0, \omega]} |\hat{\mathcal{A}}^N(t, \vartheta)| \leq \int_0^\omega \left[|A_1(s_1)| \hat{\psi}_N^N(s_1, \vartheta) + \int_{-\tau}^0 |A(s_1, \vartheta_1)| \hat{\psi}^N(s_1, \vartheta, \vartheta_1) d\vartheta_1 \right] ds_1, \quad \vartheta \in [-\tau, 0].$$

Учитывая определения функций $\hat{\psi}_N^N$ и $\hat{\psi}^N$, можно показать, что существует функция $\alpha(\cdot) \in L_2[-\tau, 0]$, для которой выполняется оценка

$$\sup_{t \in [0, \omega]} |\hat{\mathcal{A}}^N(t, \vartheta)| \leq \alpha(\vartheta), \quad \vartheta \in [-\tau, 0].$$

В результате находим

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \omega]} |(\mathbf{K}_N \varphi)(t)| &\leq |\varphi(0)| + \left(\int_{-\tau}^0 \alpha^2(\vartheta) d\vartheta \right)^{1/2} \left(\int_{-\tau}^0 |\varphi(\vartheta)|^2 d\vartheta \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sqrt{2} \max \left\{ 1, \left(\int_{-\tau}^0 \alpha^2(\vartheta) d\vartheta \right)^{1/2} \right\} \|\varphi\|_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

Таким образом, операторы $\mathbf{K}_N: \mathbb{H} \rightarrow C([0, \omega], \mathbb{R}^n)$ равномерно ограничены по N .

Из определения функций ψ_N^N и ψ^N следует, что существуют такие ограниченные функции β_1 и β_2 , для которых справедливы неравенства $|\psi_N^N(s_1, s)| \leq \beta_1(s_1, s)$ и $|\psi^N(s_1, s, \vartheta_1)| \leq \beta_2(s_1, s, \vartheta_1)$, $s \leq s_1 \leq t$, $-\tau \leq \vartheta_1 \leq 0$, $0 \leq s \leq t$, $0 \leq t \leq \omega$. Отсюда находим

$$|\mathcal{A}^N(t, s)| \leq |A_0(s)| + \int_s^t \left[|A_1(s_1)| \beta_1(s_1, s) + \int_{-\tau}^0 |A(s_1, \vartheta_1)| \beta_2(s_1, s, \vartheta_1) d\vartheta_1 \right] ds_1,$$

$0 \leq s \leq t, 0 \leq t \leq \omega, N \geq 1$. Из приведенных оценок следует, что операторы

$$(\mathbf{I} - \mathbf{V}_N)^{-1}: C([0, \omega], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([0, \omega], \mathbb{R}^n), \quad (\mathbf{I} - \mathbf{V}_N)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{V}_N^k,$$

равномерно ограничены по N . Следовательно, операторы $(\mathbf{I} - \mathbf{V}_N)^{-1} \mathbf{K}_N: \mathbb{H} \rightarrow C([0, \omega], \mathbb{R}^n)$ также равномерно ограничены по N . Аппроксимирующие операторы монодромии $\mathbf{U}_N$ определяются формулами

$$(\mathbf{U}_N \varphi)(\vartheta) = ((\mathbf{I} - \mathbf{V}_N)^{-1} \mathbf{K}_N \varphi)(\omega + \vartheta), \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad \varphi \in \mathbb{H}.$$

Области значений этих операторов всюду плотны в пространстве $\mathbb{H}$, что завершает доказательство леммы. $\square$

Запишем интегральное уравнение (6) в операторной форме

$$x(t) = (\mathbf{K} \varphi)(t) + (\mathbf{V} x)(t), \quad t \in [0, \omega],$$

где операторы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{V}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} \varphi)(t) &= \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{\mathcal{A}}(t, \vartheta) \varphi(\vartheta) d\vartheta, \quad 0 \leq t \leq \omega, \quad \varphi \in \mathbb{H}, \\ (\mathbf{V} x)(t) &= \int_0^t \mathcal{A}(t, s) x(s) ds, \quad 0 \leq t \leq \omega. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{K}: \mathbb{H} \rightarrow C([0, \omega], \mathbb{R}^n)$, $\mathbf{V}: C([0, \omega], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([0, \omega], \mathbb{R}^n)$ — вольтерров оператор. Оператор монодромии определяется формулой

$$(\mathbf{U} \varphi)(\vartheta) = ((\mathbf{I} - \mathbf{V})^{-1} \mathbf{K} \varphi)(\omega + \vartheta), \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad \varphi \in \mathbb{H}.$$

Для доказательства теоремы нужно показать, что

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (\mathbf{U}_N - \mathbf{U}) \varphi = 0, \quad \varphi \in \mathbb{H}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} &((\mathbf{I} - \mathbf{V}_N)^{-1} \mathbf{K}_N \varphi)(\omega + \vartheta) - ((\mathbf{I} - \mathbf{V})^{-1} \mathbf{K} \varphi)(\omega + \vartheta) = \\ &= ((\mathbf{I} - \mathbf{V}_N)^{-1} (\mathbf{V}_N - \mathbf{V}) (\mathbf{I} - \mathbf{V})^{-1} \mathbf{K}_N \varphi)(\omega + \vartheta) + ((\mathbf{I} - \mathbf{V})^{-1} (\mathbf{K}_N - \mathbf{K}) \varphi)(\omega + \vartheta), \end{aligned}$$

$\vartheta \in [-\tau, 0], \varphi \in \mathbb{H}$. Поэтому осталось доказать следующее утверждение.

Лемма 4. *Последовательности операторов $\mathbf{V}_N: C([0, \omega], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([\omega - \tau, \omega], \mathbb{R}^n)$, $N \geq 1$, и $\mathbf{K}_N: \mathbb{H} \rightarrow C([\omega - \tau, \omega], \mathbb{R}^n)$, $N \geq 1$, сходятся, т.е.*

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{V}_N x &= \mathbf{V} x, \quad x \in C([0, \omega], \mathbb{R}^n), \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{K}_N \varphi &= \mathbf{K} \varphi, \quad \varphi \in \tilde{\mathbb{H}}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbb{H}}$ — множество функций, всюду плотное в $\mathbb{H}$.

Доказательство. Учитывая вид операторов $\mathbf{V}_N$ и $\mathbf{V}$, необходимо показать, что при $t \in [\omega - \tau, \omega]$ справедливо

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{A}^N(t, s) = \mathcal{A}(t, s)$$

при s , принадлежащем отрезку $[0, t]$, за исключением множества малой меры. Учитывая непрерывность функции $A_1(\cdot)$ и функции $A(\cdot, \cdot)$ по первому аргументу и используя для них модуль

непрерывности (см. [1, с. 17]), доказательство требуемого утверждения можно свести к обоснованию существования пределов

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_s^t \psi_N^N(s_1, s) ds_1 = \chi_{[-\tau, t-\tau]}(s),$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_s^t \psi^N(s_1, s, \vartheta_1) ds_1 = \chi_{[\vartheta_1, t+\vartheta_1]}(s),$$

при $t \in [\omega - \tau, \omega]$, $s \in [0, t]$, $\vartheta_1 \in [-\tau, 0]$, за исключением множества малой меры. Обоснование указанных утверждений приведено в [5, 8].

При доказательстве сходимости операторов $\mathbf{K}_N$, $N \geq 1$, требуется показать, что при $t \in [\omega - \tau, \omega]$ справедливо

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{\mathcal{A}}^N(t, \vartheta) = \hat{\mathcal{A}}(t, \vartheta)$$

при ϑ , принадлежащем отрезку $[-\tau, 0]$, за исключением множества малой меры. Учитывая непрерывность функции $A_1(\cdot)$ и функции $A(\cdot, \cdot)$ по первому аргументу, доказательство требуемого утверждения можно свести к обоснованию существования пределов

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^t \hat{\psi}_N^N(s, \vartheta) ds = \chi_{[-\tau, t-\tau]}(\vartheta),$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^t \hat{\psi}^N(s, \vartheta, \vartheta_1) ds = \chi_{[\vartheta_1, t+\vartheta_1]}(\vartheta),$$

при $t \in [\omega - \tau, \omega]$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $\vartheta_1 \in [-\tau, 0]$, за исключением множества малой меры. Последние утверждения обоснованы в [5, 8]. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердышев В. И., Субботин Ю. И. Численные методы приближения функций. — Свердловск: Средне-Уральское книжное изд-во, 1979.
2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
3. Долгий Ю. Ф. Характеристическое уравнение в задаче асимптотической устойчивости периодической системы с последействием // Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2005. — 11, № 1. — С. 85–96.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
5. Красовский Н. Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. мат. мех. — 1964. — 28, № 4. — С. 716–724.
6. Красовский Н. Н., Осипов Ю. С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1963. — 6. — С. 3–15.
7. Кряжиский А. В., Максимов В. И. Аппроксимация линейных дифференциально-разностных игр // Прикл. мат. мех. — 1978. — 42, № 2. — С. 202–209.
8. Куржанский А. Б. К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Диффер. уравн. — 1967. — 3, № 12. — С. 2094–2107.
9. Репин Ю. М. О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. мат. мех. — 1965. — 29, № 2. — С. 226–235.
10. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
11. Шиманов С. Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени // Прикл. мат. мех. — 1963. — 27, № 3. — С. 450–458.
12. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972.
13. Burns J. A., Clif E. Methods for approximating solutions to linear hereditary quadratic optimal control problems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1978. — 23, № 1. — P. 21–26.

14. *Delfour M. C.* The linear quadratic optimal control problem for hereditary differential systems: Theory and numerical solution// SIAM J. Appl. Math. Optim. — 1977. — 3, № 2. — P. 101–162.
15. *Gibson J. S.* Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations// SIAM J. Control Optim. — 1983. — 21, № 1. — P. 95–139.
16. *Pandolfi L.* Stabilization of neutral functional differential equations// J. Optim. Theory Appl. — 1976. — 20, № 2. — P. 191–204.

Долгий Юрий Филиппович

Уральский федеральный университет

им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург;

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского

Уральского отделения РАН, Екатеринбург

E-mail: Jury.Dolgy@urfu.ru

Шевченко Роман Иванович

Уральский федеральный университет

им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург

E-mail: oma170@hotmail.com