Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Елисеев, Т. А. Ратникова, Д. А. Шапошникова, Задача инициализации сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных и интегральных уравнений Вольтерра второго рода, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 191, 38–46

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-191-38-46>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 10:37:22

ЗАДАЧА ИНИЦИАЛИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА

© 2021 г. А. Г. ЕЛИСЕЕВ, Т. А. РАТНИКОВА, Д. А. ШАПОШНИКОВА

Аннотация. В статье при помощи метода регуляризации С. А. Ломова решена проблема инициализации для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных и интегральных систем уравнений Вольтерра второго рода.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, задача инициализации, метод регуляризации, интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра.

INITIALIZATION PROBLEM FOR SINGULARLY PERTURBED INTEGRO-DIFFERENTIAL AND INTEGRAL VOLTERRA EQUATIONS OF THE SECOND KIND

© 2021 А. G. ELISEEV, T. A. RATNIKOVA, D. A. SHAPOSHNIKOVA

ABSTRACT. The initialization problem for singularly perturbed integro-differential and integral systems of Volterra equations of the second kind is solved by the Lomov regularization method.

Keywords and phrases: singular perturbation, initialization problem, regularization method, Volterra integro-differential equation.

AMS Subject Classification: 34K26, 34E20

Задаче инициализации, возникшей первоначально в метрологии, посвящена обширная литература (см. [1, 3, 4]).

При малых числах Россби решение атмосферных моделей зависит от двух временных масштабов: «медленного» времени и «быстрого» времени t/ε , где ε — число Россби. Быстро осциллирующие члены в решении несущественны для прогноза погоды на больших интервалах времени. Поэтому возникает потребность в специальной процедуре — инициализации, которая подавляла бы быстро осциллирующие или быстро растущие волны масштабных разложений. В [4] доказана разрешимость задачи инициализации для двухслойной квазигеострофической модели общей циркуляции атмосферы. Построена полуявная спектрально-разностная схема.

В данной статье задача инициализации рассматривается с позиции метода регуляризации С. А. Ломова (см. [2]) для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных и интегральных систем уравнений Вольтерра второго рода.

1. Спектр предельного оператора чисто мнимый.

1.1. *Задача Коши для интегро-дифференциальной системы.* Пусть дана задача Коши для интегро-дифференциальной системы:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u}(t, \varepsilon) + A(t)u(t, \varepsilon) + \int_0^t K(t, s)u(s, \varepsilon)ds = h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0 \end{cases} \quad (1)$$

при следующих условиях:

$$\begin{aligned} h(t) &\in C^\infty([0, T]); \quad A(t) \in C^\infty([0, T]); \\ \operatorname{Sp}(A(t)) &= \{\pm i\lambda(t)\}, \quad \lambda(t) > 0; \\ K(t, s) &\in C^\infty \quad (0 \leq s \leq t \leq T); \\ A(t) &= \lambda_1(t)P_1(t) + \lambda_2(t)P_2(t), \quad P_1(t) + P_2(t) = I, \quad \lambda_1(t) = i\lambda(t), \quad \lambda_2(t) = -i\lambda(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Согласно методу регуляризации решение (1) имеет вид:

$$u(t, \varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi(t)}x(t, \varepsilon) + e^{-\frac{i}{\varepsilon}\varphi(t)}y(t, \varepsilon) + z(t, \varepsilon), \quad (3)$$

где

$$\varphi(t) = \int_0^t \lambda(s)ds,$$

$x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon) \in C^\infty[0, T]$ — регулярные по ε степенные ряды.

Для решения задачи инициализации надо подобрать такие начальные условия $u^0(\varepsilon)$, чтобы быстро осциллирующие составляющие решения $x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)$ обратились в ноль или их влияние было минимизировано.

Приведем алгоритм решения задачи. Будем искать решение в виде

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi(t)}x_k(t) + e^{-\frac{i}{\varepsilon}\varphi(t)}y_k(t) + z_k(t) \right) + \varepsilon^{n+1}R_n(t, \varepsilon). \quad (4)$$

Подставив (4) в систему (1), получим серию итерационных задач для определения $x_k(t), y_k(t), z_k(t)$ и задачу для определения остатка $R_n(t, \varepsilon)$.

Выпишем две итерационные задачи:

$$\begin{cases} (A(t) - \lambda_1(t)I)x_0(t) = 0, \\ (A(t) - \lambda_2(t)I)y_0(t) = 0, \\ A(t)z_0(t) + \int_0^t K(t, s)z_0(s)ds = h(t), \\ x_0(0) + y_0(0) + z_0(0) = u_0^0; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} (A(t) - \lambda_1(t)I)x_1(t) = -\dot{x}_0(t) - \frac{K(t, t)}{\lambda_1(t)}x_0(t), \\ (A(t) - \lambda_2(t)I)y_1(t) = -\dot{y}_0(t) - \frac{K(t, t)}{\lambda_2(t)}y_0(t), \\ A(t)z_1(t) + \int_0^t K(t, s)z_1(s)ds = -\dot{z}_0(t) + \frac{K(t, 0)}{\lambda_1(0)}x_0(0) + \frac{K(t, 0)}{\lambda_2(0)}y_0(0), \\ x_1(0) + y_1(0) + z_1(0) = u_1^0. \end{cases} \quad (6)$$

Решение (5) имеет вид:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= P_1(t)x_0(t), \quad y_0(t) = P_2(t)y_0(t), \\ z_0(t) &= \left(I + \int_0^t A^{-1}(t)K(t, s) \bullet ds \right)^{-1} A^{-1}(t)h(t) = D(t)H(t). \end{aligned}$$

Здесь

$$D(t) = \left(I + \int_0^t A^{-1}(t)K(t, s) \bullet ds \right)^{-1} A^{-1}(t) \frac{d}{dt}, \quad H(t) = \int_0^t h(s)ds.$$

Если выбрать в системе (5) начальное условие $u_0^0 = z_0(0) = D(t)H(t)|_{t=0}$, то $x_0(0) + y_0(0) = 0$. Произвольные собственные векторы $x_0(t)$, $y_0(t)$ определяются из условия разрешимости системы (6):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(P_1(t)x_0(t)) = \left(\dot{P}_1(t) - \frac{1}{\lambda_1(t)}P_1(t)K(t, t) \right) P_1(t)x_0(t) = 0, \\ P_1(0)x_0(0) = 0; \\ \frac{d}{dt}(P_2(t)y_0(t)) = \left(\dot{P}_2(t) - \frac{1}{\lambda_2(t)}P_2(t)K(t, t) \right) P_2(t)y_0(t) = 0, \\ P_2(0)y_0(0) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $P_1(t)x_0(t) \equiv 0$, $P_2(t)y_0(t) \equiv 0$. Начальные условия нулевые, так как мы выбрали

$$u_0^0 = D(t)H(t)|_{t=0} = A^{-1}(0)h(0).$$

Итерационная задача (6) относительно $x_1(t)$, $y_1(t)$ будет иметь вид (5). При этом

$$z_1(t) = -D^2(t)H(t), \quad u_1^0 = -D^2(t)H(t)|_{t=0}.$$

Тогда $x_1(t) \equiv 0$, $y_1(t) \equiv 0$. Продолжая этот процесс, получим формальное решение задачи инициализации

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n (-1)^k D^{(k+1)}(t)H(t) + \varepsilon^{n+1} R_n(t, \varepsilon).$$

Заметим, что сумма не содержит быстро осциллирующих слагаемых. Если взять в качестве начального условия

$$u^0(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k D^{(k+1)}(t)H(t)|_{t=0}, \quad (7)$$

то получим решение системы (1):

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k D^{(k+1)}(t)H(t).$$

Докажем асимптотичность полученного ряда, оценив остаток $R_n(t, \varepsilon)$ и тем самым оценив амплитуду быстрых осцилляций. Пусть

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \varepsilon^k D^{(k+1)}(t)H(t) + \varepsilon^{n+1} R_{n+1}(t, \varepsilon). \quad (8)$$

Задача для определения $R_n(t, \varepsilon)$ имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{R}_{n+1}(t, \varepsilon) + A(t)R_{n+1}(t, \varepsilon) + \int_0^t K(t, s)R_{n+1}(s, \varepsilon)ds = (-1)^{n+1} \frac{d}{dt} D^{(n+1)}(t)H(t), \\ R_{n+1}(0, \varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Несложно показать, что верна следующая теорема.

Теорема 1. *Рассмотрим на отрезке $[0, T]$ задачу (1) с начальным условием*

$$u^0(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k D^{(k+1)}(t) H(t) \Big|_{t=0}$$

и предположим, что выполнены условия (2). Тогда имеет место оценка

$$\left\| u(t, \varepsilon) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \varepsilon^k D^{(k+1)}(t) H(t) \right\|_{C[0, T]} = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Как следствие теоремы, амплитуда быстро осциллирующих слагаемых уменьшена до $O(\varepsilon^{n+1})$. Учитывая, что спектр оператора чисто мнимый, легко показать, что $\|R_{n+1}\|_{C[0, T]} \leq M$. Таким образом, амплитуда быстро осциллирующих решений не превышает $M\varepsilon^{n+1}$. Используя такой подход, можно уменьшать влияние быстро осциллирующих слагаемых на решение интегро-дифференциальных систем Вольтерра второго рода.

1.2. Интегральная система Вольтерра второго рода. Интегральная система Вольтерра второго рода с чисто мнимым спектром предельного оператора

$$\varepsilon u(t, \varepsilon) + \int_0^t K(t, s) u(s, \varepsilon) ds = h(t), \quad (9)$$

сводится к эквивалентной интегро-дифференциальной системе

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u}(t, \varepsilon) + A(t) u(t, \varepsilon) + \int_0^t \dot{K}(t, s) u(s, \varepsilon) ds = \dot{h}(t), \\ u(0, \varepsilon) = \frac{h(0)}{\varepsilon}, \end{cases} \quad (10)$$

где $A(t) \equiv K(t, t)$.

Пусть выполнены условия (2) для задачи (10). Специфика задачи (10) состоит в том, что начальные условия диктуются правой частью (9). Для того чтобы убрать быстро осциллирующие слагаемые в решении (10), поставим задачу Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u}(t, \varepsilon) + A(t) u(t, \varepsilon) + \int_0^t \dot{K}(t, s) u(s, \varepsilon) ds = \dot{h}(t), \\ u(0, \varepsilon) = \frac{h(0)}{\varepsilon} + u^0(\varepsilon), \end{cases} \quad (11)$$

где

$$u^0(\varepsilon) = -\frac{h(0)}{\varepsilon} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k D^{(k+1)}(t) h(t) \Big|_{t=0}.$$

Здесь

$$D(t) = \left(I + \int_0^t A^{-1}(t) K(t, s) \bullet ds \right)^{-1} A^{-1}(t) \frac{d}{dt}.$$

Тогда формальное решение (11) запишется в виде

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k D^{(k+1)}(t) h(t). \quad (12)$$

Асимптотичность ряда (12) доказывается аналогично.

Замечание. Если $D^{(k+1)}(t) h(t) \Big|_{t=0} = 0$ для всех $k = -1, 0, 1, \dots$, то решение (10) автоматически не будет содержать быстро осциллирующих компонент.

2. Спектр предельного оператора содержит положительное собственное значение. Специфику решения задачи инициализации в этом случае можно прояснить на скалярном интегро-дифференциальном и интегральном уравнениях Вольтерра второго рода. Пусть дана задача Коши

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u}(t, \varepsilon) - \lambda(t)u(t, \varepsilon) + \int_0^t K(t, s)u(s, \varepsilon)ds = h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0(\varepsilon). \end{cases} \quad (13)$$

при условиях

$$\begin{aligned} h(t) &\in C^\infty[0, T]; & K(t, s) &\in C^\infty \quad (0 \leq s \leq t \leq T); \\ \lambda(t) &\in C^\infty[0, T]; & \lambda(t) &> 0, \quad t \in [0, T]; \end{aligned} \quad (14)$$

$u^0(\varepsilon)$ подлежит определению.

Решение (13) по методу регуляризации запишется в виде

$$u(t, \varepsilon) = \exp\left(\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right) x(t, \varepsilon) + y(t, \varepsilon), \quad \text{где} \quad \varphi(t) = \int_0^t \lambda(s)ds,$$

$x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon) \in C^\infty[0, T]$; $x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)$ — регулярные по ε степенные ряды. Для решения задачи инициализации необходимо подобрать $u^0(\varepsilon)$ таким образом, чтобы $x(t, \varepsilon) \equiv 0$.

Если положить

$$u^0(\varepsilon) = - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D^{(k+1)}(t)H(t)|_{t=0}, \quad \text{где} \quad H(t) = \int_0^t h(s)ds,$$

то формальное решение (13) запишется в виде

$$u(t, \varepsilon) = - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D^{(k+1)}(t)H(t). \quad (15)$$

где

$$D(t) = \left(1 - \int_0^t \frac{1}{\lambda(t)} K(t, s) \bullet ds\right)^{-1} \frac{1}{\lambda(t)} \frac{d}{dt}.$$

Существенное отличие от случая с чисто мнимым спектром состоит в том, что здесь необходимо найти весь ряд $u^0(\varepsilon)$ и найти условия для $h(t)$, при которых ряд (15) сходится. В противном случае нельзя провести оценку остатка при доказательстве асимптотичности ряда (15) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Добавим к условиям (14) условие на правую часть, а именно:

$$\exists \nu > 0 \exists C > 0 \forall t \in [0, T] \quad |D^k(t)H(t)| \leq C\nu^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Тогда ряд (15) сходится равномерно, а следовательно, является асимптотическим.

Рассмотрим случай интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\varepsilon u(t, \varepsilon) + \int_0^t K(t, s)u(s, \varepsilon)ds = h(t). \quad (17)$$

Сводим (17) к эквивалентной интегро-дифференциальной задаче Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u}(t, \varepsilon) - \lambda(t)u(t, \varepsilon) + \int_0^t \dot{K}(t, s)u(s, \varepsilon)ds = \dot{h}(t), \\ u(0, \varepsilon) = \frac{h(0)}{\varepsilon}, \end{cases} \quad (18)$$

где $\lambda(t) \equiv -K(t, t)$. Предполагается, что для (18) выполнены условия (14). Условие (16) заменяется на

$$\exists \nu > 0 \exists C > 0 \forall t \in [0, T] \quad |D^k(t)h(t)| \leq C\nu^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$D(t) = \left(1 - \int_0^t \frac{1}{\lambda(s)} \dot{K}(t, s) \bullet ds \right)^{-1} \frac{1}{\lambda(t)} \frac{d}{dt}.$$

Тогда задача Коши

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u}(t, \varepsilon) - \lambda(t)u(t, \varepsilon) + \int_0^t \dot{K}(t, s)u(s, \varepsilon)ds = \dot{h}(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0(\varepsilon), \end{cases} \quad (19)$$

где

$$u^0(\varepsilon) = -\frac{h(0)}{\varepsilon} - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D^{(k+1)}(t)h(t) \Big|_{t=0},$$

в своем решении не содержит экспоненциально растущих слагаемых.

Решение (19) примет вид

$$u(t, \varepsilon) = -\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D^{(k+1)}(t)h(t). \quad (20)$$

Замечание. Если выбрать $h(t)$ из условия, что $D^n(t)h(t) \equiv 0$, то решение получится в виде конечной суммы:

$$u(t, \varepsilon) = -\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k D^k(t)h(t).$$

Как отмечалось выше, в случае $\lambda(t) > 0$ для решения задачи инициализации необходимо и достаточно выполнение условий

$$u^0(\varepsilon) = -\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D^{(k+1)}(t)H(t) \Big|_{t=0}$$

для задачи (13) или

$$u^0(\varepsilon) = -\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D^{(k+1)}(t)h(t) \Big|_{t=0} - \frac{h(0)}{\varepsilon}$$

для уравнения (17).

Возникает вопрос: как работать с таким решением? Для этого оценим остаток. Подставим

$$u(t, \varepsilon) = -\sum_{k=0}^n \varepsilon^k D^k(t)h(t) + \varepsilon^{n+1}R_{n+1}(t, \varepsilon)$$

в задачу (19) и получим

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{R}_{n+1}(t, \varepsilon) - \lambda(t)R_{n+1}(t, \varepsilon) + \int_0^t \dot{K}(t, s)R_{n+1}(s, \varepsilon)ds = -\frac{d}{dt}D^n(t)h(t), \\ R_{n+1}(0, \varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Пусть

$$R_{n+1}(t, \varepsilon) = \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda(s)ds \right) r_n(t, \varepsilon).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{r}_n + \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda(s) ds \right) \int_0^t \dot{K}(t, s) \exp \left(\int_0^s \lambda(s_1) ds_1 \right) r_n(s) ds = \\ = - \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda(s) ds \right) \frac{d}{dt} D^n(t) h(t). \end{aligned}$$

Проинтегрируем по t и изменим порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} \varepsilon r_n = \varepsilon r_n(0) - \int_0^t \int_s^t \dot{K}(s_1, s) \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^{s_1} \lambda(s_2) ds_2 \right) ds_1 r_n(s) ds - \\ - \int_0^t \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \lambda(s_1) ds_1 \right) \frac{d}{ds} D^n(s) h(s) ds. \quad (21) \end{aligned}$$

Учитывая, что $\lambda(t) \geq \delta > 0$, оценим (21) по норме $\mathbb{C}[0, T]$. В результате получим, что $\|r_n\| \leq C$. Отсюда

$$\|R_n\| \leq C \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda(s) ds \right).$$

Учитывая, что $\delta \leq \lambda(t) \leq M$ на $[0, T]$, получим

$$\|R_n\| \leq C e^{MT/\varepsilon}.$$

Тогда

$$\varepsilon^{n+1} \|R_n\| \leq \varepsilon^{n+1} C e^{MT/\varepsilon}.$$

Минимум оценки, равный $\left(\frac{eMT}{n+1} \right)^{n+1}$, достигается при $\varepsilon^* = \frac{MT}{n+1}$. Задав точность δ , т.е. положив $\left(\frac{eMT}{n+1} \right)^{n+1} = \delta$, получим

$$\varepsilon = \frac{1}{e} {}^{n+1}\sqrt{\delta},$$

либо, задав ε , подбираем

$$n = \left\lceil \frac{eMT}{\varepsilon} - 1 \right\rceil.$$

В заключение рассмотрим, каким условиям должна удовлетворять $h(t)$, чтобы задача инициализации решалась без подбора начального условия $u^0(\varepsilon)$. Введем оператор

$$B(t) = \lambda(t) - \int_0^t K(t, s) \bullet ds.$$

Теорема 2. Пусть $h(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- (1) функция $h(t)$ является B -аналитичной для всех $t \in [0, T]$, за исключением точки $t = 0$;
- (2) $D^k(t)h(t)|_{t=0} = 0$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$;
- (3) для всех $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнена обратная теорема Абеля в точке $t = 0$:

$$\lim_{s \rightarrow 0+} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_t^s B(s_1) ds_1 \right)^k D^k(t)h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_t^0 B(s_1) ds_1 \right)^k D^k(t)h(t) = 0.$$

Тогда ряд

$$u(t, \varepsilon) = - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D^{(k+1)} h(t)$$

является решением задачи (17).

Доказательство. Разложим B -аналитичную функцию $h(t)$ в ряд

$$h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_t^s B(s_1) ds_1 \right)^k D^k(t) h(t).$$

Здесь

$$B(t) = \lambda(t) - \int_0^t \dot{K}(t, s) \bullet ds; \quad (22)$$

$$D(t) = B^{-1}(t) \frac{d}{dt} = \left(1 - \int_0^t \frac{1}{\lambda(t)} \dot{K}(t, s) \bullet ds \right)^{-1} \frac{1}{\lambda(t)} \frac{d}{dt}; \quad (23)$$

$$\left(\int_t^s B(s_1, \varepsilon) ds_1 \right)^k = \int_t^s B(s_1) \int_t^{s_1} B(s_2) \cdots \int_t^{s_{k-1}} B(s_k) ds_k \cdots ds_1. \quad (24)$$

Решение (18) запишется в виде

$$u(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U(t, s) \dot{h}(s) ds,$$

где $U(t, s)$ — разрешающий оператор, удовлетворяющий уравнению

$$\varepsilon \dot{U}(t, s) = B(t) U(t, s), \quad U(t, s)|_{s=t} = I.$$

Тогда верна цепочка равенств

$$u(t, s) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U(t, s) \dot{h}(s) ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U(t, s) \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_t^s B(s_1) ds_1 \right)^k ds D^k(t) h(t).$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U(t, s) \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_t^s B(s_1) ds_1 \right)^k ds D^k(t) h(t) = \\ & = -U(t, s) \left(\int_t^s B(s_1) ds_1 \right)^{k-1} \Big|_0^t D^k(t) h(t) + \int_0^t U(t, s) \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_t^s B(s_1) ds_1 \right)^{k-1} ds D^k(t) h(t) = \\ & = U(t, 0) \left(\int_t^0 B(s_1) ds_1 \right)^{k-1} D^k(t) h(t) + \int_0^t U(t, s) \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_t^s B(s) ds \right)^{k-1} ds D^k(t) h(t) = \\ & = \dots = U(t, 0) \sum_{m=0}^{k-1} \varepsilon^{k-1-m} \left(\int_t^0 B(s) ds \right)^m D^k(t) h(t) - \varepsilon^{k-1} D^k(t) h(t). \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned}
u(t, \varepsilon) &= U(t, 0) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-1} \varepsilon^{k-1-m} \left(\int_t^0 B(s) ds \right)^m D^k(t) h(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k-1} D^k(t) h(t) = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_t^0 B(s) ds \right)^k D^{(k+(m+1))}(t) h(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D^{(k+1)}(t) h(t) = \\
&= - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D^{(k+1)}(t) h(t).
\end{aligned}$$

Первое слагаемое равно нулю в силу условий (23) и (24):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_t^0 B(s) ds \right)^k D^{(k+(m+1))}(t) h(t) = D^{(m+1)}(0) h(0) = 0,$$

что и требовалось доказать. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филатов А. Н., Шершиков В. В.* Асимптотические методы в атмосферных моделях. — Л.: Гидрометеоиздат, 1988.
2. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
3. *Елисеев А. Г., Шапошникова Д. А.* Задача инициализации сингулярно возмущенного интегрального уравнения Вольтерра второго рода с диагональным вырождением в случае $n \geq 3$ // Вестн. МЭИ. — 2015. — 3. — С. 143–144.
4. *Ипатова В. М.* Задачи инициализации для моделей общей циркуляции атмосферы // Тр. МФТИ. — 2012. — 4, № 2. — С. 121–130.

Елисеев Александр Георгиевич

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

E-mail: eliseevag@mpei.ru

Ратникова Татьяна Анатольевна

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

E-mail: ratnikovata@mpei.ru

Шапошникова Дарья Алексеевна

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

E-mail: shaposhnikovda@mail.ru