Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Засорин, О корректной разрешимости задач Коши для нестационарных уравнений с невыделенной старшей производной по времени и определении следа распределения на гиперплоскости начальных данных, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 191, 47–73

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-191-47-73>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:13:27

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ
ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ
С НЕВЫДЕЛЕННОЙ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ
И ОПРЕДЕЛЕНИИ СЛЕДА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
НА ГИПЕРПЛОСКОСТИ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

© 2021 г. Ю. В. ЗАСОРИН

Аннотация. Рассматривается проблема корректной разрешимости задач Коши для нестационарных уравнений в частных производных с невыделенными старшими производными по времени и имеющих вырождение при этих старших производных. С этой целью вводится определение следа на гиперплоскости начальных данных для распределений с полуограниченными носителями, позволяющее установить ряд свойств решения, обеспечивающих корректную разрешимость рассматриваемых задач.

Ключевые слова: нестационарное уравнение, невыделенная старшая производная, задача Коши, неединственность, фокусировка решения, корректная разрешимость, сужение, след распределения.

ON THE WELL-POSEDNESS
OF CAUCHY PROBLEMS FOR NONSTATIONARY EQUATIONS
WITH THE UNSELECTED HIGHEST TIME DERIVATIVE
AND THE DEFINITION OF THE TRACE OF DISTRIBUTION
ON THE HYPERPLANE OF THE INITIAL DATA

© 2021 YU. V. ZASORIN

ABSTRACT. In this paper, we examine the well-posedness of Cauchy problems for nonstationary partial differential equations with nonselected highest time derivatives that have degeneration by these derivatives. For this purpose, we introduce the notion of the trace on the initial data hyperplane for distributions with semi-bounded supports, which allows one to establish some properties of the solution that ensure the well-posedness of the problems considered.

Keywords and phrases: nonstationary equation, unselected highest derivative, Cauchy problem, nonuniqueness, solution focusing, well-posedness, restriction, trace of distribution.

AMS Subject Classification: 35J15

1. О проблемах, связанных с уравнениями с невыделенной старшей производной по времени. Уравнение

$$L(D)u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

где

$$L(D) \equiv L(D_x, D_t) = \sum_{k=0}^m P_k(D_x) D_t^k, \quad P_k(D_x) = \sum_{|\alpha| \leq N(k)} a_{k,\alpha} D_x^\alpha, \quad a_{k,\alpha} = \text{const} \in \mathbb{C}, \quad (1.2)$$

(здесь $D = \{D_x, D_t\}$, $D_x = \{D_1, \dots, D_n\}$, $D_{(\cdot)} = \partial/\partial(\cdot)$, $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — целочисленный мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$), называется *нестационарным*, если все корни $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнения

$$L(i\xi, \lambda) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (1.3)$$

имеют неположительные вещественные части: $\text{Re}(\lambda) \leq 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, таких, что полином $L(i\xi, \lambda)$ не обращается в тождественную константу относительно переменной λ .

Далее, уравнение (1.1) называется (см., например, [4]) *неразрешенной относительно старшей производной по времени* или *уравнением с невыделенной старшей производной по времени*, если дифференциальный полином $P_m(D_x)$ из формулы (1.2) не равен тождественно константе. Конкретные примеры таких уравнений (уравнение С. Л. Соболева, нестационарное вязкое трансзвуковое уравнение, уравнение Кадомцева—Петвиашвили, целый класс уравнений Кельвина—Фойгхта и т. д.) можно найти в [3, 5–13, 15, 17] (см. также ссылки в них). Кроме того, эти уравнения являются частным случаем так называемых *дифференциально-алгебраических уравнений* (см., например, [2]), повышенный интерес к которым наблюдается с начала 2000-х годов. При этом, если символ $P_m(i\xi)$ оператора $P_m(D)$ не имеет вещественных нулей, то такой случай называется *невыврожденным*, а в противном случае — *вырожденным*. Если невырожденный случай уравнения (1.1) принципиально ничем не отличается от случая $P_m(D) \equiv \text{const}$, который изучен достаточно полно (см., например, [18]), то в вырожденном случае возникает ряд серьезных проблем уже на этапе исследования корректной разрешимости задач Коши (см. также [4]). При этом сами задачи Коши для уравнения (1.1) могут иметь достаточно разнообразные системы начальных условий:

$$(D_t^k u)|_{t=+0} = h_k(x), \quad k = \overline{0; m-1}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

или

$$(D_t^k u)|_{t=+0} = h_k(x), \quad k = \overline{0; m-2}, \quad (P_m(D_x) D_t^{m-1} u) = h_{m-1}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.5)$$

или

$$(D_t^k u)|_{t=+0} = h_k(x), \quad k = \overline{0; m-2}, \quad (P'_m(D_x) D_t^{m-1} u) = h_{m-1}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.6)$$

если полином $P_m(D_x)$ допускает разложение

$$P_m(D_x) = P'_m(D_x) P''_m(D_x). \quad (1.7)$$

Следует отметить важнейший случай задачи Коши (1.1), (1.5), рассматриваемой в классе $S'(\mathbb{R}_+^{n+1})$:

$$\begin{cases} L(D)E(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ (D_t^k E)|_{t=+0} = 0, & k \in \overline{0; m-2}, \\ (D_t^{m-1} E)|_{t=+0} = \delta(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.8)$$

где $\delta(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$ — дельта-функция Дирака, а $S'(\mathbb{R}_+^{n+1}) \subset S'(\mathbb{R}^{n+1})$ — подпространство распределений $T(x, t)$, для которых $\text{supp}(T) \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$, где

$$bR_+^{n+1} = \{(x, t) \in bR^{n+1} \mid x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}.$$

Кратко перечислим главные проблемы, связанные с корректной разрешимостью задач Коши для уравнения (1.1).

1.1. Проблемы классов корректности. Сразу же следует отметить, что ни классическая разрешимость, ни разрешимость в каких-либо пространствах С. Л. Соболева не имеет места для ряда нестационарных уравнений с *обратимым временем* из-за так называемого *эффекта фокусировки решений*. Проиллюстрируем на примере, о чем идет речь.

Пример 1.1. Полагая $n = 1$, $m = 1$, рассмотрим в классе $S'(\bar{\mathbb{R}}_+^2)$ задачу Коши для линейризованного уравнения Кортевега—де Фриза:

$$\begin{cases} L(D)u(x, t) \equiv (D_t - D_x^3)u(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=+0} = h(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.9)$$

где $u \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+^2)$, $h \in S'(\mathbb{R})$. Фундаментальное решение Коши $E(x, t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+^2)$ для рассматриваемого уравнения имеет следующий вид:

$$E(x, t) = \frac{\Theta(t)}{(3t)^{1/3}} \text{Ai}\left(-\frac{x}{(3t)^{1/3}}\right), \quad (1.10)$$

где $\Theta(t)$ — функция Хэвисайда, а $\text{Ai}(z)$ — функция Эйри 1-го рода (см., например, [16]) и удовлетворяет в классе $S'(\mathbb{R}^2)$ уравнению

$$L(D)E(x, t) \equiv (D_t - D_x^3)E(x, t) = \delta(x) \otimes \delta(t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.11)$$

(см., например, [9]). При этом распределение $E(x, t)$ может быть продолжено на $\{t < 0\}$ до распределения $V_{\pm}(x, t) \in S'(\mathbb{R}^2)$, например, равенствами

$$\begin{cases} V_+(x, t) \triangleq E(x, t) + E(-x, -t) \equiv \frac{1}{|3t|^{1/3}} \text{Ai}\left(-\frac{x}{(3t)^{1/3}}\right), \\ V_-(x, t) \triangleq E(x, t) - E(-x, -t) \equiv \frac{\text{sgn}(t)}{|3t|^{1/3}} \text{Ai}\left(-\frac{x}{(3t)^{1/3}}\right). \end{cases} \quad (1.12)$$

Объединяя равенства (1.8), (1.9), (1.11) и (1.12), получаем, что

$$L(D)V_{\pm}(x, t) \equiv (D_t - D_x^3)V_{\pm}(x, t) = \begin{cases} 0 \\ 2\delta(x) \otimes \delta(t) \end{cases}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.13)$$

Фиксируем теперь произвольные $x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 > 0$ и целые неотрицательные α, β , положим

$$h(x) = D_x^{\alpha} D_t^{\beta} E(x_0 - x, t_0) \equiv D_x^{\alpha} D_t^{\beta} V_+(x - x_0, -t_0) \equiv -D_x^{\alpha} D_t^{\beta} V_-(x - x_0, -t_0), \quad (1.14)$$

$$u_+(x, t) = D_x^{\alpha} D_t^{\beta} V_+(x - x_0, t - t_0), \quad u_-(x, t) = -D_x^{\alpha} D_t^{\beta} V_-(x - x_0, t - t_0). \quad (1.15)$$

Из (1.13) и (1.15) немедленно получаем, что

$$L(D)u_+(x, t) \equiv (D_t - D_x^3)u_+(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.16)$$

$$L(D)u_-(x, t) \equiv (D_t - D_x^3)u_-(x, t) = -2D_x^{\alpha} \delta(x - x_0) \otimes D_t^{\beta} \delta(t - t_0), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.17)$$

Заметим теперь, что поскольку $\text{Ai}(z) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, то в силу формул (1.10), (1.12), (1.14) и (1.15), во-первых, следует, что и $h(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, и, во-вторых, $u_{\pm}(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2 \setminus \{t = t_0\})$, а следовательно, корректно обосновывается предельный переход $u_{\pm}|_{t=t_0 \pm 0}$, например, как предел

$$\langle u_{\pm}|_{t=t_0 \pm 0} \varphi \rangle_1 \triangleq \lim_{t \rightarrow t_0 \pm 0} \langle u_{\pm}(x, t); \varphi(x) \rangle_1, \quad \varphi(\cdot) \in S(\mathbb{R}),$$

по параметру t , где $\langle \cdot; \cdot \rangle_1$ означает внешнюю линейную форму в $S'(\mathbb{R})$. Поскольку (ср. формулы (1.8) и (1.9))

$$E|_{t=+0} = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

то в силу (1.12) при $\beta = 0$ имеем

$$u_+|_{t=t_0 \pm 0} = D_x^{\alpha} \delta(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.18)$$

$$u_-|_{t=t_0 \pm 0} = \mp D_x^{\alpha} \delta(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.19)$$

т.е. распределения $V_{\pm}(x, t)$ могут иметь в точке x_0 сингулярности как угодно высокого порядка (см. (1.10) и (1.12)). При этом выполнение равенств (1.17) и (1.18) (при $\alpha = 0$) принято называть

классической фокусировкой решения (или фокусировкой решения без выделения и поглощения энергии) и фокусировкой решения с выделением или поглощением энергии (см. [15]).

Отметим, что распределение $u_-(x, t)$ не является решением задачи Коши (1.9), поскольку (см. формулу (1.10)) не удовлетворяет *однородному* уравнению в $\mathbb{R}_+^2$, зато распределение $u_+(x, t)$ является решением этой задачи в классе $S'(\bar{\mathbb{R}}_+^2)$, но при этом не является ни классическим решением, ни элементом какого-либо пространства С. Л. Соболева, включающего в себя обобщенные функции с порядком сингулярности менее чем α . Отсюда следует вывод: задача Коши (1.9) в общем случае не является корректно разрешимой ни в классической постановке, ни в каком-либо пространстве С. Л. Соболева. Те же самые выводы следуют и для задач Коши, связанных с уравнением (1.1): минимальным классом, обеспечивающим их разрешимость, является класс $S'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$.

Замечание 1.1. Справедливости ради следует отметить, что не все нестационарные уравнения с обратимым временем обладают эффектом (классической) фокусировки решения. К числу исключений относится, например, уравнение с оператором $L(D) = D_t + aD_x$, $a \in \mathbb{R}$. Впрочем, другие исключения автору неизвестны.

Замечание 1.2. Рассмотренный выше пример задачи Коши для линеаризованного уравнения Кортевега—де Фриза относится к случаю нестационарных уравнений с *выделенной старшей производной по времени*. Убедиться в том, что эффектом классической фокусировки решения обладают многие нестационарные уравнения с *невыделенной старшей производной по времени* читатель может на многочисленных примерах, приведенных в [8, 13, 15].

Замечание 1.3. Может возникнуть иллюзия, что проблемы разрешимости задач Коши, связанных с уравнением (1.1), возникают лишь для тех из них, в которых время обратимо. Забегая вперед, отметим, что это не так. В дальнейшем будет показано, что для уравнений с невыделенной старшей производной по времени возникают и проблемы, связанные с поведением их решений на бесконечности, которое будет в конечном итоге использовано для проблемы единственности. Например, их решения могут недостаточно быстро убывать на бесконечности (или вообще убывать лишь по некоторым направлениям и неограниченно расти по другим), что не дает возможности включать их в какое-либо пространство С. Л. Соболева. Наконец, само их убывание на бесконечности может быть интерпретировано лишь в смысле теории распределений, что исключает их классическую разрешимость.

1.2. Проблема единственности решения. Сразу же отметим, что для задач Коши в классе $S'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ в случае нестационарных уравнений с выделенной старшей производной по времени (или — для уравнений с невыделенной старшей производной в неособом случае) такой проблемы не существует: применение преобразования Фурье по пространственным переменным просто сводит их к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, решение $\hat{u}(\xi, t)$ которых всегда единственно. Для уравнений с невыделенной старшей производной по времени в особом случае эта проблема является едва ли не самой главной, в чем легко убедиться на следующем простейшем примере.

Пример 1.2. Пусть $n = 1$ и $L(D) = D_x D_t$. Рассмотрим уравнение

$$L(D)u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (1.20)$$

с условием

$$u|_{t=+0} = h(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.21)$$

или

$$(D_x u)|_{t=+0} = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.22)$$

Пусть $u(x, t)$ — решение задачи Коши (1.20), (1.22). Тогда $u_1(x, t) = u(x, t) + 1(x) \otimes T(t)$, где $T(t)$ — произвольное распределение из $S'(\mathbb{R}_+)$ также является решением этой задачи. Такая же ситуация справедлива и для задачи Коши (1.20), (1.21), с той лишь разницей, что распределение $T(t) \in S'(\mathbb{R}_+)$ должно удовлетворять ограничению $T|_{t=+0} = 0$.

Проблема неединственности решения может быть решена различными способами (см. [6–13]). Автор настоящей работы предлагает решать ее подбором подходящих ограничений на поведение решения на бесконечности. Так, например, для задач Коши (1.20), (1.21) и (1.20), (1.22) из последнего примера можно добавить условие

$$u(x, t) = o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (1.23)$$

что немедленно устраняет проблему неединственности решения. При этом следует отметить, что в случае задачи Коши (1.20), (1.22) условие (1.23) оказывается слишком жестким, делая ее *неразрешимой*. Действительно, полагая, например, $h(x) = \delta(x)$ и замечая что в этом случае все решения задачи Коши (1.20), (1.22) описываются формулой

$$u(x, t) = E(x, t) = (\Theta(x) + C) \otimes \Theta(t), \quad C \equiv \text{const}, \quad (1.24)$$

немедленно убеждаемся, что ни один представитель семейства (1.23) не удовлетворяет условию (1.23). Однако, если в этом условии заменить $x \rightarrow \pm\infty$ на $x \rightarrow +\infty$ или на $x \rightarrow -\infty$, то теперь эта задача будет уже разрешимой, причем единственным образом:

$$u(x, t) = E(x, t) = -\Theta(-x) \otimes \Theta(t) \quad (1.25)$$

в первом случае и

$$u(x, t) = E(x, t) = \Theta(x) \otimes \Theta(t) \quad (1.26)$$

во втором.

Впрочем, выбор подходящих условий регулярности решения на бесконечности — особая тема, к которой мы будем возвращаться неоднократно.

1.3. Проблема интерпретации уравнения и начальных условий. Как было упомянуто выше, в случае нестационарного уравнения с выделенной старшей производной по времени или в неособом случае уравнения с невыделенной старшей производной переход от $u(x, t)$ к его Фурье-образу $\hat{u}(\xi, t)$ сводит задачи Коши для уравнений (1.1) фактически к случаю обыкновенных дифференциальных уравнений, поэтому и само уравнение, и начальные условия могут быть интерпретированы в обычном (классическом) смысле. В особом случае переход к Фурье-образам решений уже не помогает, поскольку соответствующее трансформированное уравнение

$$L(i\xi, D_t)\hat{u}(\xi, t) \equiv \sum_{k=0}^m P_k(i\xi)D_t^k\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi, t), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1.27)$$

как минимум, меняет свой порядок m на меньший в точках $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, в которых $P_m(i\xi) = 0$, а поэтому задачи Коши для него теряют смысл (а то и вообще становится неразрешимым, если все полиномы $P_k(i\xi_0)$, $k \in \overline{0; m}$, обращаются в ноль одновременно). Поэтому уравнение (1.1) следует рассматривать в классе $S'(\mathbb{R}_+^{n+1})$, понимая его в том смысле, что

$$\langle u(x, t); L^*(D_x, D_t)\varphi(x, t) \rangle_{n+1} = \langle f(x, t); \varphi(x, t) \rangle_{n+1} \quad (1.28)$$

для всех $\varphi(x, t) \in S(\mathbb{R}^{n+1})$, таких что $\text{supp}(\varphi) \in \bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}$, где $L^*(D_x, D_t) = L(-D_x, D_t)$, а $\langle \cdot; \cdot \rangle_{n+1}$ означает внешнюю линейную форму в $S'(\mathbb{R}^{n+1})$. Но из формулы (1.1) следует, что если распределение $u(x, t)$ будет решением уравнения (1.1) с каким-либо фиксированным $f(x, t)$, то оно же будет удовлетворять этому же уравнению и с любым другим $f_1(x, t)$, отличающимся от $f(x, t)$ на распределение с носителем, локализованным на гиперплоскости $\{t = 0\}$.

Аналогичная ситуация справедлива и для решения $u(x, t)$ уравнения (1.1): оно останется решением этого же уравнения, если мы будем произвольно изменять его на гиперплоскости $\{t = 0\}$. Не меняет положение и наличие начальных условий (1.4), (1.5) или (1.6), поскольку в классе $S'(\mathbb{R}_+^{n+1})$ их можно понимать лишь в смысле предельного перехода (например, как пределы по параметру $t \rightarrow +0$.) В частности, равенство

$$(D_t^k u)|_{t=+0} = h_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.29)$$

можно понимать в том смысле, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} D_t^k \langle u(x, t); \varphi(x) \rangle_n = \langle h_k(x); \varphi(x) \rangle_n \quad \forall \varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n), \quad (1.30)$$

где $h_k(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$, а $\langle \cdot; \cdot \rangle_n$ означает линейную форму в $S'(\mathbb{R}^n)$. Но из формулы (1.30) следует, что условие (1.29) никак не связано со структурой распределения $u(x, t)$ на гиперплоскости $\{t = 0\}$.

Кроме того, и сама интерпретация начальных условий как предельного перехода по параметру t (см. формулу (1.30)) может оказаться слишком сильным допущением, поскольку предполагает непрерывность распределения $u(x, t)$ по переменной t в точке $+0$. Например, из-за описанного выше эффекта фокусировки решений (см. формулу (1.17)) распределение $u(x, t)$ может содержать счетное число компонент $D_x^\alpha \delta(x - x_l) \otimes D_t^\beta \delta(t - t_l)$, причем последовательность $\{t_l\}$ может иметь $+0$ своей предельной точкой, что делает формулу (1.30) непригодной для корректной интерпретации начальных условий. Таким образом, необходимо ввести понятие *следа распределения* на гиперплоскости $\{t = 0\}$ более слабое, чем предельный переход по параметру $t \rightarrow +0$, позволяющий корректно определять условия вида (1.29) и при наличии у распределения $u(x, t)$ счетного числа компонент типа $D_x^\alpha \delta(x - x_l) \otimes D_t^\beta \delta(t - t_l)$.

2. Сужение распределения и его свойства. Сначала введем класс $\mathcal{U}_+ = \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, состоящих из распределений $T(x, t)$, однозначно определяемых своими сужениями $T_+(x, t)$ на верхнее полупространство $\mathbb{R}_+^{n+1}$ и совпадающих со своими сужениями $T_+(x, t)$ на верхнее полупространство $\mathbb{R}_+^{n+1}$: $T(x, t) = T_+(x, t)$. При этом класс $\mathcal{U}_+$ должен удовлетворять следующей аксиоматике:

1. Класс $\mathcal{U}_+$ должен иметь структуру линейного пространства (в частности, он должен содержать нулевой функционал).
2. Для любых двух распределений $T_{1,+}, T_{2,+} \in \mathcal{U}_+$, удовлетворяющих равенству

$$\langle T_{1,+}(x, t); \varphi(x, t) \rangle_{n+1} = \langle T_{2,+}(x, t); \varphi(x, t) \rangle_{n+1} \quad (2.1)$$

для всех $\varphi(x, t) \in S(\mathbb{R}^{n+1})$, таких, что из $\text{supp}(\varphi) \subset \bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}$ следует, что $T_{1,+} = T_{2,+}$.

(Как следствие из аксиом 1 и 2, если распределение $T_+ \in \mathcal{U}_+$ равно нулю в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, то оно равно нулю и на всем $\mathbb{R}^{n+1}$. В чем легко убедиться, положив $T_+ = T_{1,+} - T_{2,+}$ и воспользоваться формулой (2.1).)

3. Класс $\mathcal{U}_+$ должен быть заведомо шире, чем подпространство регулярных распределений $L_1^{loc}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}) \cap S'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, и, кроме того, у распределений $T_+(x, t) \in \mathcal{U}_+$ не предполагается непрерывность по какой-либо переменной (в частности, по переменной t). В то же время не предполагается, что класс $\mathcal{U}_+$ должен быть максимальным классом, удовлетворяющим аксиомам 1 и 2.
4. Для любого уравнения (1.1), удовлетворяющего ограничению (1.3), класс $\mathcal{U}_+$ должен содержать хотя бы одно фундаментальное решение $E(x, t)$ этого уравнения (см. формулу (1.8)).

Замечание 2.1. Из формулы (2.1) следует, в частности, что, например, распределения вида $h(x) \otimes \delta(t)$ не входят в $\mathcal{U}_+$, откуда легко видеть, что этот класс *незамкнут* (в отличие от класса $\mathcal{U}$) в топологии $S'(\mathbb{R}^{n+1})$.

Перейдем к конструированию класса $\mathcal{U}_+$. Для простоты ограничимся сначала случаем $n = 0$ (т.е. распределения $T_+ \in \mathcal{U}_+$ зависят только от переменной t).

Пусть $\mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R})$ есть множество всех функций $\mu_+(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, таких, что $\mu_+(t) \equiv 0$ при $t \leq a$ и $\mu_+(t) \equiv 1$ при $t \geq b$ ($0 \leq a < b$), причем константы a, b , разумеется, свои собственные для каждой функции $\mu_+(t)$. Аналогичным образом определим класс $\mathcal{M}_- = \mathcal{M}_-(\mathbb{R})$ функций $\mu_-(t)$ с той лишь разницей, что $a < b \leq 0$. Пусть, далее, $\Phi = \Phi(\mathbb{R})$ есть множество всех функций $\phi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, таких, что $\phi(0) = 1$, $\phi^{(k)}(0) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Заметим далее, что для любого распределения $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ и любой функции $\mu_-(t)$ справедливо равенство

$$\mu_-(t)T(t) = T(t). \quad (2.2)$$

Определение 2.1. Будем говорить, что распределение $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ совпадает со своим сужением $T_+(t)$ на полупрямую $\mathbb{R}_+ : T(t) = T_+(t)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mu_+(t/\varepsilon)T(t) = T(t). \quad (2.3)$$

для всех $\mu_+(t) \in \mathcal{M}_+(\bar{\mathbb{R}}_+)$.

Пространство всех таких распределений $T(t) = T_+(t)$ будем обозначать через $\mathcal{U}_+ = \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+)$.

Лемма 2.1. *Распределение $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ тогда и только тогда является элементом класса $\mathcal{U}_+$, если*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (1 - \mu_+(t/\varepsilon))T(t) = 0 \text{ или } \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \phi_+(t/\varepsilon)T(t) = 0 \quad (2.4)$$

для всех $\mu_+(t) \in \mathcal{M}_+(R)$ или $\phi(t) \in \Phi(\mathbb{R})$.

Доказательство. Заметим, что каждую функцию $\phi(t)$ можно представить в виде

$$\phi(t) = \mu_-(t) - \mu_+(t), \quad \mu_{\pm} \in \mathcal{M}_{\pm}.$$

Теперь с учетом равенства (2.2) получаем, что

$$\phi(t/\varepsilon)T(t) = \mu_-(t/\varepsilon)T(t) - \mu_+(t/\varepsilon)T(t) = T(t) - \mu_+(t/\varepsilon)T(t).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем с учетом равенств (2.3), (2.4) утверждение леммы. $\square$

Определение 2.2. Будем говорить, что распределение $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ допускает выделение своего сужения $T_+(t)$ на полупрямую $\mathbb{R}_+$, если существует такое распределение $T_+(t) \in \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+)$, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mu_+(t/\varepsilon)T(t) = T_+(t). \quad (2.5)$$

Пространство всех таких распределений $T(t)$ будем обозначать через $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$.

Обозначая через $S'_0(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R})$ подпространство всех распределений $T_0(t) \in S'(\mathbb{R})$, таких, что $\text{supp}(T_0) \subset \{t = 0\}$, получаем, что

$$\mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+) = \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+) \oplus S'_0(\mathbb{R}),$$

т.е. каждое распределение $T(t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$ может быть однозначно представлено в виде

$$T(t) = T_0(t) + T_+(t), \quad T_0 \in S'_0(\mathbb{R}), \quad T_+(t) \in \mathcal{U}_+(R). \quad (2.6)$$

Поскольку каждое распределение $T_0(t) \in S'_0(\mathbb{R})$ имеет вид

$$T_0(t) = \sum_{k=0}^N a_k D_t^k \delta(t), \quad (2.7)$$

то, объединяя формулы (2.6) и (2.7), получаем, что

$$\begin{aligned} \langle \phi(t/\varepsilon)T(t); \varphi(t) \rangle_1 &= \langle T(t); \phi(t/\varepsilon)\varphi(t) \rangle_1 = \langle T_0(t); \phi(t/\varepsilon)\varphi(t) \rangle_1 + \langle T_+(t); \phi(t/\varepsilon)\varphi(t) \rangle_1 = \\ &= \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k (D_t^k (\phi(t/\varepsilon)\varphi(t)))|_{t=0} + \langle T_+(t); \phi(t/\varepsilon)\varphi(t) \rangle_1 = \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k \varphi^{(k)}(0) \varepsilon^{-k} + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \end{aligned}$$

для любых $\phi(t) \in \Phi(\mathbb{R})$, $\varphi(x) \in S_0(\mathbb{R})$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Распределение $T(t) \in S'(\mathbb{R})$ тогда и только тогда является элементом класса $\mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$, если для любых функций $\phi(t) \in \Phi(\mathbb{R})$, $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\langle T(t); \phi(t/\varepsilon)\varphi(t) \rangle_1 = P_N(\varepsilon^{-1}) + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (2.8)$$

где $P_N(z)$ — некоторый полином, коэффициенты которого не зависят от выбора функции $\phi(t) \in \Phi(\mathbb{R})$.

Замечание 2.2. Заметим теперь, что равенство (2.8) позволяет выделять у каждого распределения $T(t) \in \mathcal{U}$ его компоненты $T_0(t)$ и $T_+(t)$. Действительно, зафиксируем какую-либо пробную функцию $\varphi(t) \in S(\mathbb{R})$, равную e^{-t} в окрестности точки $t = 0$. Тогда

$$T_0(t) = P_N(D_t)\delta(t); \quad T_+(t) = T(t) - T_0(t), \quad (2.9)$$

где полином $P_N(z)$ берется из правой части формулы (2.9).

Далее, в равенстве (2.8) можно вообще отказаться от использования функции $\phi(t)$, а в качестве $\varphi(t)$ взять функцию $\mu_-(t)e^{-t/\varepsilon}$. Поскольку для всех $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ справедливо равенство

$$\langle T(t); \mu_-(t) \exp(-t/\varepsilon) \rangle_1 = \langle \mu_-(t) T(t); \exp(-t/\varepsilon) \rangle_1 = \langle T(t); \exp(-t/\varepsilon) \rangle_1,$$

то равенство (2.9) может быть заменено на

$$\langle T(t); \exp(t/\varepsilon) \rangle_1 = P_N(\varepsilon^{-1}) + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (2.10)$$

Теперь остается сделать последний естественный шаг: в формуле (2.10) заменить вещественный параметр $1/\varepsilon$ на комплексный параметр p , $\operatorname{Re}(p) > 0$, т.е. фактически перейти к описанию классов $\mathcal{U}_+$ и $\mathcal{U}$ в терминах преобразования Лапласа $T^*(p)$ распределений $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$:

$$T^*(p) \equiv \mathcal{L}(T)(p) \triangleq \langle T(t); \exp(-pt) \rangle_1, \quad p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0. \quad (2.11)$$

Объединяя теперь формулы (2.8)–(2.11), получаем следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Распределение $T_+(t)$ тогда и только тогда является элементом класса $\mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+)$, если его образ Лапласа $T_+^*(p)$ удовлетворяет асимптотическому равенству*

$$T_+^*(p) = o(1), \quad \operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty. \quad (2.12)$$

Распределение $T(t)$ тогда и только тогда является элементом класса $\mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$, если его образ Лапласа $T^(p)$ удовлетворяет асимптотическому равенству*

$$T^*(p) = P_N(p) + o(1), \quad \operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty, \quad (2.13)$$

где $P_N(z)$ — некоторый полином.

Следствие 2.2. *Если обобщенная производная $D_t T(t)$ распределения $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ является элементом класса $\mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$, то и $T(t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$. Если обобщенная производная $D_t T(t)$ распределения $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ является элементом класса $\mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+)$, то и $T(t) \in \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+)$.*

Доказательство. Утверждение становится очевидным, если заметить (см. [1]), что

$$(D_t T)^*(p) = p T^*(p) \quad (2.14)$$

и воспользоваться равенствами (2.12) и (2.13). $\square$

Замечание 2.3. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно; например, распределение $T(t) = \Theta(t) \cos(t) \in \mathcal{U}_+$, но его обобщенная производная $D_t T(t) = \delta(t) - \Theta(t) \sin(t) \notin \mathcal{U}_+$. Далее, распределение $T(t) = t_+^{-1/2} \in \mathcal{U}_+$, но его обобщенная производная $D_t T(t) = -(1/2)t_+^{-3/2}$ не принадлежит даже $\mathcal{U}$. (Здесь и далее t_+^λ означает $\Theta(t)t^\lambda$.)

Следствие 2.3. *Если обобщенная производная $D_t T(t)$ распределения $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ является элементом класса $\mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$, то справедливо равенство*

$$(D_t T)_+ = (D_t T_+)_+, \quad (2.15)$$

т.е. сужение на $\mathbb{R}_+$ обобщенной производной распределения $T(t)$ совпадает с сужением на $\mathbb{R}_+$ обобщенной производной распределения $T_+(t)$.

Доказательство. Так как $D_t T \in \mathcal{U}$, то из следствия 2.2 вытекает, что и $D_t T \in \mathcal{U}$. Запишем $T^*(p)$ в виде (2.13) и воспользуемся равенством (2.14); тогда

$$(D_t T)^*(p) = p P_N(p) + o(p), \quad \operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty. \quad (2.16)$$

Теперь согласно тому же равенству (2.13) получаем, что

$$(D_t T)^*(p) = P_M(p) + o_1(1), \quad \operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty. \quad (2.17)$$

Обозначая теперь через $(F^*)_0$, $(F^*)_+$ образы Лапласа от компонент F_0 и F_+ распределения $F \in \mathcal{U}$, из равенства (2.17) получаем, что

$$(D_t T)_0^*(p) = p P_N(p), \quad (D_t T)_+^*(p) = o_1(1),$$

а из равенства (2.16) — что

$$(D_t T_+)^* = (o(p))_+, \quad (D_t T)_0^* = P_M(p) + (o(p))_0.$$

Но $(o(p))_0$ может быть только нулевой степенью p , т.е. константой, откуда следует что

$$o(p) = b + o_2(1), \quad \operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty, \quad b = \text{const},$$

Сравнивая теперь правые части равенств (2.16) и (2.17), получаем, что

$$M = N + 1, \quad P_M(p) = p P_N(p), \quad o_2(1) = o_1(1),$$

откуда следует, что $(D_t T)_+^* = (D_t T_+)^*$, а значит, и равенство (2.15). $\square$

Замечание 2.4. Очевидно, что класс $\mathcal{U}_+$ оказался шире, чем подпространство регулярных распределений из $S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ (хотя бы потому, что содержит сингулярные распределения вида $\delta(t-t_0)$, $t_0 > 0$). Тем не менее, и более широкий класс $\mathcal{U} \supset \mathcal{U}_+$ уже, чем $S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$, в чем убеждают следующие примеры.

Так, $t_+^{-1/2} \in \mathcal{U}_+$, но $t_+^{-3/2} \notin \mathcal{U}_+$, $t_+^{-3/2} \notin \mathcal{U}$. Как ни парадоксально, но распределения $\tilde{T}_1(t) = t_+^{-3/2} \cos(1/t)$ и даже $\tilde{T}_2(t) = \Theta(t) e^{1/t} \cos(e^{1/t})$ принадлежат классу $\mathcal{V}_+$ (в чем легко убедиться простым интегрированием по частям в соответствующих интегралах Лапласа вида (2.11)). Крайне интересен следующий пример распределения

$$T(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \delta'(t - b_k), \quad (2.18)$$

где $\{a_k\} \rightarrow 0$, $\{b_k\} \searrow +0$ ($k \rightarrow +\infty$), причем коэффициенты a_k убывают достаточно быстро, чтобы обеспечить сходимость в $S'(\mathbb{R})$ ряда из правой части равенства (2.14). Варьируя скорости стремления к нулю последовательностей $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, можно добиться того, чтобы предел при $\operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty$ соответствующего ряда для $T^*(p)$

$$T^*(p) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k p \exp(-b_k p)$$

был конечен, или был бесконечен, или вообще не существовал, откуда следует (см. формулы (2.12), (2.13)), что распределения вида (2.17) могут как принадлежать классу $\mathcal{V}_+$, так и не принадлежать ни $\mathcal{U}_+$, ни $\mathcal{U}$.

3. След распределения и его свойства. Введем теперь понятие следа распределения $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$. Положим

$$\delta(t-0) = (S') \lim_{t_0 \rightarrow +0} \delta(t-t_0), \quad (3.1)$$

понимая это равенство в следующем смысле:

$$\langle \delta(t-0); f(t) \rangle_1 = f(+0) \quad (3.2)$$

для всех кусочно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $f(t)$.

Пусть $\Psi_+ = \Psi_+(\mathbb{R}_+)$ — множество всех функций $\psi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, для которых

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) dt = 1, \quad (3.3)$$

и пусть $\psi_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)\psi(t/\varepsilon)$. Очевидно, что $\psi_\varepsilon(t) \rightarrow \delta(t-0)$, ($\varepsilon \rightarrow +0$) в топологии $S'(\mathbb{R})$ (см. формулы (3.1)–(3.3)).

Определение 3.1. Пусть $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ и пусть найдется такая константа $h = h(T) \in \mathbb{C}$, что предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle T(t); \psi_\varepsilon(t) \varphi(t) \rangle_1 = h \varphi(0), \quad \forall \varphi(t) \in S(\mathbb{R}) \quad (3.4)$$

существует и не зависит от выбора функции $\psi(t) \in \Psi(\mathbb{R})$. Тогда эту константу h будем называть *следом* (или *следом нулевого порядка*) распределения $T(t)$ при $t \rightarrow +0$ (или в точке $t = +0$) и обозначать $T|_{t=+0} = h$.

Замечание 3.1. Очевидно, равенство (3.4) может быть записано в эквивалентной форме:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \psi_\varepsilon(t)T(t) = h\delta(t). \quad (3.5)$$

Из равенств (3.1)–(3.5) очевидным образом следуют и другие свойства следов распределений:

1. Для любой медленно растущей на бесконечности функции $f(t) \in C^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+)$ справедливо равенство

$$(fT)|_{t=+0} = f(+0)T|_{t=+0}. \quad (3.6)$$

2. Пусть распределение $T(t) \in \mathcal{U}$. Тогда, если оно имеет след $T|_{t=+0}$, то и ее сужение $T_+(t)$ на $\mathbb{R}_+$ также имеет след $T_+|_{t=+0}$. И наоборот, если ее сужение $T_+(t)$ имеет след $T_+|_{t=+0}$, то и само распределение $T(t)$ имеет след $T|_{t=+0}$. При этом в обоих случаях справедливо равенство

$$T|_{t=+0} = T_+|_{t=+0}. \quad (3.7)$$

3. Пусть $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ — регулярное распределение, порожаемое функцией $f(t) \in L_1^{loc}(\bar{\mathbb{R}}_+)$, причем для среднего интегрального значения $I_\varepsilon(f)$ функции $F(t)$ в правой полуокрестности точки $t = +0$

$$I_\varepsilon(f) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(t)dt = h \in \bar{\mathbb{C}} \quad (3.8)$$

существует предел (конечный или бесконечный)

$$I_0(f) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} I_\varepsilon(f) = h, \quad (3.9)$$

то существует и предел (3.4). При этом, если $h \neq \infty$, то

$$T|_{t=+0} = I_0(f). \quad (3.10)$$

Пусть далее распределение $T(t) \in \mathcal{U}_+$ имеет след $T|_{t=+0} = h$. Фиксируя произвольную функцию $\psi(t) \in \Psi_+(\mathbb{R}_+)$ и замечая, что (см. (3.3))

$$\mu_+(t) = \int_{-\infty}^t \psi(\tau)d\tau$$

есть функция класса $\mathcal{M}_+$, а значит, $\psi(t) = \mu'_+(t)$ и $\psi_\varepsilon(t) = D_t\mu_+(t/\varepsilon)$, получаем, что

$$\langle T(t); \psi_\varepsilon(t)\varphi(t) \rangle_1 = \langle T(t); (D_t(\mu_+(t/\varepsilon))\varphi(t)) \rangle_1 = \langle T(t); (D_t(\mu_+(t/\varepsilon))\varphi(t)) \rangle_1 - \langle T(t); \mu_+(t/\varepsilon)\varphi'(t) \rangle_1.$$

Отсюда имеем (см. (2.4) и (3.4))

$$\begin{aligned} \langle T(t); \psi_\varepsilon(t)\varphi(t) \rangle_1 &\rightarrow h\varphi(0) = \langle h\delta(t); \varphi(t) \rangle_1, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \\ \langle T(t); \mu_+(t/\varepsilon)\varphi'(t) \rangle_1 &\rightarrow \langle T_+(t); \varphi'(t) \rangle_1 \triangleq -\langle D_tT_+(t); \varphi(t) \rangle_1, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Из двух последних соотношений следует, что существует и конечен предел

$$\langle T(t); (D_t(\mu_+(t/\varepsilon))\varphi(t)) \rangle_1 \triangleq -\langle D_tT(t); \mu_+(t/\varepsilon)\varphi(t) \rangle_1 \rightarrow -\langle (D_tT(t))_+; \varphi(t) \rangle_1, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Поскольку в нашем случае $T(t) = T_+(t)$, то немедленно получаем равенство

$$D_tT_+(t) = (D_tT_+(t))_+ + T_+|_{t=+0} \cdot \delta(t). \quad (3.11)$$

В случае $T(t) \in \mathcal{U}$ равенство (3.11) примет вид

$$D_tT(t) = D_tT_0(t) + (D_tT(t))_+ + T|_{t=+0} \cdot \delta(t). \quad (3.12)$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3.1. Если распределение $T(t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$ и имеет след $T|_{t=+0}$, то его обобщенная производная $D_tT(t)$ также принадлежит классу $\mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$ и, кроме того, удовлетворяет равенствам (3.11) и (3.12).

Замечание 3.2. Формула (3.11) является обобщением аналогичной формулы для регулярных распределений, а формула (3.12) — ее дальнейшим обобщением.

Следует также пояснить, что означают выражения $(D_t T(t))_+$, $(D_t T_+(t))_+$ и т. п. на простом примере. Пусть $T(t) = 2t_+ + \Theta(t) + 3\delta(t)$. Тогда

$$T_0(t) = 3\delta(t), \quad T_+(t) = \Theta(t) + 2t_+.$$

Далее,

$$\begin{aligned} D_t T(t) &= 2\Theta(t) + \delta(t) + 3\delta'(t), & D_t T_+(t) &= 2\Theta(t) + \delta(t), \\ (D_t T(t))_+ &= (D_t T_+(t))_+ = 2\Theta(t), & D_t T_0(t) &= 3\delta'(t), \end{aligned}$$

что находится в полном соответствии с равенствами (3.11) и (3.12).

Замечание 3.3. Отметим также, что из факта, что $T(t) \in \mathcal{U}$ (или даже $T(t) \in \mathcal{U}_+$) не следует, что это распределение имеет след $T|_{t=+0}$. Так, например, распределение $t_+^{-1/2} \in \mathcal{U}_+$ (см. замечание 2.4) не имеет следа в точке $t = +0$, а распределения $\tilde{T}_1(t) = t_+^{-3/2} \cos(1/t)$ и $\tilde{T}_2(t) = \Theta(t)e^{1/t} \cos(1/t)$ имеют следы, причем $\tilde{T}_1|_{t=+0} = \tilde{T}_2|_{t=+0} = 0$. Далее, распределения

$$T_1(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \delta\left(t - \frac{1}{k^2}\right), \quad T_2(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \delta\left(t - \frac{1}{k!}\right)$$

принадлежат классу $\mathcal{U}_+$, но при этом распределение $T_1(t)$ имеет след $T_1|_{t=+0} = 0$, а распределение $T_2(t)$ не имеет следа в точке $t = +0$.

В то же время лемма 3.1 не дает ответа на следующий вопрос: если распределение $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ имеет след $T|_{t=+0}$, то следует ли из этого, что $T(t)$ входит хотя бы в класс $\mathcal{U}$? Ниже мы дадим положительный ответ на этот вопрос.

Пусть теперь уже распределение $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ имеет след $T|_{t=+0} = h$. Фиксируем функцию $\mu_+(t) \in \mathcal{M}$ и определим константу $M > 0$ равенством

$$M = \int_0^{+\infty} (1 - \mu_+(t)) dt.$$

Далее, фиксируя произвольное вещественное $\lambda > 1$, получаем что

$$\int_0^{+\infty} (\mu_+(\lambda t) - \mu_+(t)) dt = \frac{M(\lambda - 1)}{\lambda}.$$

Отсюда и из формулы (3.3) следует, что функция

$$\psi(t) = \frac{\lambda}{M(\lambda - 1)} (\mu_+(\lambda t) - \mu_+(t))$$

принадлежит классу $\Psi_+(\mathbb{R}_+)$, причем

$$\psi_\varepsilon(t) = \frac{\lambda}{M(\lambda - 1)\varepsilon} (\mu_+(t/\varepsilon) - \mu_+(\lambda t/\varepsilon)).$$

Теперь, фиксируя произвольную $\varphi(t) \in S(\mathbb{R})$ и полагая

$$f(\varepsilon) \triangleq \langle T(t); (1 - \mu_+(t/\varepsilon))\varphi(t) \rangle_1,$$

получаем (см. определение 3.1 и формулу (3.4)), что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{f(\lambda\varepsilon) - f(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{M(\lambda - 1)}{\lambda} h\varphi(0)$$

при всех $\lambda > 1$. Но последнее возможно лишь в том случае, если $f(\varepsilon) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow +0$). Отсюда (см. формулу (2.4) и доказательство леммы 2.1) следует, что $T(t) \in \mathcal{U}$, а в силу леммы 3.1 — $D_t T(t) \in \mathcal{U}$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Если распределение $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ имеет след $T|_{t=+0}$, то оно само и его обобщенная производная $D_t T(t)$ принадлежат классу $\mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$.*

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $T(t), D_t T(t) \in \mathcal{U}$. Докажем, что распределение $T(t)$ имеет след $T|_{t=+0}$. Не ограничивая общности (см. формулы (3.7), (2.6)), можно заменить распределения $T(t), D_t T(t)$ на $T_+(t) \in \mathcal{U}_+, D_t T_+(t) \in \mathcal{U}$. Представим теперь распределение $D_t T_+(t)$ в виде $D_t T_+(t) = (D_t T_+(t))_0 + (D_t T_+(t))_+$, где $(D_t T_+(t))_0 \in S'_0(\mathbb{R})$, $(D_t T_+(t))_+ \in \mathcal{U}_+$. Далее, из теоремы 2.1 и следствия 2.3 (см. формулы (2.12), (2.13) и (3.4) и доказательство теоремы 2.1) следует, что распределение $(D_t T_+(t))_+$ может иметь только вид $(D_t T_+(t))_+ = h\delta(t)$, где $h \in \mathbb{C}$ — некоторая комплексная константа. Фиксируя произвольную функцию $\mu_+(t) \in \mathcal{M}_+$, получаем, что

$$\begin{aligned} \langle D_t T_+(t); (1 - \mu_+(t/\varepsilon))\varphi(t) \rangle_1 &= \\ &= \langle (D_t T_+(t))_0; (1 - \mu_+(t/\varepsilon))\varphi(t) \rangle_1 + \langle (D_t T_+(t))_+; (1 - \mu_+(t/\varepsilon))\varphi(t) \rangle_1 = \\ &= h\varphi(0) + \langle (D_t T_+(t))_+; (1 - \mu_+(t/\varepsilon))\varphi(t) \rangle_1. \end{aligned}$$

Поскольку (см. формулу (2.4))

$$\langle (D_t T_+(t))_+; (1 - \mu_+(t/\varepsilon))\varphi(t) \rangle_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

то

$$\langle D_t T_+(t); (1 - \mu_+(t/\varepsilon))\varphi(t) \rangle_1 \rightarrow h\varphi(0), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

С другой стороны (см. также доказательство формул (3.11), (3.12)) имеем

$$\begin{aligned} \langle D_t T_+(t); (1 - \mu_+(t/\varepsilon))\varphi(t) \rangle_1 &= -\langle T_+(t); D_t((1 - \mu(t/\varepsilon))\varphi(t)) \rangle_1 = \\ &= \langle T_+(t); (D_t \mu_+(t/\varepsilon))\varphi(t) \rangle_1 - \langle T_+(t); \mu_+(t/\varepsilon)\varphi'(t) \rangle_1 = \\ &= \langle T_+(t); \psi_\varepsilon(t)\phi(t) \rangle_1 - \langle T_+(t); (1 - \mu_+(t/\varepsilon))\varphi'(t) \rangle_1, \end{aligned}$$

где $\psi(t) = \mu'(t)$, $\psi_\varepsilon(t) = D_t \mu(t/\varepsilon)$ — функции класса Ψ_+ . Из формулы (2.4) следует

$$\langle T_+(t); (1 - \mu_+(t/\varepsilon))\varphi'(t) \rangle_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

откуда

$$\langle T_+(t); \psi_\varepsilon(t)\phi(t) \rangle_1 \rightarrow h\varphi(0), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Это означает (см. формулу (3.4)), что распределение $T_+(t)$ (а вместе с ним и $T(t)$), имеет след в точке $t = +0$, равный h . Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Если обобщенная производная $D_t T(t)$ распределения $T(t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$ также принадлежит классу $\mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$, то $T(t)$ имеет след в точке $t = +0$.*

Объединяя теперь следствие 2.2 и леммы 3.1, 3.2 и 3.3, мы немедленно устанавливаем справедливость следующих утверждений.

Теорема 3.1. *Распределение $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ тогда и только тогда имеет след в точке $t = +0$, если $D_t T(t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$. Кроме того, при этом справедливы равенства (3.11) и (3.12).*

Лемма 3.4. *Если обобщенная производная $D_t T(t)$ распределения $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ имеет след в точке $t = +0$, то и само $T(t)$ имеет след в точке $t = +0$.*

Замечание 3.4. В рамках определения 3.1 мы установили ряд важнейших свойств следа $T|_{t=+0}$ распределения $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$. Однако, как и в случае определений 2.1 и 2.2 для сужения распределения на $\mathbb{R}_+$, определение 3.1 страдает одним существенным недостатком — крайней сложностью для использования его при решении конкретных задач для нестационарных уравнений. Выясним, нельзя ли определение 3.1 заменить более простым определением в терминах преобразования Лапласа $T^*(p)$ распределения $T(t)$.

Вернемся к формулам (3.4), (3.5). Заменяем $\phi_\varepsilon(t)$ на pe^{-pt} . Поскольку (см. [14] и формулы (3.1), (3.2))

$$p \exp(-pt) \rightarrow \delta(t-0), \quad \operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty,$$

дадим новое определение следа распределения.

Определение 3.2. Константа $h = h(T) \in \mathbb{C}$ называется следом распределения $T(t) \in V(\bar{\mathbb{R}}_+)$ (обозначение $T|_{t=+0} = h$), если существует конечный предел

$$\lim_{\operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty} p \exp(-pt) T_+(t) = h, \quad (3.13)$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty} \langle T_+(t); p \exp(-pt) \varphi(t) \rangle_1 = h \varphi(0) \quad \forall \varphi(t) \in S(\mathbb{R}), \quad (3.14)$$

где $T_+(t) \in \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+)$ — сужение распределения $T(t)$ на $\mathbb{R}_+$.

Поскольку определение 3.2 приводит к столь же сложным конструкциям, что и определение 3.1 (ср. равенства (3.13), (3.14) с (3.4)), как и в случае переопределения понятия сужения распределения, заменим функцию $\varphi(t)$ в формуле (3.14) единицей, т.е. фактически перейдем к определению следа распределения $T(t)$ в терминах преобразования Лапласа $T^*(p)$ (см. формулу (2.11)).

Определение 3.3. Константа $h = h(T) \in \mathbb{C}$ называется следом распределения $T(t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$ (обозначение $T|_{t=+0} = h$), если существует конечный предел

$$\lim_{\operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty} p T_+^*(p) = h, \quad (3.15)$$

где $T_+(t) \in \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+)$ — сужение распределения $T(t)$ на $\mathbb{R}_+$.

Предложение 3.1. Для распределений $T(t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$ определения 3.1, 3.2 и 3.3 эквивалентны.

Опуская полное доказательство предложения 3.1, отметим лишь, что свойства 1–3 (см. равенства (3.6)–(3.10)), справедливые в смысле определения 3.1, практически очевидны и для определений 3.2 и 3.3. Лемма 3.1 в случае определения 3.2 доказывается точно так же, как и в случае определения 3.1. В случае определения 3.3 доказательство леммы 3.1 приобретает крайне простой вид.

Действительно, пусть распределение $T_+(t) \in \mathcal{U}_+$ имеет след $T_+|_{t=+0} = h$. Рассмотрим распределение $T_{1,+}(t) = T_+(t) - h\Theta(t)$, которое тоже принадлежит классу $\mathcal{U}_+$. При этом обобщенная производная $D_t T_{1,+}(t)$ удовлетворяет (в силу равенства (3.15)) соотношению

$$p T_{1,+}^*(p) \rightarrow 0, \quad \operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty, \quad (3.16)$$

откуда (см. теорему 2.1 и формулу (2.13)) следует, что $D_t T_{1,+}(t) = (D_t T_{1,+})_+(t) \in \mathcal{U}_+$.

С другой стороны,

$$D_t T_{1,+}(t) = D_t T_+(t) - h \cdot \delta(t),$$

что и доказывает равенство (3.11) и лемму 3.1.

Пусть теперь распределение $T_+(t) \in \mathcal{U}_+$ и ее обобщенная производная $D_t T_+(t) \in \mathcal{U}$. Тогда из теоремы 2.1 и следствия 2.2 (см. формулы (2.11)–(2.14)) следует, что

$$\begin{cases} (D_t T_+)^*(p) = P_N(p) + o_1(1), \\ (D_t T_+)^*(p) \equiv p T_+^*(p) = p \cdot o_2(1), \end{cases} \quad \operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty.$$

а значит, $P_N(p) \equiv h \in \mathbb{C}$, и в силу формулы (3.15) распределение $T(t)$ имеет след: $T_+|_{t=+0} = h$.

Далее, если взять теперь $T(t) \in \mathcal{S}'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ и $D_t T(t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$, то, используя следствие 2.2 и разложение $T(t) = T_0(t) + T_+(t)$, $T_0(t) \in \mathcal{S}'(\bar{\mathbb{R}}_+)$, $T_+(t) \in \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+)$ и формулу (2.15) (см. следствие 2.3), теми же самыми рассуждениями, что и выше (или просто повторяя выкладки, использованные при доказательстве следствия 2.3), вновь получаем, что распределение $T(t)$ имеет след $T|_{t=+0}$.

Леммы 3.2 и 3.3 (а вместе с ними и теорема 3.1) также могут быть легко доказаны в рамках определения 3.3 с помощью теоремы 2.1 и следствия 2.3 и использования формул (2.15)–(2.17).

4. Следы высших порядков. Введем новые обозначения. Через $\mathcal{U}^m = \mathcal{U}^m(\bar{\mathbb{R}}_+)$ ($m = 1; 2; \dots$), будем обозначать класс всех распределений $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$, для которых сами $T(t)$ и все их обобщенные производные $D_t^k T(t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$ ($k \in \mathbb{I}; m$). Далее положим

$$\mathcal{U}_+^m = \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+) = \mathcal{U}^m(\bar{\mathbb{R}}_+) \cap \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+).$$

Наконец, через $\mathcal{U}^\infty = \mathcal{U}^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+)$ и $\mathcal{U}_+^\infty = \mathcal{U}_+^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+)$ будем обозначать классы таких распределений $T(t) \in \mathcal{U}$ и $T_+(t) \in \mathcal{U}_+$, для которых обобщенные производные $D_t^k T(t)$ и $D_t^k T_+(t)$ всех порядков $k \in \mathbb{N}$ входят в $\mathcal{U}$.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+) &\subset \dots \subset \mathcal{U}^{k+1}(\bar{\mathbb{R}}_+) \subset \mathcal{U}^k(\bar{\mathbb{R}}_+) \subset \dots \subset \mathcal{U}^1(\bar{\mathbb{R}}_+) \subset \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+), \\ \mathcal{U}_+^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+) &\subset \dots \subset \mathcal{U}_+^{k+1}(\bar{\mathbb{R}}_+) \subset \mathcal{U}_+^k(\bar{\mathbb{R}}_+) \subset \dots \subset \mathcal{U}_+^1(\bar{\mathbb{R}}_+) \subset \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+). \end{aligned}$$

Кроме того, из равенства (2.6) следует, что

$$\mathcal{U}^m(\bar{\mathbb{R}}_+) = S'_0(\bar{\mathbb{R}}_+) \oplus \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+), \quad m = 0, 1, \dots, +\infty,$$

т.е. распределение $T(t) \in \mathcal{U}^m$ может быть однозначно представлено в виде

$$T(t) = T_0(t) + T_+(t), \quad T_0(t) \in S'_0(\bar{R}), \quad T_+(t) \in \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+). \quad (4.1)$$

Далее, если обобщенная производная $D_t^k T(t)$, ($k \geq 1$) распределения $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ принадлежит классу $\mathcal{U}$, то из следствия 2.2 вытекает, что и само $T(t)$ вместе со всеми обобщенными производными $D_t^l T(t)$ ($l < k$) также принадлежит классу $\mathcal{U}$, откуда немедленно следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 4.1. *Распределение $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ тогда и только тогда принадлежит классу $\mathcal{U}^m(\bar{\mathbb{R}}_+)$ ($m \geq 1$), когда $D_t^m T(t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$. Распределение $T_+(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ тогда и только тогда принадлежит классу $\mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+)$ ($m \geq 1$), если $T_+(t) \in \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+)$ и $D_t^m T_+(t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+)$.*

Введем теперь понятие *следов высших порядков* для распределения (2.15).

Определение 4.1. Будем говорить, что распределение $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ имеет след в точке $t = +0$ порядка k ($k = 1, 2, \dots$), если имеет след $(D_t^k T)|_{t=+0}$ его обобщенная производная $D_t^k T(t)$.

Отметим, что если распределение $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ имеет в точке $t = +0$ след порядка $k \geq 1$, то в силу леммы 3.4 оно имеет и следы $D_t^l T|_{t=+0}$ всех младших порядков $l \in \overline{0; k-1}$, а в силу леммы 3.2 — само распределение $T(t)$ и все его обобщенные производные до порядка $k+1$ включительно принадлежат классу $\mathcal{U}$, (т.е. $T(t) \in \mathcal{U}^{k+1}$). Но тогда, используя формулу (3.15), получаем

$$D_t^k T|_{t=+0} = \lim_{\operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty} p(D_t^k T(t))_+^*(p), \quad (4.2)$$

где $(D_t^k T(t))_+^*(p)$ — образ Лапласа сужения $(D_t^k T(t))_+$ распределения $D_t^k T(t)$ на $\mathbb{R}_+$.

Кроме того, из следствия 2.3 (см. формулу (2.15)) вытекает, что и распределения $D_t^k T_+(t)$, $(D_t^k T(t))_+$ и $(D_t^k T_+(t))_+$ имеют следы в точке $t = +0$, причем

$$D_t^k T|_{t=+0} = D_t^k T_+|_{t=+0} = (D_t^k T)_+|_{t=+0} = (D_t^k T_+)_+|_{t=+0}. \quad (4.3)$$

Таким образом, мы доказали сразу несколько утверждений.

Лемма 4.2. *Распределение $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ тогда и только тогда принадлежит классу $\mathcal{U}^m(\bar{\mathbb{R}}_+)$, если его обобщенная производная $D_t^{m-1} T(t)$ имеет след в точке $t = +0$. Распределение $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ тогда и только тогда принадлежит классу $\mathcal{U}^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+)$, если оно имеет в точке $t = +0$ следы всех порядков $k = 0, 1, \dots$.*

Лемма 4.3. *Распределение $T(t) \in \mathcal{U}^m(\bar{\mathbb{R}}_+)$ ($m = 1, 2, \dots, +\infty$) имеет все следы $(D_t^k T)|_{t=+0}$ порядков $k = 0, 1, \dots, m-1$.*

Далее, из равенств (3.11), (3.12) и (4.1), лемм 4.1–4.3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 4.1. Для распределений $T_+(t) \in \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+)$ и $T(t) \in \mathcal{U}^m(\bar{\mathbb{R}}_+)$ ($m \geq 1$) справедливы равенства

$$D_t^m T_+(t) = (D_t^m T_+(t))_+ + \sum_{k=0}^{m-1} (D_t^k T_+)|_{t=+0} \cdot D_t^{m-k-1} \delta(t), \quad (4.4)$$

$$D_t^m T(t) = (D_t^m T_+(t))_+ + D_t^m T_0(t) + \sum_{k=0}^{m-1} (D_t^k T_+)|_{t=+0} \cdot D_t^{m-k-1} \delta(t), \quad (4.5)$$

соответственно. (В равенстве (4.3) распределение $T_0(t) \in S'_0(\bar{\mathbb{R}}_+)$ берется из разложения (4.1).)

Применим к обеим частям равенства (4.2) преобразование Лапласа. Поскольку (см. формулу (2.11) или [1]) $(D_t^k \delta(t))^*(p) = p^k$, получаем

$$p^m T_+^*(p) = (D_t^m T_+(t))_+^*(p) + \sum_{k=0}^{m-1} (D_t^k T_+)|_{t=+0} \cdot p^{m-k-1}, \quad (4.6)$$

откуда следует, что

$$T_+^*(p) = p^{-m} (D_t^m T_+(t))_+^*(p) + \sum_{k=0}^{m-1} (D_t^k T_+)|_{t=+0} \cdot p^{-k-1}.$$

Поскольку $(D_t^k T_+(t))_+ \in \mathcal{U}_+$, то

$$(D_t^k T_+(t))_+^*(p) = o(1), \quad (\operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty)$$

(см. теорему 2.1 и формулу (2.12)) и

$$T_+^*(p) = \sum_{k=0}^{m-1} (D_t^k T_+)|_{t=+0} \cdot p^{-k-1} + o(p^{-m}), \quad \operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty. \quad (4.7)$$

Для распределения $T(t) = T_0(t) + T_+(t) \in \mathcal{U}^m$, где $T_0(t) = P_N(D_t)\delta(t) \in S'_0(\mathbb{R})$, $T_+(t) \in \mathcal{U}_+^m$, равенство (4.7) примет вид

$$T^*(p) = P_N(p) + \sum_{k=0}^{m-1} (D_t^k T_+)|_{t=+0} \cdot p^{-k-1} + o(p^{-m}), \quad \operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty. \quad (4.8)$$

Из формул (4.6)–(4.8) немедленно следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 4.4. Распределение $T(t)$ тогда и только тогда принадлежит классу $\mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+)$, если

$$p^m T^*(p) = P_{m-1}(p) + o(1), \quad \operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty, \quad (4.9)$$

где степень $\deg(P_m)$ полинома $P_{m-1}(p)$ не превосходит $m-1$: $\deg(P_{m-1}) \leq m-1$. При этом

$$P_{m-1}(p) = \sum_{k=0}^m h_k p^{m-k}, \quad h_k = (D_t^k T)|_{t=+0}. \quad (4.10)$$

Лемма 4.5. Если образ Лапласа $T^*(p)$ распределения $T(t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+)$ является рациональной функцией, то $T(t) \in \mathcal{U}^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+)$, и, кроме того,

$$D_t^k T|_{t=+0} = -\operatorname{Res}_{p=\infty}(p^k F^*(p)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.11)$$

Доказательство. Доказательство леммы 4.5 становится очевидным, если мы разложим функцию $T^*(p)$ в ряд Лорана в окрестности точки $p = \infty$ и заметим, что его положительная часть представляет собой полином $P_N(p)$ — целую часть рациональной функции; откуда немедленно следует, что $T_+^*(p)$ совпадает с отрицательной частью ряда Лорана. $\square$

Из теоремы 2.1 и леммы 4.4 следует справедливость следующего утверждения.

Следствие 4.2. Если распределение $T(t) \in \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+)$, а распределение $F(t) \in \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+)$, то их обобщенная свертка

$$(T \otimes F)(t) = \int_0^t T(t-\tau)F(\tau)d\tau \quad (4.12)$$

принадлежит классу $\mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+)$.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что (см. [1])

$$(T \otimes F)^*(p) = T^*(p)F^*(p) \quad (4.13)$$

и воспользоваться формулами (2.12) и (4.9). $\square$

Замечание 4.1. Очевидно, что классы $\mathcal{U}_+^m$ незамкнуты (как и класс $\mathcal{U}_+$). В то же время эти классы достаточно обширны по запасу распределений. Так, например, распределение $t_+^{5/2} \in \mathcal{U}_+^2$, распределения $T_1(t)$, $\tilde{T}_1(t)$ и $\tilde{T}_2(t)$ (см. замечания 2.4 и 3.3) принадлежат классу $\mathcal{U}_+^\infty$, причем

$$(D_t^k T_1)|_{t=0} = (D_t^k \tilde{T}_1)|_{t=0} = (D_t^k \tilde{T}_2)|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \infty.$$

Далее, распределение $T(t)$ (см. замечание 2.4, формула (2.18)) в зависимости от скорости стремления последовательностей $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ к нулю может как $\in \mathcal{U}^m$, $\notin \mathcal{U}^{m+1}$ для любого наперед заданного m , так и входить в класс $\mathcal{U}^\infty$ или же вообще не входить ни в один класс $\mathcal{U}^m$.

Объединяя равенства (4.6) и (4.7) и замечая, что (см. [1])

$$(t_+^k)^*(p) = \frac{k!}{p^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.14)$$

мы немедленно получаем следующее утверждение.

Следствие 4.3 (формула Тейлора). Для распределения $T(t) \in \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+)$ справедливо асимптотическое равенство

$$T(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(D_t^k T)|_{t=+0}}{k!} \cdot t_+^k + o(t^{m-1}), \quad t \rightarrow +0, \quad (4.15)$$

где $o(t^{m-1})$ — некоторое распределение $\tilde{T} \in \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+)$, для которого

$$\langle \tilde{T}(t); \psi_\varepsilon(t)\varphi(t) \rangle_1 = o(\varepsilon^{m-1}), \quad (\varepsilon \rightarrow +0), \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}), \quad (4.16)$$

для всех $\psi(t) \in \Psi(\bar{\mathbb{R}}_+)$.

5. Многомерный случай. Перейдем теперь к случаю $S'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ ($n \geq 1$). Определим сначала подпространство $S'_0(\mathbb{R}^{n+1}) \subset S'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ как множество всех распределений $T_0(x, t) \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$, таких, что $\text{supp}(T) \subset \{t = 0\}$. Эти распределения представляют собой (см., например, [18]) всевозможные конечные линейные комбинации вида

$$T_0(x, t) = \sum_{k=0}^N F_k(x) \otimes D_t^k \delta(t), \quad F_k(x) \in S'(\mathbb{R}^n). \quad (5.1)$$

Введем теперь классы $\mathcal{U}_+ = \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, $\mathcal{U}_+ = \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, по аналогии со случаем $n = 0$, используя частичное преобразование Лапласа $T^*(x, p) = \mathcal{L}(T)(x, p) \in S'(\mathbb{R}^n)$ распределения $T(x, t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, по переменной t :

$$\langle T^*(x, p); \varphi(x) \rangle_n \triangleq \langle T(x, t); \varphi(x) \otimes \exp(-pt) \rangle_{n+1} \quad \forall \varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n), \quad (5.2)$$

где $\langle \cdot; \cdot \rangle_n$ и $\langle \cdot; \cdot \rangle_{n+1}$ — линейные формы в пространствах $S'(\mathbb{R}^n)$ и $S'(\mathbb{R}^{n+1})$ соответственно.

Кратко переопределим основные понятия для многомерного случая.

Определение 5.1.

1. Через $\mathcal{U}_+ = \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ теперь будем обозначать класс всех распределений $T_+(x, t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, для которых

$$T_+^*(x, p) \rightarrow 0, \quad \operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty; \quad (5.3)$$

это равенство понимается в том смысле, что

$$\langle T_+^*(x, p); \varphi(x) \rangle_n \rightarrow 0, \quad \operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty \quad \forall \varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n). \quad (5.4)$$

При этом будем говорить, что распределения $T_+(x, t)$ *совпадают со своими сужениями на верхнее полупространство* $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

2. Через $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ теперь будем обозначать класс всех распределений $T_+(x, t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ следующего вида:

$$T(x, t) = T_+(x, t) + T_0(x, t), \quad (5.5)$$

где $T_+(x, t) \in \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, а $T_0(x, t) \in S'_0(\mathbb{R}^{n+1})$ (см. формулу (5.1)). При этом распределение $T_+(x, t)$ будем называть *сужением распределения* $T(x, t)$ *на верхнее полупространство* $\mathbb{R}_+^{n+1}$, а распределение $T_0(x, t)$ — *сужением распределения* $T(x, t)$ *на гиперплоскость* $\{t = 0\}$.

3. Через $\mathcal{U}^m = \mathcal{U}^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ будем обозначать класс всех распределений $T(x, t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, таких, что $D_t^k T(x, t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ для всех $k \in \overline{1; m}$, а через $\mathcal{U}_+^m = \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ — класс всех распределений $T(x, t) \in \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}) \cap \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$.

Определение 5.2. 1. Будем говорить, что распределение $T_+(x, t) \in \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ имеет след $T_+|_{t=+0} = h(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$, если

$$T_+^*(x, p) \rightarrow h(x), \quad \operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty, \quad (5.6)$$

где равенство (5.6) понимается в том же смысле, что и формулы (5.3)–(5.4).

2. Будем говорить, что распределение $T(x, t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ имеет след $T|_{t=+0} = h(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$, если его сужение $T_+(x, t) \in \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ на верхнее полупространство $\mathbb{R}_+^{n+1}$ имеет этот же самый след $h(x)$.
3. Будем говорить, что распределение $T(x, t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ имеет след порядка $k = 0, 1, \dots$ на гиперплоскости $\{t = +0\}$ и обозначать этот факт следующим образом: $D_t^k T|_{t=+0} = h(x)$, если его обобщенная производная $D_t^k T(x, t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ и имеет след $h(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$ в смысле определения 5.2.2.

Замечание 5.1. Несложно видеть, что все свойства классов $\mathcal{U}, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}^m, \mathcal{U}_+^m$, доказанные ранее для случая $n = 0$, будут справедливы и для многомерного случая. Отметим лишь, что важнейшие для дальнейших выкладок формулы (4.4), (4.4) примут следующий вид:

$$D_t^k T_+(x, t) = (D_t^k T_+(x, t))_+ + \sum_{l=0}^{k-1} h_l(x) \otimes D_t^{k-l-1} \delta(t), \quad h_l(x) = D_t^l T_+|_{t=+0} \quad (5.7)$$

для распределений $T_+(x, t) \in \mathcal{U}_+^m$ ($k \leq m$) и

$$D_t^k T(x, t) = D_t^k T_0(x, t) + (D_t^k T(x, t))_+ + \sum_{l=0}^{k-1} h_l(x) \otimes D_t^{k-l-1} \delta(t), \quad h_l(x) = D_t^l T|_{t=+0} \quad (5.8)$$

для распределений $T(x, t) = T_0(x, t) + T_+(x, t) \in \mathcal{U}^m$, где $T_0(x, t) \in S'_0(\mathbb{R}^{n+1})$ и $T_+(x, t) \in \mathcal{U}_+$ ($k \leq m$).

Определим теперь на $S'(\mathbb{R}^n)$ и на $S'(\mathbb{R}^{n+1})$ преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}^+(f)(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) \triangleq \langle f(x); \exp(-ix \cdot \xi) \rangle_n, \quad \mathcal{F}^-(f)(\xi) \equiv \check{f}(\xi) \triangleq (2\pi)^{-n} \langle f(x); \exp(ix \cdot \xi) \rangle_n, \quad (5.9)$$

где $f(x), \hat{f}(x), \check{f}(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Очевидно, что справедливы следующие утверждения.

Лемма 5.1. Для распределений $T(x, t) \in \mathcal{U}^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ и $T_+(x, t) \in \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ и любого мультииндекса α имеем $D_x^\alpha T(x, t) \in \mathcal{U}^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ и $D_x^\alpha T_+(x, t) \in \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$.

Предложение 5.1. Преобразование Фурье по пространственным переменным $x \in \mathbb{R}^n$ изоморфно отображает классы $\mathcal{U}^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ и $\mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ ($k = 0, 1, \dots$) на себя.

6. Задача Коши и ее корректная разрешимость. Рассмотрим уравнение (1.1) с системой начальных условий (1.4), (1.5) или (1.6). Будем предполагать, что $u(x, t) \in \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, $f(x, t) \in \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ и $h_k(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$, $k = \overline{0; m-1}$. Поскольку (см. замечания 2.1 и 4.1) незамкнуты, необходимо ввести подходящее определение корректной разрешимости задач Коши (1.1), (1.4), (1.1), (1.5) и (1.1), (1.6).

Определение 6.1. Будем говорить, что задача Коши (1.1), (1.4), или (1.1), (1.5) или (1.1), (1.6), корректно разрешима в классе $\mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, если выполнены следующие условия:

- (1) ее решение $u(x, t)$ существует и единственно;
- (2) если последовательности $\{f_l(x, t)\} \subset \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ и $\{h_{k,l}(x)\} \subset S'(\mathbb{R}^n)$, $k \in \overline{0; m-1}$, сходятся при $l \rightarrow +\infty$ в слабой топологии S' к $\tilde{f}(x, t) \in \mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ и $\tilde{h}_k(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$ соответственно, то последовательность решений $\{u_l(x, t)\} \subset \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ задачи Коши с соответствующим набором $f_l(x, t)$, $h_{k,l}(x)$ ($k \in \overline{0; m-1}$) сходится при $l \rightarrow +\infty$ в слабой топологии S' к распределению $\tilde{u}(x, t) \in \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, которое является решением задачи Коши с набором $\tilde{f}(x, t)$, $\tilde{h}_k(x)$ ($k \in \overline{0; m-1}$).

Из формул (1.2) и (5.8) немедленно следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 6.1. В классе $S'(\mathbb{R}^{n+1})$ решение $u(x, t) \in \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ задачи Коши (1.1), (1.4) или (1.1), (1.5) или (1.1), (1.6) удовлетворяет уравнению

$$L(D)u(x, t) = g(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

где распределение $g(x, t) \in \mathcal{U}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ имеет вид

$$g(x, t) = f(x, t) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{k-1} P_k(D_x) h_l(x) \otimes D_t^{k-l-1} \delta(t) \quad (6.2)$$

для задачи (1.1), (1.4),

$$g(x, t) = f(x, t) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{k-2} P_k(D_x) h_l(x) \otimes D_t^{k-l-1} \delta(t) + h_{m-1}(x) \otimes \delta(t) \quad (6.3)$$

для задачи (1.1), (1.5) и

$$g(x, t) = f(x, t) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{k-2} P_k(D_x) h_l(x) \otimes D_t^{k-l-1} \delta(t) + P_m(D_x)'' h_{m-1}(x) \otimes \delta(t) \quad (6.4)$$

для задачи (1.1), (1.6), где оператор $P_m''(D_x)$ берется из правой части равенства (1.7).

Следствие 6.1. Фундаментальное решение $E(x, t) \in \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ задачи Коши (1.8) удовлетворяет в классе $S'(\mathbb{R}^{n+1})$ уравнению

$$L(D)E(x, t) = \delta(x) \otimes \delta(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6.5)$$

Рассмотрим теперь в классе $\mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ три задачи Коши специального вида: уравнение

$$L(D)v(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (6.6)$$

с системами начальных условий трех типов:

$$D_t^k v|_{t=+0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \overline{0; m-1}, \quad (6.7)$$

или

$$D_t^k v|_{t=+0} = 0, \quad (P(D_x)v_{m-1})|_{t=+0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \overline{0; m-2}, \quad (6.8)$$

или

$$D_t^k v|_{t=+0} = 0, \quad (P'_m(D_x)v_{m-1})|_{t=+0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \overline{0; m-2}. \quad (6.9)$$

Из леммы 6.1 (см. формулы (6.1)–(6.4)) и равенств (6.6)–(6.9)) вытекает следующее утверждение.

Лемма 6.2. В классе $S'(\mathbb{R}^{n+1})$ распределение $v(x, t) \in U_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, являющееся решением любой из задач Коши (6.6), (6.7) или (6.6), (6.8) или (6.6), (6.9), удовлетворяет уравнению

$$L(D)v(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6.10)$$

Множество всех распределений $v(x, t) \in \mathcal{U}_+^m$, удовлетворяющих уравнению (6.10), будем обозначать через $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$.

Замечание 6.1. В нижнем полупространстве $\mathbb{R}_-^{n+1}$ равенство (6.10) выполняется *a priori*, поскольку $v(x, t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Применим к распределению $v(x, t)$ преобразование Лапласа по переменной t ; тогда уравнение (6.10) трансформируется в уравнение

$$L(D_x, p)v^*(x, p) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad (6.11)$$

где $v^*(x, p)$ — образ Лапласа распределения $v(x, t)$, а оператор $L(D_x, p)$ имеет вид

$$L(D_x, p) = \sum_{k=0}^m P_k(D_x)p^k \quad (6.12)$$

(см. формулу (1.2)).

Применим теперь к распределению $v^*(x, p)$ прямое преобразование Фурье по переменным $x \in \mathbb{R}^n$ (см. формулу (5.9)); при этом уравнение (6.11) трансформируется в функциональное уравнение

$$L(i\xi, p)w(\xi, p) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad (6.13)$$

где $w(\xi, p) = (\widehat{v^*})(\xi, p)$ — Фурье-образ распределения $v^*(x, p)$ и

$$L(i\xi, p) = \sum_{k=0}^m P_k(i\xi)p^k \quad (6.14)$$

(см. опять формулу (1.2) и формулу (6.12)).

Обозначим через $\mathcal{N}_k$, $k \in \overline{0; m}$, множество всех вещественных нулей полинома $P_k(i\xi)$, являющегося символом оператора $P_k(D_x)$ из формулы (1.2):

$$\mathcal{N}_k = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid P_k(i\xi) = 0\}, \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \cap \mathcal{N}_1 \cap \dots \cap \mathcal{N}_m, \quad (6.15)$$

и положим

$$\Gamma_k = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathcal{N}_k, \quad t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}, \quad \Gamma = \Gamma_0 \cap \Gamma_1 \cap \dots \cap \Gamma_m. \quad (6.16)$$

Обозначим через $S'(\Gamma_k)$ ($k \in \overline{0; m}$) и $S'(\Gamma)$ подпространства распределений $T(x, t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, носители Фурье-образов $\widehat{T}(\xi, t)$ которых локализованы на поверхностях Γ_k , Γ соответственно: $\operatorname{supp}(\widehat{T}) \subset \Gamma_k$ и $\operatorname{supp}(\widehat{T}) \subset \Gamma$.

Замечание 6.2. Если $\mathcal{N} = \emptyset$ (или, что то же самое, $\Gamma = \emptyset$), то подпространство $S'(\Gamma)$ является тривиальным (т.е. содержит единственный элемент — нулевой функционал).

Воспользуемся следующим утверждением (см. [18]).

Предложение 6.1. Пусть $P(D_x)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и пусть распределение $u_0(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$ является решением однородного уравнения

$$P(D_x)u_0(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (6.17)$$

Тогда носитель Фурье-образа $\widehat{u}_0(\xi)$ распределения $u_0(x)$ локализован на множестве $\mathcal{N}_P$: $\operatorname{supp}(\widehat{u}_0) \subset \mathcal{N}_P$, являющемся множеством всех вещественных нулей полинома $P(i\xi)$.

Вернемся к уравнению (6.11), рассматривая его как уравнение (6.17) с комплексным параметром p . Роль оператора $P(D_x)$ теперь играет оператор $L(D_x, p)$ из равенства (6.12). Фиксируя $p \in \{\operatorname{Re}(p) > 0\}$, положим

$$\mathcal{N}_L(p) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid L(i\xi, p) = 0\}, \quad (6.18)$$

где функция $L(i\xi, p)$ определена равенством (6.14).

Если уравнение (6.11) имеет нетривиальное решение $v^*(\cdot, p) \in S'(\mathbb{R}^n)$, то $\operatorname{supp}(w)(\cdot, p) \subset \mathcal{N}_L(p)$ (распределение $w(\xi, p)$ определено в комментариях к формуле (6.13)).

Пусть множество $\mathcal{N}$ (см. формулы (6.15), (6.16)) пусто: $\mathcal{N} = \emptyset$. Рассматривая теперь функцию $L(i\xi, p)$ как полином комплексной переменной p , замечаем, что в этом случае его коэффициенты $P_k(i\xi)$ не обращаются одновременно в ноль ни при каких $\xi \in \mathbb{R}^n$, а значит, он не равен тождественно нулю ни при каких $\xi \in \mathbb{R}^n$. Фиксируя $\xi \in \mathbb{R}^n$, рассмотрим уравнение

$$L(i\xi, p) = 0, \quad p \in \mathbb{C}, \quad (\operatorname{Re}(p) > 0) \quad (6.19)$$

относительно переменной $p \in \mathbb{C}$.

Тогда

- (1) либо полином $L(i\xi, p) \equiv \operatorname{const} \neq 0$, и уравнение (6.19) вообще не имеет корней, а значит, $\xi \notin \mathcal{N}_L(p)$ ни при каких $p \in \mathbb{C}$,
- (2) либо $L(i\xi, p) \not\equiv \operatorname{const}$, тогда уравнение (6.19) имеет корни $p \in \mathbb{C}$, но все они в силу условия нестационарности оператора $L(D)$ (см. формулу (1.3)) имеют неположительные вещественные части, $\operatorname{Re}(p) \leq 0$, и, следовательно, не удовлетворяют ограничению $\operatorname{Re}(p) > 0$, а значит, и в этом случае $\xi \notin \mathcal{N}_L(p)$.

Но тогда $\mathcal{N}_L(p) = \emptyset$, а значит, $w(\cdot, p) = 0$ при всех $\operatorname{Re}(p) > 0$, и, следовательно (см. формулы (6.10), (6.11)), вместе с ним равны нулю и распределение $v^*(x, p)$. (В силу аналитичности распределения $v^*(x, p)$ по переменной p оно будет равно нулю и на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.) Но тогда и $v(x, t) = 0$. Таким образом, в случае $\mathcal{N} = \emptyset$ уравнение (6.10) может иметь только тривиальное решение.

В дальнейшем случай $\mathcal{N} = \emptyset$ будем называть *некритическим случаем уравнения (1.1)*.

Пусть теперь $\mathcal{N} \neq \emptyset$. Тогда уравнения (6.11) и (6.13) уже имеют нетривиальные решения, причем $\operatorname{supp}(w)(\cdot, p) \subset \mathcal{N}_L(p)$. Сравнивая теперь формулы (6.14), (6.15), (6.18) и (6.19), замечаем, что при всех $p \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(p) > 0$) выполняется соотношение $\mathcal{N}_L(p) = \mathcal{N}$, а значит (см. формулу (6.16)), $v(x, t) \in S'(\Gamma)$.

В дальнейшем случай $\mathcal{N} \neq \emptyset$ будем называть *критическим случаем уравнения (1.1)*.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 6.2. *Если распределение $v(x, t) \in \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ является решением задачи Коши (6.6), (6.7) или (6.6), (6.8) или (6.6), (6.9), то оно принадлежит классу $S'(\Gamma)$.*

Следствие 6.3. *В некритическом случае $\mathcal{N} \neq \emptyset$ решение $u(x, t) \in \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ задачи Коши (1.1), (1.4) или (1.1), (1.5) или (1.1), (1.6) единственно.*

Замечание 6.3. Очевидно, что решение $u(x, t)$ каждой из упомянутых в теореме 6.2 задач Коши единственно, если хотя бы один из полиномов $P_k(i\xi)$ (см. формулу (1.2) или (6.14)) не имеет вещественных корней или просто равен константе.

Вернемся к критическому случаю $\mathcal{N} \neq \emptyset$ уравнения (1.1). Рассмотрим систему уравнений

$$P_k(D_x)v(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \overline{0; m}, \quad (6.20)$$

где операторы $P_k(D_x)$ взяты из формулы (1.2). Через $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_0(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ обозначим множество всех решений $v(x, t) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ этой системы.

Замечание 6.4. Очевидно, что $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V} \subset S'(\Gamma)$; при этом, разумеется, $\mathcal{V} \neq S'(\Gamma)$. Однако в общем случае и $\mathcal{V}_0 \neq \mathcal{V}$. В последнем можно убедиться на следующем примере. Пусть $n = 2$, $m = 1$, $L(D_x, D_y, D_t) = D_x D_t - D_y^2$. Тогда распределение $v(x, y, t) = \Theta(t)(xt^2 + y^2 t)$ удовлетворяет уравнению (6.6) с любым из начальных условий

$$v|_{t=+0} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

или

$$(D_x v)|_{t=+0} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

и, следовательно (см. лемму 6.2), удовлетворяет уравнению (6.10), но не удовлетворяет системе (6.20).

Однако, как мы убедимся ниже, выбором подходящего условия регулярности решения на бесконечности вопросы единственности решения в классах $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}_0$ можно сделать эквивалентными.

Опять рассмотрим уравнение (6.17) и добавим к нему условие (или систему условий) регулярности решения $u_0(x)$ на бесконечности:

$$\Psi(x, D_x)u_0(x) = o(|x|^{-\mu}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (\mu \geq 0), \quad (6.21)$$

где $\Psi(x, D)$ — какой-либо дифференциальный или псевдодифференциальный оператор, коммутирующий с операторами D^α , а константа μ может зависеть от направления, по которому переменная x стремится к ∞ . При этом будем предполагать, что оператор $\Psi(x, D)$ и константа μ подобраны таким образом, что уравнение (6.17) имеет только тривиальное решение $u_0(x) = 0$. (Например, в случае $P(D_x) = \Delta + k_0^2$, $\Delta = D_x \cdot D_x$, $k_0 > 0$, можно взять $\Psi(x, D_x) = D_r + ik_0$ ($r = |x|$), $\mu = (n-1)/2$.)

Замечание 6.5. В равенстве (6.21) символ $o(|x|^{-\mu})$ может означать как равномерную оценку при стремлении x к бесконечности, так и оценку по всем полупрямым, исходящим из точки $x = 0$ (и даже лишь по некоторым фиксированным направлениям, нормальным к множеству $\mathcal{N}_P$). Наконец, само равенство (6.21) следует понимать в смысле теории распределений:

$$\langle u_0(y); \Psi^*(y, D_y)\varphi(x-y) \rangle_n = o(|x|^{-\mu}), \quad x \rightarrow \infty, \quad \forall \varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n) \quad (6.22)$$

(где $\Psi^*(x, D_x)$ — оператор, формально сопряженный к $\Psi(x, D_x)$), поскольку из равенства (6.22) следует, что если распределение $u_0(x)$ удовлетворяет оценке (6.21), то этой же оценке удовлетворяют и все производные $D^\alpha u_0(x)$.

По аналогии с $S'(\Gamma)$ обозначим через $S'(\mathcal{N}_P)$ множество распределений $T(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$, таких, что $\text{supp}(\hat{T}) \subset \mathcal{N}_P$.

Пусть теперь распределение $v_0(x) \in S'(\mathcal{N}_P)$ и удовлетворяет условию вида (6.21), но при этом не обязано удовлетворять уравнению (6.17). Поскольку его Фурье-образ $\hat{v}_0(\xi)$ имеет конечный порядок сингулярности (см. [18]), то найдется такое целое $N > 0$, что

$$P^N(i\xi)\hat{v}_0(\xi) = 0,$$

или, что то же самое,

$$P^N(D_x)v_0(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначая через $v_1(x)$ распределение $P^{N-1}(D_x)v_0(x)$, получаем, что

$$P(D_x)v_1(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку (см. замечание 6.5) распределение $v_0(x)$ также удовлетворяет условию (6.21), то последнее уравнение может иметь только тривиальное решение $v_1(x) = 0$. Точно так же доказывается, что и распределение $v_2(x) = P^{N-2}(D_x)v_0(x) = 0$. Продолжая эти рассуждения и далее, получаем, что $v_0(x) = 0$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 6.3. Пусть уравнение (6.17) в $S'(\mathbb{R}^n)$ с условием регулярности решения на бесконечности (6.21) допускает только тривиальное решение. Тогда множество всех распределений $v_0(x) \in S'(\mathcal{N}_P)$, также удовлетворяющих условию (6.21), содержит только нулевой функционал.

Следствие 6.4. Пусть $P(D_x)$ и $Q(D_x)$ — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами и пусть $\mathcal{N}_P \supset \mathcal{N}_Q$. Пусть, далее, уравнение (6.17) с ограничением (6.21) имеет только тривиальное решение. Тогда и уравнение

$$Q(D_x)u_0(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

с ограничением (6.21) также имеет в $S'(\mathbb{R}^n)$ только тривиальное решение.

Положим теперь

$$P(D_x) = P_0(D_x)\bar{P}_0(D_x) + P_1(D_x)\bar{P}_1(D_x) + \dots + P_m(D_x)\bar{P}_m(D_x).$$

Нетрудно видеть, что в силу равенств (6.15) и (6.20) выполнено соотношение $\mathcal{N} = \mathcal{N}_P$. Как и ранее, будем предполагать, что ограничение (6.21) обеспечивает единственность решения уравнения (6.17). Пусть, далее, распределение $v(x, t) \in \mathcal{V}_0$ удовлетворяет не только системе уравнений (6.20), но и ограничению

$$\Psi(x, D_x)v(x, t) = o(|x|^{-\mu}), \quad x \rightarrow \infty, \quad t > 0, \quad (6.23)$$

с теми же самыми $\Psi(x, D_x)$ и μ . (При этом равенство (6.23) будем понимать в слабом смысле; см. формулу (6.22).) Поскольку в силу равенств (6.15) и (6.16) $\text{supp}(v^*(\cdot, p)) \subset \mathcal{N}$ (и $v(x, t) \in S'(\Gamma)$), то, применяя к распределению $v^*(x, p)$ лемму 6.3, получаем, что распределение $v(x, t)$ может быть только нулевым функционалом.

Точно так же можно установить, что и распределение $v(x, t) \in \mathcal{V}$ с ограничением (6.23) тоже может быть только нулевым функционалом.

Если же теперь в качестве $P(D_x)$ взять произвольный оператор, такой, что $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_P$, то в силу следствия 6.4 получаем, что при наличии ограничения (6.23) уравнение (6.10) и система уравнений (6.20) могут иметь только тривиальные решения.

Таким образом (см. также лемму 6.2 и следствие 6.3), мы доказали следующие утверждения.

Лемма 6.4. *В критическом случае $\mathcal{N} \neq \emptyset$ решение $v(x, t) \in \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ задачи Коши (6.6), (6.7) или (6.6), (6.8) или (6.6), (6.9) с ограничением (6.23), где оператор $\Psi(x, D_x)$ и константа $\mu \geq 0$ подобраны таким образом, что уравнение (6.17) с ограничением (6.21) имеет только тривиальное решение, а оператор $P(D_x)$ таков, что $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_P$, может быть только нулевым функционалом.*

Теорема 6.5. *В некритическом случае $\mathcal{N} = \emptyset$ или же в критическом случае $\mathcal{N} \neq \emptyset$, но с ограничением*

$$\Psi(x, D_x)u(x, t) = o(|x|^{-\mu}), \quad x \rightarrow \infty, \quad t > 0 \quad (6.24)$$

где оператор $\Psi(x, D_x)$ и константа $\mu \geq 0$ подобраны таким образом, что уравнение (6.17) с ограничением (6.21) имеет только тривиальное решение, а оператор $P(D_x)$ таков, что $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_P$, решение $u(x, t) \in \mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ задачи Коши (1.1), (1.4) или (1.1), (1.5) или (1.1), (1.6) единственно.

Замечание 6.6. Применительно к уравнению (1.1) оператор $P(D_x)$, о котором идет речь в лемме 6.4 и теореме 6.5, может иметь самые разнообразные формы; его можно положить равным, например, одному из операторов $P_k(D_x)$ или нетривиальной линейной комбинации этих операторов или произведению этих операторов и т. д. Так, например, для так называемого *нестационарного пространственного вязкого трансзвукового уравнения* (см. [11])

$$L(D_{\vec{r}}, D_t)u(\vec{r}, t) \equiv (D_x D_t - D_x^3 - \Delta_{(y,z)})u(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t), \quad \vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0 \quad (6.25)$$

(где $\Delta_{y,z} = D_y^2 + D_z^2$), единственность решения обеспечивает любое из следующих условий:

$$u(\vec{r}, t) = o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad r = \sqrt{y^2 + z^2} \rightarrow +\infty, \quad (6.26)$$

где стремление к бесконечности переменных x и r носит раздельный характер; или

$$u(\vec{r}, t) = o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (6.27)$$

или

$$u(\vec{r}, t) = o(1), \quad r = \sqrt{y^2 + z^2} \rightarrow +\infty. \quad (6.28)$$

В нашем случае $m = 1$, $P_1(D_{\vec{r}}) = D_x$, $P_0(D_{\vec{r}}) = D_x^3 + \Delta_{(y,z)}$. Условие (6.27) соответствует случаю $P(D_{\vec{r}}) = P_1(D_{\vec{r}})$, а условие (6.28) — случаю $P(D_{\vec{r}}) = \Delta_{(y,z)} = -P_0(D_{\vec{r}}) + P_1^3(D_{\vec{r}})$. Условие (6.26) является комбинацией условий (6.27) и (6.28). Тем не менее, все эти три условия обеспечивают корректную разрешимость всех задач Коши, связанных с уравнением (6.25) (см. [11]).

Перейдем теперь к разрешимости задач Коши, связанных с уравнением (1.1).

Лемма 6.5. В некритическом случае $\mathcal{N} = \emptyset$ фундаментальное решение задачи Коши (1.8) $E(x, t)$ существует и единственно в классе $\mathcal{U}_+(\mathbb{R}_+^{n+1})$ и может быть представлено равенством

$$E(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{p_k} \operatorname{Res}_{p=p_k} \frac{\exp(pt)}{L(i\xi, p)} \right) (x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (6.29)$$

где $\mathcal{F}^{-1}$ означает обратное преобразование Фурье по переменным $\xi \in \mathbb{R}^n$ (см. формулу (5.9)), а сумма берется по всем нулям $p = p_k \in \mathbb{C}$ функции $L(i\xi, p)$. Кроме того, все производные $D_t^k E(x, t)$ ($k \in \overline{1; m-1}$) распределения $E(x, t)$ принадлежат классу $\mathcal{U}_+(\mathbb{R}_+^{n+1})$.

Доказательство. Воспользуемся равенством (6.5) и применим к обеим его частям преобразование Фурье по переменным $x \in \mathbb{R}^n$ и $t > 0$ (см. формулы (5.2) и (5.9)). Тогда, обозначая через $\hat{E}^*(\xi, p)$ образ Фурье—Лапласа распределения (x, t) , получаем, что

$$L(i\xi, p) \hat{E}^*(\xi, p) = 1(\xi) \otimes 1(p), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \operatorname{Re}(p) > 0,$$

откуда немедленно следует равенство

$$\hat{E}^*(\xi, p) = \frac{1}{L(i\xi, p)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \operatorname{Re}(p) > 0. \quad (6.30)$$

Из равенства (6.30) следует, что распределение $\hat{E}^*(\cdot, p) \in S'(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ в то же время является рациональной функцией по переменной $p \in \mathbb{C}$, причем в силу предположения $\mathcal{N} = \emptyset$ и условия нестационарности уравнения (1.1) (см. формулу (1.3) и комментарии к ней) все ее полюсы p_k удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}(p_k) \leq 0$. Обозначая через $\mathcal{L}^{-1}(f^*)(x)$ обратное преобразование Лапласа функции $f^*(p)$, восстанавливаем распределение $E(x, t)$ равенством

$$E(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{L}^{-1}(\hat{E}^*))(x, t) \equiv \mathcal{F}^{-1} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{L(i\xi, p)} \right) (x, t). \quad (6.31)$$

Далее, поскольку, как упоминалось выше, $E^*(\xi, p)$ является рациональной функцией переменной p , то его обратное преобразование Лапласа может быть представлено в форме (см. [14])

$$\hat{E}(\xi, t) = \left(\sum_k \operatorname{Res}_{p=p_k} \frac{\exp(pt)}{L(i\xi, p)} \right) (x), \quad (6.32)$$

где $\hat{E}(\xi, t)$ — прямое преобразование Фурье распределения $E(x, t)$. Теперь, объединяя формулы (6.31) и (6.32), получаем равенство (6.30).

Наконец, замечая, что

$$p^m E^*(\xi, p) = O(1), \quad \operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty,$$

в силу леммы 4.4 и равенства (4.9) имеем $\hat{E}(\xi, t) \in \mathcal{U}_+^m$ и $D_t^k \hat{E}(\xi, t) \in \mathcal{U}_+$ ($k \in \overline{1; m-1}$). Но тогда (см. предложение 5.1) и $E(x, t) \in \mathcal{U}_+^m$ и $D_t^k E(x, t) \in \mathcal{U}_+$ ($k \in \overline{1; m-1}$). Лемма доказана. $\square$

Замечание 6.7. Как было упомянуто при доказательстве леммы 6.5, распределение $\hat{E}^*(\xi, p)$ по группе переменных $\xi \in \mathbb{R}^n$ представляет собой классическую функцию класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ при всех $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(p) > 0$. При этом, являясь правильной рациональной функцией, она еще и ограничена вместе со всеми своими производными. Но из этого следует, что произведение $\hat{E}^*(\xi, p) \hat{h}(\xi)$ корректно определено для всех $\hat{h}(\xi) \in S'(\mathbb{R}^n)$, а значит, корректно определены свертки $(E^*(\cdot, p) * h(\cdot))(x)$ и $(E(\cdot, t) * h(\cdot))(x)$ по пространственным переменным $x \in \mathbb{R}^n$ для всех распределений $h(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, из следствия 4.2 и формул (4.12), (4.13) вытекает, что корректно определена и свертка $(E \otimes * f)(x, t)$ для любого распределения $f(x, t) \in \mathcal{U}_+$.

Кроме того, из леммы 4.5 и ее доказательства следует, что $E(t, x)$ и все ее производные $D_t^k E(t, x)$, $k \in \overline{1; m-1}$, на самом деле являются распределениями класса $\mathcal{U}_+^\infty$ (кроме того, формула (4.11) подтверждает, что распределение $E(t, x)$ действительно удовлетворяет нужным начальным условиям, указанным в формуле (1.8)). Производные $D_t^k E(t, x)$ старших порядков

$k = m, m+1, \dots$ уже не принадлежат классу $\mathcal{U}_+$, но остаются при этом в классе $\mathcal{U}^\infty$ и, кроме того, удовлетворяют начальным условиям

$$\begin{cases} (D_t^{mk+l}E)|_{t=+0} = 0, \\ (P_m^k D_t^{mk-1}E)|_{t=+0} = \delta(x), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \dots, \quad l \in \overline{0; m-2}. \quad (6.33)$$

если $m \geq 2$.

Теперь из определения 6.1, лемм 5.1, 6.1, 6.3 и 6.5, следствий 6.1 и 6.3, замечания 6.7, формул (6.1)–(6.5) и (6.33) вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 6.6. *В некритическом случае $\mathcal{N} = \emptyset$ задача Коши (1.1), (1.4) или (1.1), (1.5) или (1.1), (1.6) — корректно разрешима в классе $U_+^m(\mathbb{R}_+^{n+1})$ при любых $f(x, t) \in \mathcal{U}_+(\mathbb{R}_+^{n+1})$ и $h_k(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$. При этом решение $u(x, t) \in U_+^m(\mathbb{R}_+^{n+1})$ может быть представлено в следующем виде:*

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{k-1} P_k(D_x) D_t^{k-l-1} (E(\cdot, t) * h_l(\cdot))(x) + (E(\cdot, \cdot) \otimes * f(\cdot, \cdot))(x, t) \quad (6.34)$$

для задачи (1.1), (1.4),

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{k-2} P_k(D_x) D_t^{k-l-1} (E(\cdot, t) * h_l(\cdot))(x) + (E(\cdot, t) * h_{m-1}(\cdot))(x) + (E(\cdot, \cdot) \otimes * f(\cdot, \cdot))(x, t) \quad (6.35)$$

для задачи (1.1), (1.5),

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{k-2} P_k(D_x) D_t^{l-k-1} (E(\cdot, t) * h_l(\cdot))(x) + (E(\cdot, t) * P_m''(D_x) h_{m-1}(\cdot))(x) + (E(\cdot, \cdot) \otimes * f(\cdot, \cdot))(x, t) \quad (6.36)$$

для задачи (1.1), (1.6). Оператор $P_m''(D_x)$ берется из правой части формулы (1.7). Символ $*$ означает свертку по пространственным переменным $x \in \mathbb{R}^n$, а $\otimes$ — частичную свертку в $S'(\mathbb{R}_+^{n+1})$ по переменной t (см. формулу (4.12)). Распределение $E(x, t) \in U_+^m(\mathbb{R}_+^{n+1})$ является фундаментальным решением Коши задачи (1.8), определенное равенством (6.31).

Перейдем теперь к критическому случаю уравнения (1.1) $\mathcal{N} \neq \emptyset$. Как явствует из предыдущего, главная проблема заключается в *неединственности* решения любой из задач Коши (1.1), (1.4) или (1.1), (1.5) или (1.1), (1.6), поскольку решение $u(x, t)$ становится единственным лишь с точностью до такого распределения $v(x, t)$, что носитель его Фурье-образа $\hat{v}(\xi, t)$ локализован на множестве $\mathcal{N}$. Также из предыдущего следует (см. теорему 6.5 и следствие 6.4), что единственность решения может быть достигнута выбором подходящего условия (6.24) регулярности решения на бесконечности. Однако (см. замечание 6.6, пример 1.2, формулы (6.25)–(6.28) и (1.20)–(1.26)), такое условие может как обеспечивать корректность постановки этих задач, так и вступать в противоречие с их *разрешимостью*. Все это относится и к задаче построения фундаментального решения Коши $E(x, t)$ задачи (1.8). Существует несколько способов решения этой проблемы, однако остановимся лишь на двух из них.

1. Можно просто построить решение $E(x, t)$ в явном виде, после чего условие (6.24) можно определить, исходя из асимптотических свойств $E(x, t)$ и свойств решений уравнений (6.20) (автор всегда поступал именно таким образом; см. [6–13]). Однако такой способ в большинстве случаев неприемлем, поскольку задача построения фундаментального решения многократно сложнее общей задачи о корректной разрешимости задач Коши для весьма обширных классов уравнений в частных производных.
2. Положим оператор $P(D_x)$ из уравнения (6.17) равным оператору $P_m(D_x)$ и рассмотрим в классе $S'(\mathbb{R}^n)$ уравнение

$$P_m(D_x)E_m(x) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (6.37)$$

Далее, пусть условие

$$\Psi_m(x, D_x)u_m(x) = o(|x|^{-\mu}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (6.38)$$

обеспечивает существование и единственность фундаментального решения $E_m(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$ уравнения (6.37). (Смысл формулы (6.38) пояснен ранее; см. замечание 6.5 и формулы (6.21) и (6.22).)

Добавим теперь к задаче Коши (1.8) условие регулярности решения на бесконечности:

$$\Psi_m(x, D_x)E(x, t) = o(|x|^{-\mu}), \quad x \rightarrow \infty, \quad t > 0. \quad (6.39)$$

Само фундаментальное решение $E(x, t)$ будем искать в виде

$$E(x, t) = (E_m(\cdot) * H(\cdot, t))(x), \quad (6.40)$$

где распределение $H(x, t) \in \mathcal{U}_+^m$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} L(D_x, D_t)H(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ (D_t^k H)|_{t=+0} = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \overline{0; m-2}, \\ (D_t^{m-1} E)|_{t=+0} = \delta(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (6.41)$$

и, кроме того, ограничению

$$\Psi_m(x, D_x)H(x, t) = \vartheta(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad t > 0. \quad (6.42)$$

Обозначая через $\hat{H}^*(\xi, p)$ образ Фурье—Лапласа распределения $H(x, t)$ и, сравнивая задачи (6.41) и (1.8), так же, как и при доказательстве леммы 6.3, получаем (с учетом равенств (6.1)–(6.3)), что

$$\hat{H}^*(\xi, p) = \frac{P_m(i\xi)}{L(i\xi, p)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \operatorname{Re}(p) > 0. \quad (6.43)$$

Из этого равенства следуют следующие факты.

1. Распределение $\hat{H}^*(\xi, p)$ может быть доопределено до регулярного распределения класса $S'(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ простым предельным переходом при $\xi \rightarrow \xi_0$, где ξ_0 пробегает множество $\in \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_p$, причем такое доопределение корректно, поскольку наличие условия (6.43) означает, что у распределения $\hat{H}(\xi, t)$ его сингулярная часть, локализованная на множестве $\mathcal{N}$, отсутствует (точнее, становится равной нулю).
2. Само распределение $H(x, t)$ может быть восстановлено по ее образу Фурье—Лапласа $\hat{H}^*(\xi, p)$, определенного формулой (6.43), равенством

$$H(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{p \in p_k} \operatorname{Res} \frac{P_m(i\xi) \exp(pt)}{L(i\xi, p)} \right)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (6.44)$$

3. Поскольку распределение $\hat{H}^*(\xi, p) \in S'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ фактически является бесконечно дифференцируемой медленно растущей (вместе со всеми своими производными) функцией переменных $\xi \in \mathbb{R}^n$, то корректно определены произведения $\hat{H}^*(\xi, p)\hat{h}(\xi)$ и $(\xi, p)\hat{f}^*(\xi, p)$ для всех $\hat{h}(\xi) \in S'(\mathbb{R}^n)$ и $\hat{f}(\xi, t) \in \mathcal{U}_+$, а значит, и корректно определены свертки $(H(\cdot, t) * h(\cdot))(x)$, $(H(\cdot, \cdot) \circledast f(\cdot, \cdot))(x, t)$, которые (см. [18]) сохраняют асимптотики распределений $h(x)$ и $f(x, t)$ при $x \rightarrow \infty$ (по крайней мере, асимптотики, понимаемые в смысле теории распределений; см. формулу (6.22)). Из чего следует, что распределение $E(x, t)$, определенное равенством (6.40), удовлетворяет условию (6.39), поскольку распределение $E(x)$ удовлетворяет условию (6.38).
4. Принадлежность распределения $E(x, t)$ классу $\mathcal{U}_+$ проверяется так же, как и при доказательстве леммы 6.3.

Таким образом, мы установили справедливость следующего утверждения.

Лемма 6.6. *В критическом случае $\mathcal{N} \neq \emptyset$ фундаментальное решение $E(x, t)$ задачи Коши (1.8) с ограничением (6.39) существует и единственно в классе $\mathcal{U}_+^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ и может быть представлено равенствами (6.40), (6.44). Кроме того, все производные $D_t^k E(x, t)$ ($k \in \overline{1; m-1}$) распределения $E(x, t)$ принадлежат классу $\mathcal{U}_+(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$.*

Замечание 6.8. Как и в некритическом случае (см. замечание 6.7), и в нашем случае $E(x, t), D_t^k E(x, t) \in \mathcal{U}_+^\infty$ ($k \in \overline{1; m-1}$), $D_t^k \in \mathcal{U}_+^\infty$ ($k \geq m$). Кроме того, при $m \geq 2$ выполняются равенства (6.33).

Перейдем теперь к корректной разрешимости задач Коши (1.1), (1.4), (1.1), (1.5) и (1.1), (1.6) в критическом случае уравнения (1.1). Отметим, что если в некритическом случае мы не ставили никаких условий регулярности решения на бесконечности, то теперь добавим для каждой из рассматриваемых задач ограничение

$$\Psi_m(x, D_x)u(x, t) = o(|x|^{-\mu}), \quad x \rightarrow \infty, \quad t > 0, \quad (6.45)$$

соответствующее ограничению (6.39). При этом выполнения аналогичных ограничений потребуем и от распределений $f(x, t)$ и $h_k(x)$ ($k \in \overline{0; m-1}$), входящих в постановку этих задач:

$$\Psi_m(x, D_x)f(x, t) = o(|x|^{-\mu}), \quad x \rightarrow \infty, \quad t > 0, \quad (6.46)$$

$$\Psi_m(x, D_x)h_k(x) = o(|x|^{-\mu}), \quad x \rightarrow \infty, \quad k \in \overline{0; m-1}. \quad (6.47)$$

Замечание 6.9. Ограничения (6.46), (6.47) являются *минимальными*; для обеспечения корректности свертки с фундаментальным решением $E(x, t)$ необходимо добавлять и другие ограничения, вплоть до

$$f(x, t), h_k(x) = O(|x|^{-\infty}), \quad x \rightarrow \infty, \quad k \in \overline{0; m-2}. \quad (6.48)$$

Фактически нами доказана следующая теорема.

Теорема 6.7. В критическом случае $\mathcal{N} \neq \emptyset$ задачи Коши (1.1), (1.4), или (1.1), (1.5), или (1.1), (1.6) с условием (6.45) корректно разрешима в классе $U_+^m(\mathbb{R}_+^{n+1})$ при любых $f(x, t) \in \mathcal{U}_+(\mathbb{R}_+^{n+1})$ и $h_k(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$, с ограничениями (6.46), (6.47) (и, может быть, с некоторыми дополнительными ограничениями на поведение на бесконечности — вплоть до условия (6.48)). При этом решение $u(x, t) \in U_+^m(\mathbb{R}_+^{n+1})$ может быть представлено в следующем виде: (6.34) — для задачи Коши (1.1)–(1.4); (6.35) — для задачи Коши (1.1), (1.5); (6.36) — для задачи Коши (1.1), (1.6), где оператор $P_m''(D_x)$ берется из правой части формулы (1.7), а $E(x, t)$ — фундаментальное решение задачи Коши (1.8), (6.39), которое может быть представлено в виде (6.40) и (6.44).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. — М.: Наука, 1977.
2. Булатов М. В. О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнений// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1994. — 34, № 3. — С. 360–372.
3. Буллаф Р. и др. Солитоны. — М.: Мир, 1983.
4. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
5. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988.
6. Засорин Ю. В. Асимптотические и полугрупповые свойства решения задачи Коши для одного уравнения математической физики// Вестн. ВГУ. Сер. физ. мат. — 2005. — 1. — С. 171–173.
7. Засорин Ю. В. Корректная разрешимость задач Коши, связанных с некоторыми дисперсионно-диссипативными моделями// Вестн. ВГУ. Сер. физ. мат. — 2006. — 2. — С. 204–205.
8. Засорин Ю. В. О некоторых свойствах решений двух уравнений, связанных с ионизационными процессами в плазме// Вестн. ВГУ. Сер. физ. мат. — 2004. — 2. — С. 162–166.
9. Засорин Ю. В. О редукции некоторых классов уравнений в частных производных к уравнениям с меньшим числом переменных и точные решения// Сиб. мат. ж. — 2006. — 47, № 4. — С. 782–797.
10. Засорин Ю. В. О связи фундаментальных решений Коши некоторых классов нестационарных уравнений в частных производных с одномерными нестационарными уравнениями// Вестн. ВГУ. Сер. физ. мат. — 2005. — 2. — С. 156–159.
11. Засорин Ю. В. Точные решения некоторых задач, описываемых нестационарными вязкими трансзвуковыми уравнениями// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1994. — 34, № 10. — С. 1446–1488.

12. Засорин Ю. В. Фундаментальные решения для уравнений в частных производных высших порядков: исторический обзор и современные результаты// Вестн. ВГУ. Сер. физ. мат. — 2003. — 1. — С. 123–127.
13. Засорин Ю. В., Придущенко М. В. Трехмерная математическая модель переходных процессов в плазме// Мат. модел. — 2005. — 17, № 5. — С. 41–51.
14. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1967.
15. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1988.
16. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. — М.: Наука, 1990.
17. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — 18, № 1. — С. 3–50.
18. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — М.: Мир, 1965.
19. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Наука, 1965.

Засорин Юрий Валентинович
Воронежский государственный университет
E-mail: York-York-York-1960@yandex.ru