Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. П. Иванова, Дифференциально-разностные уравнения с несоизмеримыми сдвигами аргументов, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 191, 92–100

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-191-92-100>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:11:03

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ АРГУМЕНТОВ

© 2021 г. Е. П. ИВАНОВА

Аннотация. Рассматриваются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с возмущениями в сдвигах аргументов. Получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга в алгебраическом виде. Исследована непрерывная зависимость решений этих задач от сдвигов аргументов.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциально-разностное уравнение, сильная эллиптичность, неравенство Гординга.

DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS WITH INCOMMENSURABLE SHIFTS OF ARGUMENTS

© 2021 E. P. IVANOVA

ABSTRACT. Boundary-value problems for differential-difference equations with perturbations in shifts of arguments are considered. Necessary and sufficient conditions for the fulfillment of Gårding-type inequalities in algebraic form are obtained. Continuous dependence of solutions of these problems on shifts of arguments is examined.

Keywords and phrases: boundary-value problem, differential-difference equation, strong ellipticity, Gårding inequality.

AMS Subject Classification: 47G40

1. Введение. Основы теории эллиптических функционально-дифференциальных уравнений построены в [2, 6, 7]. Интерес к этим задачам связан с важными приложениями к теории многослойных пластин и оболочек (см. [1, 7]), к теории нелинейных лазерных систем (см. [8]), к нелокальным эллиптическим задачам, возникающим в теории плазмы [5] и др. Наиболее глубоко были изучены краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с целочисленными или соизмеримыми сдвигами пространственных переменных, содержащихся в разностных операторах. Такие задачи обладают рядом принципиально новых свойств. Например, символ сильно эллиптического дифференциально-разностного оператора может быть отрицательным, а гладкость обобщенных решений соответствующей краевой задачи может нарушаться внутри области и сохраняться лишь в некоторых подобластях. Дифференциально-разностные уравнения с несоизмеримыми сдвигами в одномерном случае рассматривались в [4, 7]. Новым направлением в теории функционально-дифференциальных уравнений является теория эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием пространственных переменных (см. [5]). В частности, там рассматривался вопрос о непрерывной зависимости константы эллиптичности и решений функционально-дифференциальных уравнений от параметра

ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. В настоящей работе автор исследует эллиптические дифференциально-разностные уравнения, содержащие как слагаемые со сдвигами аргументов, независимые от малого параметра, так и слагаемые, содержащие сдвиги, зависящие от ε . Получены необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности рассматриваемых уравнений.

2. Сильная эллиптичность семейства дифференциально-разностных операторов с малыми сдвигами. Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} D^\alpha R_{\alpha\beta} D^\beta u(x) = f(x) \quad (x \in Q), \quad (1)$$

$$u(x) = 0 \quad (x \notin Q), \quad (2)$$

где Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей, Разностные операторы $R_{\alpha\beta}: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ имеют вид

$$R_{\alpha\beta} u(x) = \sum_{k=-J}^J a_{\alpha\beta}^k u(x_1 + k\varepsilon, x_2, \dots, x_n) \quad (\varepsilon > 0, a_{\alpha\beta}^k \in \mathbb{C}). \quad (3)$$

Назовем уравнение (1) сильно эллиптическим, если выполнено неравенство Гординга:

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (R_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u)_{L_2(Q)} \geq c_1 \|u\|_{H^m(Q)}^2 - c_2 \|u\|_{L_2(Q)}^2 \quad (\forall u \in C_0^\infty(Q), c_1 > 0).$$

Через $H^m(Q)$ обозначено пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(Q)$ вместе с обобщенными производными до порядка m включительно. Пространство $H^m(Q)$ гильбертово со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^m(Q)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_Q D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha_i \geq 0$, $D^\alpha = (-i\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (-i\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$.

Пространство $\dot{H}^m(Q)$ — замыкание пространства $C_0^\infty(Q)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $H^m(Q)$. Известно, что в пространстве $\dot{H}^1(Q)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение

$$(u, v)'_{\dot{H}^m(Q)} = \sum_{|\alpha|=m} \int_Q D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx.$$

Пространство $\dot{H}^m(Q)$ можно отождествить с подпространством функций из $H^m(\mathbb{R}^n)$, равных нулю вне Q .

Проблема равномерной (по параметру $\varepsilon > 0$) сильной эллиптичности уравнений (1) на цилиндрической области Ω ($\Omega = (0, a) \times D$, где D — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$) исследована Л. Е. Россовским в [5] с помощью предложенного им символа $a_R(\eta, \xi)$:

$$a_R(\eta, \xi) = \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} \sum_{|k| \leq J} a_{\alpha\beta}^k \exp(ik\eta) \xi^{\alpha+\beta} \quad (\eta \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n). \quad (4)$$

Здесь переменная $\xi \in \mathbb{R}^n$, отвечающая дифференцированию и переменная $\eta \in \mathbb{R}$, отвечающая сдвигу, изменяются независимо. Обычным же символом будет $a_R(\varepsilon\xi_1, \xi)$.

Теорема 1 (см. [5, теорема 2.13]). *Уравнение (1) является сильно эллиптическим в $\bar{\Omega}$ для любого значения параметра $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Re} a_R(\eta, \xi) > 0 \quad (\eta \in \mathbb{R}, 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n). \quad (5)$$

Следующее утверждение является обобщением предыдущей теоремы на случай произвольной ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей.

Утверждение 1. *Уравнение (1) является сильно эллиптическим в $\bar{Q}$ для любого значения параметра $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (5).*

Доказательство. Достаточность. Пусть неравенство (5) выполнено. Для ограниченной области Q найдется цилиндр Ω_M , такой, что $Q \subset \Omega_M$. Пусть $u \in C_0^\infty(Q)$ — произвольная функция (продолженная нулем вне Q). Тогда $u \in C_0^\infty(\Omega_M)$ и в силу теоремы 1 неравенство Гординга выполнено для уравнения (2) в области Ω_M , следовательно, и в Q .

Необходимость. Для области Q найдется такой цилиндр Ω_m , что $\Omega_m \subset Q$. Пусть неравенство Гординга выполнено в области Q для любой функции $u \in C_0^\infty(Q)$, а следовательно, и для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega_m)$. В силу теоремы 1 выполнено неравенство (5). $\square$

Введем обозначение

$$a_{\min} := \inf_{\eta, \xi} \operatorname{Re} a_R(\eta, \xi) \quad (\eta \in \mathbb{R}, |\xi| = 1). \quad (6)$$

Из доказательства в [5, теорема 2.13] получаем также следующее утверждение.

Утверждение 2. Для дифференциально-разностного уравнения (1) имеет место неравенство

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} (R_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u)_{L_2(Q)} \geq a_{\min} \|u\|_{H^m(Q)}^2 \quad (\forall u \in C_0^\infty(Q)), \quad (7)$$

где $a_{\min}$ определено формулой (6).

3. Сильная эллиптичность возмущенных дифференциально-разностных уравнений.

Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R_{ij\varepsilon}^a \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) - \sum_i^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^b \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) = f(x) \quad (x \in Q), \quad (8)$$

$$u(x) = 0 \quad (x \notin Q), \quad (9)$$

где Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей, $f \in L_2(Q)$. Разностные операторы $R_{ij\varepsilon}^a: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$, $R^b: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ имеют вид

$$R_{ij\varepsilon}^a u(x) = a_{ij0} u(x) + \sum_{k=1}^J a_{ijk} (u(x_1 + k\varepsilon, x_2, \dots, x_n) + u(x_1 - k\varepsilon, x_2, \dots, x_n)) \\ (\varepsilon > 0, a_{ijk} \in \mathbb{R}, a_{ijk} = a_{jik}), \quad (10)$$

$$R^b u(x) = b_0 u(x) + \sum_{h \in M \setminus 0} b_h (u(x+h) + u(x-h)) \quad (b_h \in \mathbb{R}).$$

Здесь $M \in \mathbb{R}^n$ — множество векторов с целочисленными координатами, $\varepsilon > 0$ — малый параметр (далее $\varepsilon \rightarrow 0$), операторы $R_{ij\varepsilon}^a$ — переменные, оператор R^b — стационарный. В операторе R^b произвольные пространственные сдвиги, в операторе $R_{ij\varepsilon}^a$ — сонаправленные (без ограничения общности — в направлении оси x_1). Решением краевой задачи (8), (9) будем называть функцию $u \in \dot{H}^1(Q)$, для учета однородных краевых условий продолженную нулем вне Q , если для любой $v \in \dot{H}^1(Q)$ выполнено интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^n (R_{ij\varepsilon}^a u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^n (R^b u_{x_i}, v_{x_i})_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \quad f \in L_2(Q). \quad (11)$$

Здесь $\dot{H}^1(Q)$ — пространство Соболева функций $v \in H^1(Q)$, у которых $v|_{\partial Q} = 0$, где равенство понимается в смысле следов. В пространстве $\dot{H}^1(Q)$ будем использовать эквивалентное скалярное произведение

$$(u, v)_{\dot{H}^1(Q)} = \int_Q \nabla u \nabla \bar{v} dx.$$

Введем симметричные билинейные формы $a^\varepsilon[u, v]$, $b[u, v]$:

$$a^\varepsilon[u, v] := \sum_{i,j=1}^n (R_{ij\varepsilon}^a u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)}, \quad b[u, v] := \sum_{i=1}^n (R^b u_{x_i}, v_{x_i})_{L_2(Q)}.$$

С учетом этих обозначений интегральное тождество (11) примет вид

$$a^\varepsilon[u, v] + b[u, v] = (f, v)_{L_2(Q)}. \quad (12)$$

Получим условия равномерной (по $\varepsilon > 0$) сильной эллиптичности уравнений (12). Неравенство Гординга для него примет вид

$$a^\varepsilon[u, u] + b[u, u] \geq c_1 \|u\|_{\dot{H}^1(Q)}^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(Q), \quad c_1 > 0. \quad (13)$$

Если в уравнении (12) положить $b[u, v] = 0$, получим

$$a^\varepsilon[u, v] = (f, v)_{L_2(Q)}. \quad (14)$$

Уравнение (14) является частным случаем уравнения вида (1).

Символ $a_R(\eta, \xi)$, определенный формулой (4), для уравнения (14) примет вид

$$a_R(\eta, \xi) = \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}^0 + 2 \sum_{k=1}^J a_{ij}^k \cos(k\eta) \right) \xi_i \xi_j \quad (\eta \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n). \quad (15)$$

Введем обозначение

$$a_{\min} := \inf_{\eta, \xi} \operatorname{Re} a_R(\eta, \xi) \quad (\eta \in \mathbb{R}, \quad |\xi| = 1).$$

В силу утверждения 2 для любого $\varepsilon > 0$

$$a^\varepsilon[u, u] \geq a_{\min} \|u\|_{\dot{H}^1(Q)}^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(Q). \quad (16)$$

Для выполнения неравенства Гординга для уравнения (14) при любых $\varepsilon > 0$ в силу утверждения 1 необходимо и достаточно, чтобы $a_{\min} > 0$. При этом $c_1 = a_{\min}$ и не зависит от ε .

Получим теперь условия сильной эллиптичности семейства уравнений (8). Введем контрольный разностный оператор $R^C: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$

$$R^C u(x) = a_{\min} u(x) + R^b u(x) = a_{\min} u(x) + b_0 u(x) + \sum_{h \in M \setminus 0} b_h (u(x+h) + u(x-h)). \quad (17)$$

Введем оператор $R_Q^C = P_Q R^C I_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, где $I_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n$, $P_Q: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q .

Теорема 2. Уравнение (8) является сильно эллиптическим в $\bar{Q}$ для любого значения параметра $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда контрольный оператор R_Q^C является положительно определенным.

Доказательство. Достаточность. Пусть оператор R_Q^C является положительно определенным, т.е.

$$(R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geq c_1 (u, u)_{L_2(Q)} \quad (c_1 > 0, \quad \forall u \in C_0^\infty(Q)). \quad (18)$$

Докажем, что для всех $\varepsilon > 0$ справедлива формула (13) с той же константой c_1 :

$$\sum_{i=1}^n (R_Q^C u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} \geq c_1 \sum_{i=1}^n (u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} = c_1 \|u\|_{\dot{H}^1(Q)}^2 \quad (\forall u \in C_0^\infty(Q)).$$

Отсюда

$$b[u, u] + a_{\min} \|u\|_{\dot{H}^1(Q)}^2 = \sum_{i=1}^n (R_Q^C u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} \geq c_1 \|u\|_{\dot{H}^1(Q)}^2 \quad (\forall u \in C_0^\infty(Q)). \quad (19)$$

Следовательно, из формул (16), (19)

$$a^\varepsilon[u, u] + b[u, u] = (a^\varepsilon[u, u] - a_{\min} \|u\|_{\dot{H}^1(Q)}^2) + (a_{\min} \|u\|_{\dot{H}^1(Q)}^2 + b[u, u]) \geq c_1 \|u\|_{\dot{H}^1(Q)}^2.$$

Отсюда для всех $\varepsilon > 0$ следует условие сильной эллиптичности (13) с константой c_1 из неравенства (18).

Необходимость. Предположим противное. Пусть оператор R_Q^C не является положительно определенным. Используем формализм, построенный А. Л. Скубачевским в [7]. Для оператора R_Q^C построим разбиение $\mathfrak{R}$ области Q на непересекающиеся подобласти Q_r ($r = 1, 2, \dots$): $\bigcup_r \bar{Q}_r = \bar{Q}$ и для любых Q_{r_1} и $h \in \{M, -M\}$ или найдется такое Q_{r_2} , что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, или $Q_{r_1} + h \in \mathbb{R}^n \setminus Q$. Здесь M — множество векторов из формулы (10).

Разбиению $\mathfrak{R}$ поставим в соответствие граф. Вершины графа это подобласти Q_r , ребра графа — сдвиги $h \in \{M, -M\}$. Если $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, то вершины графа, ассоциированные с подобластями Q_{r_2} , Q_{r_1} связаны ребром h . Введем на множестве подобластей (вершин графа) отношение эквивалентности: подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathfrak{R}$ принадлежат к одному классу, если существует путь в графе из вершины Q_{r_1} в Q_{r_2} . Это отношение порождает разбиение $\mathfrak{R}$ на непересекающиеся классы. Обозначим подобласти Q_{sl} , где s номер класса и l номер области в этом классе. Каждый класс s состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} .

Обозначим через $L_2(\bigcup_l Q_{sl})$ подпространство функций из $L_2(Q)$, обращающихся в нуль вне $L_2(\bigcup_l Q_{sl})$ ($l = 1, \dots, N(s)$).

Обозначим через $P_s: L_2(Q) \rightarrow L_2(\bigcup_l Q_{sl})$ оператор ортогонального проектирования на $L_2(\bigcup_l Q_{sl})$. В силу [7, лемма 8.5] $L_2(\bigcup_l Q_{sl})$ является инвариантным подпространством оператора R_Q^C , при этом $L_2(Q) = \bigoplus_s L_2(\bigcup_l Q_{sl})$.

Введем изоморфизм гильбертовых пространств $U_s: L_2(\bigcup_l Q_{sl}) \rightarrow L_2^N(Q_{s1})$ по формуле

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1}), \quad (20)$$

где $l = 1, \dots, N = N(s)$, h_{sl} таково, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ ($h_{s1} = 0$),

$$L_2^N(Q_{s1}) = \prod_{l=1}^N L_2(Q_{s1}).$$

В силу [7, лемма 8.6] оператор $R_{Qs}: L_2^N(Q_{s1}) \rightarrow L_2^N(Q_{s1})$, заданный формулой $R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1}$, есть оператор умножения на матрицу $R_s = R_s(x)$ ($x \in Q_{s1}$) порядка $N(s) \times N(s)$, элементы матрицы вычисляются по формуле

$$r_{ij}^s(x) = \begin{cases} b_h, & h = h_{sj} - h_{si} \in M, \\ 0, & h_{sj} - h_{si} \notin M. \end{cases} \quad (21)$$

При этом

$$(R_Q^C w, v)_{L_2(\bigcup_l Q_{sl})} = (R_s W, V)_{L_2^N(Q_{s1})}, \quad (22)$$

$v, w \in L_2(\bigcup_l Q_{sl})$; $V = U_s v$, $W = U_s w \in L_2^N(Q_{s1})$.

Обозначим через n_1 число различных матриц $R_{s\nu}$ ($\nu = 1, \dots, n_1$).

В силу [7, лемма 8.8] оператор R_Q^C положительно определен тогда и только тогда, когда все матрицы $R_{s\nu}$ ($\nu = 1, \dots, n_1$) положительно определены. Отсюда, так как R_Q^C не является положительно определенным, найдется класс s и семейство $\{Q_{sk}\}_{k=1}^N$ областей разбиения области Q и матрица R_s^b с неположительным собственным значением $\lambda_b \leq 0$ и собственным вектором $q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^N$: $R_s^b q = \lambda_b q$. Здесь N — размерность матрицы R_s^b и количество подобластей в классе s . Пространство

$$C_0^\infty\left(\bigcup_{k=1}^N Q_{sk}\right)$$

инвариантно для оператора R_Q^C и действие этого оператора на нем сводится к умножению на матрицу R_s^b , заданную формулой (21). Для билинейной формы $\tilde{a}^\varepsilon[u, v] := a^\varepsilon[u, v] - a_{\min}(u, v)_{\dot{H}^1(Q)}$ символ $\tilde{a}_R(\eta, \xi)$ примет вид

$$\tilde{a}_R(\eta, \xi) = a_R(\eta, \xi) - a_{\min}|\xi|^2 \quad (\eta \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n). \quad (23)$$

Из формулы (23) следует, что

$$\min_{\eta, \xi} \tilde{a}_R(\eta, \xi) = 0 \quad (\eta \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| = 1).$$

В силу утверждения 1 уравнение, соответствующее интегральному тождеству

$$\tilde{a}^\varepsilon[u, v] = (f, v)_{L_2(Q)}$$

для любой области $G \subset \mathbb{R}^n$ не является равномерно по $\varepsilon > 0$ сильно эллиптическим, т.е. для любого $\delta > 0$ найдутся такие $\varepsilon(\delta) > 0$ и функция $u_\varepsilon \in C_0^\infty(G)$, что

$$\tilde{a}^\varepsilon[u_\varepsilon, u_\varepsilon]_G < \delta \|u_\varepsilon\|_{\dot{H}^1(G)}^2. \quad (24)$$

Здесь $\tilde{a}^\varepsilon[u_\varepsilon, u_\varepsilon]_G$ — сужение формы $\tilde{a}^\varepsilon[u_\varepsilon, u_\varepsilon]$ на область G . В качестве области G в формуле (24) возьмем область $G_{s1} \subset Q_{s1}$. При этом выберем ε достаточно малым, чтобы для любой функции $u_\varepsilon(x)$ $R_{ij\varepsilon}^a u_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(Q_{s1})$, т.е. разностные операторы $R_{ij\varepsilon}^a$ не сдвигают носитель функции $u_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(G_{s1})$ за пределы области Q_{s1} : $\text{supp}(u_\varepsilon(x)) \subset G_{s1} \Rightarrow \text{supp}(R_{ij\varepsilon}^a u_\varepsilon(x)) \subset Q_{s1}$.

Построим функцию $V \in L_2^N(Q_{s1})$, $V(x) = u_\varepsilon(x)q = (u_\varepsilon(x)q_1, \dots, u_\varepsilon(x)q_N)$. Введем обозначение

$$Q_s^N = \bigcup_{l=1}^N Q_{sl}.$$

Функции V соответствует $v \in L_2(Q_s^N)$, $v = U_s^{-1}(V)$, где U_s — изометрический изоморфизм, определенный формулой (20): $(v, v)_{L_2(Q_s^N)} = (V, V)_{L_2^N(Q_{s1})}$. Области $G_{sl} \subset Q_{sl}$ получают соответствующими сдвигами области G_{s1} . Введем обозначение

$$G_s^N = \bigcup_{l=1}^N G_{sl}.$$

По построению $\text{supp}(v) \subset G_s^N$ и в силу (24), примененному к области G_{s1} ,

$$\tilde{a}^\varepsilon[v, v]_Q = \tilde{a}^\varepsilon[v, v]_{G_s^N} = \sum_{l=1}^N q_l^2 \tilde{a}^\varepsilon[u_\varepsilon, u_\varepsilon]_{G_{s1}} < \delta |q|^2 (u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{\dot{H}^1(G_{s1})} = \delta (v, v)_{\dot{H}^1(Q)}.$$

С учетом (22), поскольку q — собственный вектор матрицы R_s^b :

$$\begin{aligned} \tilde{b}[v, v]_Q &= \sum_{i=1}^n (R_Q^C v_{x_i}, v_{x_i})_{L_2(Q)} = \sum_{i=1}^n (R_Q^C v_{x_i}, v_{x_i})_{L_2(Q_s^N)} = \sum_{i=1}^n (R_s^b V_{x_i}, V_{x_i})_{L_2^N(Q_{s1})} = \\ &= \sum_{i=1}^n (R_s^b q(u_\varepsilon)_{x_i}, q(u_\varepsilon)_{x_i})_{L_2^N(Q_{s1})} = \sum_{i=1}^n (\lambda_b q(u_\varepsilon)_{x_i}, q(u_\varepsilon)_{x_i})_{L_2^N(Q_{s1})} = \lambda_b \sum_{l=1}^N q_l^2 (u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{\dot{H}^1(G_{s1})} = \\ &= \lambda_b |q|^2 \|u_\varepsilon\|_{\dot{H}^1(G_{s1})}^2 = \lambda_b (v, v)_{\dot{H}^1(Q)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\tilde{a}^\varepsilon[v, v]_Q + \tilde{b}[v, v]_Q < (\delta + \lambda_b)(v, v)_{\dot{H}^1(Q)} \leq \delta (v, v)_{\dot{H}^1(Q)},$$

и уравнение (12) не является равномерно по ε сильно эллиптическим. Теорема доказана. $\square$

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$-\Delta(R_\varepsilon^a u(x) + R^b u(x)) = f(x) \quad (x \in Q), \quad (25)$$

$$u(x) = 0 \quad (x \notin Q). \quad (26)$$

Разностные операторы заданы формулой (10). Для уравнения (25) неравенство Гординга примет вид

$$\sum_{i=1}^n (R_\varepsilon^a u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} + (R^b u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} \geq c_1 \|u\|_{\dot{H}^1(Q)}^2 \quad \forall u \in C_0^\infty(Q), \quad c_1 > 0. \quad (27)$$

Символ $a_R(\eta, \xi)$, определенный формулой (15), для уравнения (25) примет вид

$$a_R(\eta, \xi) = \sum_{i=1}^n \left(a^0 + 2 \sum_{k=1}^J a^k \cos(k\eta) \right) \xi_i^2 = \left(a^0 + 2 \sum_{k=1}^J a^k \cos(k\eta) \right) |\xi|^2 \quad (\eta \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Введем обозначение $g(\eta) = a_R(\eta, \xi)$ ($\eta \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| = 1$). Тогда

$$g(\eta) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^J a^k \cos(k\eta) \quad (\eta \in \mathbb{R}). \quad (28)$$

Неравенство Гординга для оператора $-\Delta(R_\varepsilon^a u(x))$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^n (R_\varepsilon^a u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} \geq c_1 \|u\|_{\dot{H}^1(Q)}^2 \quad \forall u \in C_0^\infty(Q), \quad c_1 > 0.$$

Введем обозначение $a_{\min} := \min_\eta g(\eta)$. В силу утверждения 1 для сильной эллиптичности семейства операторов $-\Delta(R_\varepsilon^a u(x))$ необходимо и достаточно $a_{\min} > 0$. При этом $c_1 = a_{\min}$ и не зависит от ε .

Введем оператор $R^C := R^b + a_{\min} I$, $R_Q^C = P_Q R^C I_Q$, где I — тождественный оператор. В силу теоремы 2 для выполнения неравенства (27) необходимо и достаточно, чтобы оператор R_Q^C был положительно определен.

4. Переход к предельной задаче. Наряду с задачей (8), (9) рассмотрим предельную краевую задачу

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^{\lim} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^b \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) = f(x) \quad (x \in Q), \quad (29)$$

$$u(x) = 0 \quad (x \notin Q), \quad (30)$$

где

$$a_{ij}^{\lim} = a_{ij}^0 + 2 \sum_{k=1}^J a_{ij}^k.$$

Уравнение (29) — это частный случай уравнения (8). Его символ

$$a_{\lim}(\eta, \xi) = \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}^0 + 2 \sum_{k=1}^J a_{ij}^k \right) \xi_i \xi_j = a_R(0, \xi) \quad (\eta \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Следовательно, предельное уравнение (29) является сильно эллиптическим, если оператор R_Q^C является положительно определенным.

Теорема 3. Пусть оператор R_Q^C является положительно определенным. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ и любом фиксированном значении параметра $\varepsilon > 0$ краевая задача (8), (9) имеет единственное решение $u_\varepsilon \in \dot{H}^1(Q)$. При этом $\|u_\varepsilon - u_{\lim}\|_{\dot{H}^1(Q)} \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, где $u_{\lim} \in \dot{H}^1(Q)$ — решение предельной задачи (29), (30).

Доказательство аналогично доказательству [5, следствие 2.4]. $\square$

Пример 2. Рассмотрим задачу (25), (26) из примера 1 для круга $Q \subset \mathbb{R}^2$ единичного радиуса, $x = (x_1, x_2)$, разностные операторы

$$R^b u(x) = b_0 u(x_1, x_2) + b_1 (u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2)) + b_2 (u(x_1, x_2 + 1) + u(x_1, x_2 - 1)),$$

$$R_\varepsilon^a u(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1 (u(x_1 + \varepsilon, x_2) + u(x_1 - \varepsilon, x_2)), \quad \varepsilon > 0.$$

В силу (28) символ $g(\eta) = a_0 + 2a_1 \cos(\eta)$ ($\eta \in \mathbb{R}$). Тогда $a_{\min} = a_0 - 2|a_1|$. Контрольный разностный оператор имеет вид

$$R^C u(x) = \tilde{b}_0 u(x_1, x_2) + b_1 (u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2)) + b_2 (u(x_1, x_2 + 1) + u(x_1, x_2 - 1)), \quad \tilde{b}_0 = b_0 + a_{\min}.$$

Рис. 1

В силу теоремы 2 критерием сильной эллиптичности уравнений (25) для всех $\varepsilon > 0$ является положительная определенность оператора $R_Q^C = P_Q R^C I_Q$. Разбиение области Q для разностного оператора R_Q^C состоит из семи классов подобластей. Эти подобласти изображены на рис. 1. На s -м классе действию разностного оператора R_Q^C соответствует умножение на матрицу R_s ($s = 1, \dots, 7$):

$$R_1 = \begin{pmatrix} \tilde{b}_0 & b_1 \\ b_1 & \tilde{b}_0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \tilde{b}_0 & b_2 \\ b_2 & \tilde{b}_0 \end{pmatrix}, \quad R_{3-6} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_0 & b_1 & 0 \\ b_1 & \tilde{b}_0 & b_2 \\ 0 & b_2 & \tilde{b}_0 \end{pmatrix}, \quad R_7 = \begin{pmatrix} \tilde{b}_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ b_1 & \tilde{b}_0 & 0 & b_2 \\ b_2 & 0 & \tilde{b}_0 & b_1 \\ 0 & b_2 & b_1 & \tilde{b}_0 \end{pmatrix}.$$

Необходимым и достаточным условием положительной определенности R_Q^C является положительная определенность этих матриц. Нетрудно убедиться, что эти матрицы положительно определены при выполнении условий

$$\tilde{b}_0 > 0, \quad |b_1| < \tilde{b}_0, \quad |b_2| < \tilde{b}_0, \quad b_1^2 + b_2^2 < \tilde{b}_0^2, \quad |b_1| + |b_2| < \tilde{b}_0$$

и, окончательно,

$$|b_1| + |b_2| + 2|a_1| < b_0 + a_0.$$

При выполнении этого условия в силу теоремы 3 уравнение (25) является сильно эллиптическим для всех $\varepsilon > 0$, решения $u_\varepsilon \in \dot{H}^1(Q)$ задач (25), (26) существуют и $\|u_\varepsilon - u_{\text{lim}}\|_{\dot{H}^1(Q)} \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, где $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(Q)$ — решение предельной задачи

$$\begin{aligned} -\Delta(R_{\text{lim}}^b u(x)) &= f(x) \quad (x \in Q), \\ u(x) &= 0 \quad (x \notin Q) \end{aligned}$$

с разностным оператором

$$R_{\text{lim}}^b u(x) = (b_0 + a_0 + 2a_1)u(x_1, x_2) + b_1(u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2)) + b_2(u(x_1, x_2 + 1) + u(x_1, x_2 - 1)).$$

Заметим, что условием сильной эллиптичности предельного уравнения является

$$|b_1| + |b_2| < b_0 + a_0 + 2a_1.$$

Автор выражает благодарность Л. Е. Россовскому и А. Л. Скубачевскому за внимание к работе и полезные обсуждения результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики// Прикл. мех. — 1979. — 15, № 5. — С. 30–47.
2. *Скубачевский А. Л.* О некоторых нелокальных эллиптических краевых задачах// Диффер. уравн. — 1982. — 18, № 9. — С. 1590–1599.
3. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — 71, № 5 (431). — С. 3–112.
4. *Ivanova E. P.* Continuous dependence on translations of the independent variable for solutions of boundary-value problems for differential-difference equations// J. Math. Sci. — 2018. — 233, № 6. — P. 828–852.
5. *Rossovskii L. E.* Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function// J. Math. Sci. — 2017. — 223, № 4. — P. 351–493.
6. *Skubachevskii A. L.* The first boundary-value problem for strongly elliptic differential difference equations// J. Differ. Equations. — 1986. — 63, № 3. — P. 332–361.
7. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional-Differential Equations and Applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.
8. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics// Nonlin. Anal. Theory Meth. Appl. — 1998. — 32, № 2. — P. 261–278.

Иванова Елена Павловна

Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет);

Российский университет дружбы народов (РУДН), Москва

E-mail: elpaliv@yandex.ru