Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Клодина, Н. С. Задорожная, Об одном изменении скоростей в области плоской и осесимметричной стационарной фильтрации, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 191, 101–104

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-191-101-104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 08:17:53

ОБ ОДНОМ ИЗМЕНЕНИИ СКОРОСТЕЙ В ОБЛАСТИ ПЛОСКОЙ И ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

© 2021 г. Т. В. КЛОДИНА, Н. С. ЗАДОРОВЖНАЯ

Аннотация. В настоящей работе предлагаются теоремы об изменении скоростей при решении краевой задачи плоской и осесимметричной стационарной фильтрации. Доказательства базируются на методе мажорантных областей, предложенном Г. Н. Положим.

Ключевые слова: теория фильтрации, метод мажорантных областей.

ON A CHANGE IN VELOCITIES IN THE DOMAIN OF PLANAR AND AXISYMMETRIC STATIONARY FILTRATION

© 2021 T. V. KLODINA, N. S. ZADOROZHNYA

ABSTRACT. In this paper, we propose theorems on the change in velocities in boundary-value problems of planar and axisymmetric stationary filtration. The proofs are based on the method of majorant domains proposed by G. N. Polozhii.

Keywords and phrases: filtration theory, method of majorant domains.

AMS Subject Classification: 76S05

Результаты исследования фильтрации грунтовых вод при движении их в пористой среде представляют огромный интерес. Разрушительное действие фильтрационных потоков необходимо учитывать при проектировании гидроэнергетических и гидромелиоративных сооружений, а также при производстве различных земляных работ. Теория фильтрации позволяет прогнозировать изменения, которые могут произойти в естественных грунтовых потоках в районе строительства водохранилищ, каналов и мелиоративных систем.

Установившуюся фильтрацию тяжелой несжимаемой жидкости описывает система дифференциальных уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{V} = -k \operatorname{grad} h \quad (1)$$

($\mathbf{V}$ — скорость фильтрации, $h(x, y)$ — напорная функция, k — коэффициент фильтрации, характеризующий среду и жидкость одновременно), где $h = p/(\rho g) + \gamma$ (p — давление, $\gamma = \rho g$ — удельный вес жидкости).

В частности, для плоского движения $V = V(x, y)$, $k = k(x, y)$, $h = h(x, y)$ из (1) следует

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0; \quad (2)$$

а для пространственного осесимметричного с осью симметрии Oy —

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(xk \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(xk \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0. \quad (3)$$

В плоскости движения жидкости $z = x + iy$ вводится функция комплексного переменного

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\phi(x, y), \quad (4)$$

где $\varphi(x, y) = -kh(x, y)$ — потенциальная функция, $\phi(x, y)$ — функция тока, которые связаны соотношениями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{k_1} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{k_1} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (5)$$

где $k_1 = k/k_0$, k_0 — константа, имеющая размерность коэффициента фильтрации.

Области фильтрации в плоскости $z = x + iy$ соответствует в области комплексного потенциала $W = \varphi + i\phi$ область, называемая годографом комплексного потенциала.

Зная комплексный потенциал $W(z)$, можно определить все основные характеристики фильтрационного потока: скорость фильтрации

$$V = k_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right); \quad (6)$$

давление

$$p = -\frac{\gamma}{k_0} \varphi - \gamma y; \quad (7)$$

расход жидкости через кривую C

$$Q = |\phi|_C,$$

где $|\phi|_C$ — приращение ϕ вдоль C .

Отметим, что на потенциальных линиях ($\varphi = \text{const}$) выполняются равенства: в плоском случае

$$V = e^{i\beta} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} = e^{i\beta} \frac{\partial \phi}{\partial s}; \quad (8)$$

в осесимметричном случае

$$V = e^{i\beta} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{x} e^{i\beta} \frac{\partial \phi}{\partial s}, \quad (9)$$

где β — угол между осью Ox и правой нормалью n к данной потенциальной линии; s — длина дуги, отсчитываемая в направлении положительного обхода кривой.

На линии тока ($\phi = \text{const}$) имеет место равенство

$$V = e^{i\alpha} k \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad (10)$$

где α — угол между положительным направлением оси Ox и касательной к данной линии тока.

В зависимости от вида граничных участков области фильтрации существуют соответствующие им граничные условия. Рассмотрим важнейшие из них:

(1) на проницаемых участках границы — линиях равного потенциала — выполняется условие

$$\varphi = \text{const};$$

(2) на непроницаемых для фильтрующей жидкости участках границы, которые являются линиями тока,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0;$$

(3) на участках высачивания и кривых депрессии для установившейся фильтрации выполняются два условия:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \varphi + ky = 0.$$

Существует ряд точных математических методов решения задач плоской установившейся фильтрации, однако при их использовании возникают значительные трудности, особенно когда необходимо оценить погрешность решения.

При рассмотрении плоских и осесимметричных задач фильтрации, простое и в то же время достаточно точное для инженерной практики решение дает возможность получить метод мажорантных областей.

В связи с тем, что при решении задач фильтрации наиболее важным является отыскание таких характеристик потока, как выходные скорости, расход жидкости, противодавления, которые

зависят как от вида краевых условий, так и от формы границы области фильтрации, возникает вопрос, как изменяются эти характеристики при изменении границы области.

Единая теория вариационного метода в теории фильтрации была построена Г. Н. Положим, который на основании доказанной им теоремы о движении граничных точек отображаемых областей получил общие вариационные теоремы фильтрации в однородной среде. Позднее доказанная Г. Н. Положим теорема о сохранении областей линейных эллиптических систем дифференциальных уравнений позволила ему распространить метод, получивший название метода мажорантных областей, на случай плоской фильтрации в неоднородной среде и пространственной осесимметричной фильтрации в однородной и неоднородной средах (см. [7]).

Метод мажорантных областей Г. Н. Положего получил дальнейшее развитие и приложение в работах его учеников и последователей при решении, например, таких задач: фильтрации из каналов, к горизонтальным дренам, в земляных плотинах, фильтрации в основании бетонных плотин, при строительстве сооружений, содержащих синтетические материалы (см. [3, 4, 6]).

Сущность метода мажорантных областей заключается в том, что путем деформации границы области фильтрации строятся две такие области, для которых задачу фильтрации можно решить точно. Полученные фильтрационные характеристики для этих областей заведомо должны давать верхние и нижние оценки искомых. Если вспомогательные оценки подобраны удачно, то решение получается достаточно точным, а его погрешность находится строго обоснованно. Отметим, что оценки получаются достаточно близкими, если правильно подобрать мажорантные области. Искомое решение находится как полусумма найденных.

В основе метода мажорантных областей лежат вариационные теоремы, которые указывают, какую именно оценку искомой характеристики можно получить путем варьирования того или иного участка границы области фильтрации. Наиболее полно вариационные теоремы сравнения теории фильтрации изложены в [6, 7].

Доказательство вариационных теорем в общем виде (для плоской и пространственной осесимметричной фильтрации в однородной и неоднородной средах) основывается на применении теоремы о сохранении области, доказанной Г. Н. Положим (см. [7]).

Известны теоремы метода мажорантных областей, когда область фильтрации ограничена

- (i) двумя потенциальными линиями и одной линией тока;
- (ii) двумя потенциальными линиями и двумя линиями тока, причем фильтрационный расход при вариации границы остается неизменным;
- (iii) двумя потенциальными линиями и двумя линиями тока, причем напор на граничных потенциальных линиях остается неизменным;
- (iv) проницаемыми и непроницаемыми участками, а также участком высачивания.

Однако на практике встречаются задачи теории фильтрации, когда область фильтрации ограничена одной линией тока и тремя потенциальными линиями.

Будем называть линиями наибольшего, наименьшего и промежуточного напоров линии границы области фильтрации, на которых приведенный напор постоянен и принимает, соответственно, наибольшее, наименьшее и промежуточное значения. Задачи такого рода представляют существенную трудность вследствие того, что в этом случае вид годографа комплексного потенциала может быть заранее неизвестен.

Пусть область фильтрации ограничена линией тока BC и тремя потенциальными линиями AB , AD и CD . Краевые условия для комплексного потенциала $W(z)$ имеют вид

$$\varphi|_{AB} = -kH, \quad \varphi|_{CD} = 0, \quad \varphi|_{AD} = kH_0, \quad \phi|_{BC} = 0. \quad (11)$$

В зависимости от соотношений между H и H_0 существует пять видов годографов комплексного потенциала, для которых необходимо доказывать вариационные теоремы отдельно: $H > H_0 > 0$, $H_0 > H > 0$, $H > 0 > H_0$.

В настоящей работе предлагаются теоремы об изменении скоростей при решении задачи (1) с краевыми условиями (11), где H и H_0 — величины напоров на границе области фильтрации, при выполнении соотношения $H > H_0 > 0$.

Теорема 1. При вдавливании линии тока скорость уменьшается на её неизменной части и вблизи её концов на потенциальных линиях.

Теорема 2. При уменьшении линии тока скорость уменьшается на неизменной части увеличиваемой потенциальной линии и на линии промежуточного напора вблизи неизменной потенциальной линии, а скорость увеличивается на неизменной части линии тока, на неварьированной потенциальной линии, примыкающей к линии тока, и на линии промежуточного напора вблизи увеличиваемой потенциальной линии.

В [1,2,5] авторами были предложены теоремы об изменении напоров для аналогичных краевых задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клодина Т. В., Задоржная Н. С. Теорема об изменении давления при деформации линии тока// Мат. Воронеж. весенней мат. школы «Современные методы теории краевых задач». — Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2014. — С. 89–90.
2. Клодина Т. В., Задоржная Н. С. Теорема об оценки напоров для одного вида краевых условий области фильтрации// Мат. Междунар. науч.-практ. конф. «Инновационные процессы в научной среде» (Уфа, 7 мая 2014 г.). — Уфа: Аэтерна, 2014. — С. 29–32.
3. Клодина Т. В., Задоржная Н. С. Решение задачи фильтрации// в кн.: Транспорт: наука, образование, производство. Технические и естественные науки. — Ростов-на-Дону, 2016. — С. 269–271 (in Russian).
4. Клодина Т. В., Задоржная Н. С. Нахождение напоров под гибким флутбетом при наличии в основании дренирующего слоя неограниченной мощности// Мат. Воронеж. весенней мат. школы «Современные методы теории краевых задач». — Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2016. — С. 147–148.
5. Клодина Т. В., Задоржная Н. С. Теорема об изменении расхода жидкости при решении одной задачи стационарной фильтрации// Мат. Междунар. конф., посв. 100-летию со дня рождения С. Г. Крейна (Воронеж, 13–17 ноября 2017 г.). — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2017. — С. 116–117.
6. Ляшко И. И., Великоиваненко И. И., Лаврик В. И., Мистецкий Г. Е. Метод мажорантных областей в теории фильтрации. — Киев: Наукова думка, 1974.
7. Положий Г. Н. Теория и применение p -аналитических и (p, g) -аналитических функций. — Киев: Наукова думка, 1973.

Клодина Татьяна Викторовна

Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону

E-mail: simon@sfedu.ru

Задоржная Наталья Сергеевна

Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону

E-mail: simon@sfedu.ru