Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. О. Политов, Многообразие Бете—Дункла, ассоциированное с операторами Дункла—Дарбу, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 191, 123–128

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-191-123-128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 04:11:21

МНОГООБРАЗИЕ БЕТЕ—ДУНКЛА,
АССОЦИИРОВАННОЕ С ОПЕРАТОРАМИ ДУНКЛА-ДАРБУ

© 2021 г. К. О. ПОЛИТОВ

Аннотация. В работе показано, что два алгебраических многообразия, ассоциированных с операторами Дункла—Дарбу, совпадают.

Ключевые слова: многообразие Бете—Дункла, система корней, оператор Дункла—Дарбу.

BETHE—DUNKL MANIFOLD
ASSOCIATED WITH DUNKLE—DARBOUX OPERATORS

© 2021 К. О. POLITOV

ABSTRACT. In this paper, we prove that two algebraic varieties associated with Dunkl–Darboux operators coincide.

Keywords and phrases: Bethe–Dunkl manifold, root system, Dunkle–Darboux operator.

AMS Subject Classification: 46H20

1. Введение. Дифференциально-разностные операторы Дункла рационального типа введены в [5]. Эти операторы тесно связаны с различными разделами математики и, в частности, с теорией дифференциальных операторов в частных производных (см., например, обзор [1] и цитированную там литературу).

В связи с изучением общих свойств гамильтонианов моделей Калоджеро, Мозера и Сазерленда в [6] введены «универсальные» операторы Дункла. Эти операторы теряют некоторые свойства операторов Дункла рационального типа. В частности, «универсальные» операторы не коммутируют, и сумма их квадратов имеет более сложный вид, чем в классическом случае.

В [2] изучены многообразия, на которых «универсальные» операторы Дункла сохраняют свойства рационального оператора. Алгебраическое многообразие, на которых «универсальные» операторы коммутируют между собой, называется многообразием Дункла, а алгебраическое многообразие, на котором сумма квадратов «универсальных» операторов совпадает с гамильтонианом модели Калоджеро, Мозера и Сазерленда, называется многообразием Бете. Там же доказывается совпадение упомянутых многообразий для «универсальных» операторов Дункла.

В данной работе вводятся и изучаются два абстрактно определенных алгебраических многообразия. Для класса рациональных операторов Дункла—Дарбу (см., например, [3]) эти многообразия являются многообразиями Бете и Дункла в указанном выше смысле. Также доказывается совпадение таких многообразий.

2. Многообразие Бете—Дункла. Пусть s_α — отражение, действующее на вектор $x \in \mathbb{R}^n$:

$$s_\alpha x = x - 2 \frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha;$$

круглые скобки обозначают стандартное скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathcal{R}$ — система корней в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}_+$ — её положительная часть; $W_{\mathcal{R}}$ — группа Вейля системы корней $\mathcal{R}$, порожденная s_{α} , $\alpha \in \mathcal{R}$; k_{α} — целозначная неотрицательная функция на $\mathcal{R}$, инвариантная относительно отражений: $k_{s_{\beta}\alpha} = k_{\alpha}$ для всех $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$; $L_k(t)$ — вещественнозначная функция на $\mathbb{R}$, зависящая от целочисленного параметра k .

Определение 1. Многообразием Дункла называется подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, определенное формулой

$$\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{R}_+, \alpha \neq \beta} \left[(\alpha, \xi)(\beta, \eta) - (\alpha, \eta)(\beta, \xi) \right] L_{k_{\alpha}}((\alpha, x)) L_{k_{\beta}}((\beta, x)) s_{\beta} s_{\alpha} = 0. \quad (1)$$

Определение 2. Многообразием Бете называется подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, определенное формулой

$$\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{R}_+, \alpha \neq \beta} (\alpha, \beta) L_{k_{\alpha}}((\alpha, x)) L_{k_{\beta}}((\beta, x)) s_{\beta} s_{\alpha} = 0. \quad (2)$$

Предложение 1. Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{R}$. Если $\alpha \nparallel \beta$, $\gamma \nparallel \delta$ и $s_{\alpha} s_{\beta} = s_{\gamma} s_{\delta}$, то плоскости, натянутые на пары векторов α, β и γ, δ , совпадают.

Доказательство. Обозначим плоскости, натянутые на пары векторов α, β и γ, δ , через $\Pi_{\alpha\beta}$ и $\Pi_{\gamma\delta}$ соответственно. Выберем вектор x , ортогональный плоскости $\Pi_{\alpha\beta}$. Тогда

$$s_{\alpha} s_{\beta} x = x, \quad s_{\gamma} s_{\delta} x = x - 2 \frac{(\delta, x)}{(\delta, \delta)} \delta - 2 \frac{(\gamma, x)}{(\gamma, \gamma)} \gamma + 4 \frac{(\delta, x)(\gamma, x)}{(\delta, \delta)(\gamma, \gamma)} \gamma.$$

Так как $s_{\alpha} s_{\beta} = s_{\gamma} s_{\delta}$, то должно выполняться равенство

$$2 \frac{(\delta, x)}{(\delta, \delta)} \delta + \left(2 \frac{(\gamma, x)}{(\gamma, \gamma)} - 4 \frac{(\delta, x)(\gamma, x)}{(\delta, \delta)(\gamma, \gamma)} \right) \gamma = 0.$$

Поскольку $\gamma \nparallel \delta$, имеем

$$\frac{(\delta, x)}{(\delta, \delta)} = 0, \quad 2 \frac{(\gamma, x)}{(\gamma, \gamma)} - 4 \frac{(\delta, x)(\gamma, x)}{(\delta, \delta)(\gamma, \gamma)} = 0.$$

Таким образом, x ортогонален $\Pi_{\gamma\delta}$, а значит, $\Pi_{\alpha\beta}$ и $\Pi_{\gamma\delta}$ совпадают. $\square$

Теорема 1. Многообразия Дункла и Бете, определенные формулами (1) и (2), соответственно, совпадают.

Доказательство. Заметим, что суммирование в левых частях (1) и (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathcal{R}_+, \\ s_{\alpha} s_{\beta} = w \neq e}} \sum_{w \in W_{\mathcal{R}}} \left[(\alpha, \xi)(\beta, \eta) - (\alpha, \eta)(\beta, \xi) \right] L_{k_{\alpha}}((\alpha, x)) L_{k_{\beta}}((\beta, x)) w, \\ & \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathcal{R}_+, \\ s_{\alpha} s_{\beta} = w \neq e}} \sum_{w \in W_{\mathcal{R}}} (\alpha, \beta) L_{k_{\alpha}}((\alpha, x)) L_{k_{\beta}}((\beta, x)) w. \end{aligned}$$

Для доказательства достаточно показать, что

$$(\alpha, \xi)(\beta, \eta) - (\alpha, \eta)(\beta, \xi) = \text{const}(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}_+.$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathcal{R}_+, \\ s_{\alpha} s_{\beta} = w_0 \neq e}} \left[(\alpha, \xi)(\beta, \eta) - (\alpha, \eta)(\beta, \xi) \right] L_{k_{\alpha}}((\alpha, x)) L_{k_{\beta}}((\beta, x)) w_0, \quad (3)$$

где w_0 — фиксированный элемент группы Вейля. Согласно предложению 1 все α и β , для которых $s_{\alpha} s_{\beta} = w_0$, лежат в одной плоскости. Обозначим эту плоскость через $\Pi_{\alpha\beta}$. В координатах плоскости $\Pi_{\alpha\beta}$ положим $\alpha = (\alpha_1; \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1; \beta_2)$, $\xi = (\xi_1; \xi_2)$, $\eta = (\eta_1; \eta_2)$.

Отметим, что элемент w_0 поворачивает эту плоскость на некоторый угол 2φ . Более того, для всех $\gamma, \delta \in (\mathcal{R} \cap \Pi_{\alpha\beta})$ имеем $s_\gamma \delta \in (\mathcal{R} \cap \Pi_{\alpha\beta})$. Отсюда следует, что все векторы в указанной сумме можно считать принадлежащими некоторой системе корней ранга 2. Значит, для углов между α и β существует две возможности: либо $\widehat{(\alpha, \beta)} = \varphi$, либо $\widehat{(\alpha, \beta)} = \pi - \varphi$.

Далее, мы можем записать

$$(\alpha, \xi)(\beta, \eta) - (\alpha, \eta)(\beta, \xi) = (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1).$$

Здесь $(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)$ есть скалярное произведение вектора α с вектором β^* , полученным из β двумя последовательными отражениями относительно биссектрисы первой координатной четверти и оси абсцисс, т.е. поворотом на $\pi/2$.

Для всех α и β , для которых $s_\alpha s_\beta = w_0$, угол между α и β^* будет равен

$$\widehat{(\alpha, \beta^*)} = \begin{cases} \widehat{(\alpha, \beta)} - \frac{\pi}{2}, & \text{если } \widehat{(\alpha, \beta)} = \varphi, \\ \frac{\pi}{2} - \widehat{(\alpha, \beta)}, & \text{если } \widehat{(\alpha, \beta)} = \pi - \varphi. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\cos \widehat{(\alpha, \beta^*)} = \cos \widehat{(\alpha, \beta)} \operatorname{tg} \varphi$, а значит

$$(\alpha, \xi)(\beta, \eta) - (\alpha, \eta)(\beta, \xi) = \operatorname{tg} \varphi (\alpha, \beta),$$

и $\operatorname{tg} \varphi$ одинаков для всех α, β в (3), что и требовалось. $\square$

Учитывая доказанную теорему, многообразия Бете и Дункла будем в дальнейшем называть *многообразием Бете—Дункла*.

3. Примеры многообразий Бете—Дункла в случае систем корней ранга 2. Конструкция доказательства основной теоремы показывает, что важными примерами многообразий Бете—Дункла служат многообразия, ассоциированные с системами корней ранга 2: $A_1 \times A_1$, A_2 , B_2 и G_2 .

3.1. Система корней $A_1 \times A_1$. В данном случае $\mathcal{R}_+$ состоит из векторов $\alpha_1 = (1; 0)$, $\alpha_2 = (0, 1)$. В этом случае многообразие Бете—Дункла совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^2$.

3.2. Система корней A_2 . В этом случае $\mathcal{R}_+$ состоит из векторов

$$\alpha_1 = (2; 0), \quad \alpha_2 = (1; \sqrt{3}), \quad \alpha_3 = (-1; \sqrt{3}).$$

В силу свойств функции k_α положим $k_{\alpha_i} = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда многообразие Бете—Дункла определяется следующим образом:

$$-L_k(-x + \sqrt{3}y)L_k(x + \sqrt{3}y) - L_k(2x)L_k(x + \sqrt{3}y) + L_k(2x)L_k(-x + \sqrt{3}y) = 0.$$

3.3. Система корней B_2 . В этом случае $\mathcal{R}_+$ состоит из векторов

$$\alpha_1 = (1; 0), \quad \alpha_2 = (1; 1), \quad \alpha_3 = (0, 1), \quad \alpha_4 = (-1, 1).$$

Положим

$$k_{\alpha_1} = k_{\alpha_3} = k, \quad k_{\alpha_2} = k_{\alpha_4} = m, \quad k, m \in \mathbb{Z}.$$

Тогда многообразие Бете—Дункла определяется следующим образом:

$$L_k(x)L_m(x+y) + L_k(y)L_m(x+y) - L_k(x)L_m(-x+y) + L_k(y)L_m(-x+y) = 0.$$

3.4. Система корней G_2 . В этом случае $\mathcal{R}_+$ состоит из векторов

$$\alpha_1 = (2; 0), \quad \alpha_2 = (3; \sqrt{3}), \quad \alpha_3 = (1; \sqrt{3}), \quad \alpha_4 = (0; 2\sqrt{3}), \quad \alpha_5 = (-1; \sqrt{3}), \quad \alpha_6 = (-3; \sqrt{3}).$$

Положим

$$k_{\alpha_1} = k_{\alpha_3} = k_{\alpha_5} = k, \quad k_{\alpha_2} = k_{\alpha_4} = k_{\alpha_6} = m.$$

Многообразие Бете—Дункла задается следующей системой трех уравнений:

$$\begin{aligned} L_k(2x)L_m(3x + \sqrt{3}y) + L_m(3x + \sqrt{3}y)L_k(x + \sqrt{3}y) + L_k(x + \sqrt{3}y)L_m(2\sqrt{3}y) + \\ + L_m(2\sqrt{3}y)L_k(-x + \sqrt{3}y) + L_k(-x + \sqrt{3}y)L_m(-3x + \sqrt{3}y) - L_m(-3x + \sqrt{3}y)L_k(2x) = 0, \end{aligned}$$

$$L_k(2x)L_m(x + \sqrt{3}y) + L_k(-x + \sqrt{3}y)L_k(x + \sqrt{3}y) - L_k(-x + \sqrt{3}y)L_k(2x) = 0,$$

$$L_m(3x + \sqrt{3}y)L_m(2\sqrt{3}y) + L_m(-3x + \sqrt{3}y)L_m(2\sqrt{3}y) - L_m(3x + \sqrt{3}y)L_m(-3x + \sqrt{3}y) = 0.$$

4. Примеры многообразий Бете—Дункла, ассоциированных с операторами Дункла—Дарбу. В [4] введены так называемые полиномы Бурчнала—Чаунди. Они определяются следующим образом:

$$\mathcal{P}_0(t) = 1, \quad \mathcal{P}_1(t) = t, \quad \mathcal{P}'_{k+1}(t)\mathcal{P}_{k-1}(t) - \mathcal{P}'_{k-1}(t)\mathcal{P}_{k+1}(t) = (2k+1)\mathcal{P}_k^2(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Из определения следует, что для $k \geq 2$ полином $\mathcal{P}_k(t)$ зависит от $(k-1)$ -мерного вектора констант $\gamma^k = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$, возникающих при последовательном интегрировании (4). Заметим, что при $\gamma^k = 0$ $\mathcal{P}_k(t) = t^{k(k+1)/2}$. Этот частный случай отвечает конструкции классического рационального оператора Дункла.

В п. 3 были указаны примеры многообразий Бете—Дункла в случае систем корней ранга 2 для произвольной функции $L_k(t)$. Приведем примеры явного задания многообразий Бете—Дункла в случае, когда в качестве $L_k(t)$ выступает функция

$$L_k(t) = \frac{d}{dt} \left[\log \left| \frac{\mathcal{P}_k(t, \gamma^k)}{\mathcal{P}_{k-1}(t, \gamma^{k-1})} \right| \right],$$

ассоциированная с многочленами Бурчнала—Чаунди. Эта конструкция имеет важное значения для изучения обобщений операторов Дункла — операторов Дункла—Дарбу (см., например, [3]).

4.1. Многообразие Бете—Дункла в случае системы корней A_2 . Возьмем, например, $k = 2$. Тогда

$$L_2(t) = \frac{d}{dt} \left[\log \left| \frac{\mathcal{P}_2(t, \gamma^2)}{\mathcal{P}_1(t, \gamma^1)} \right| \right],$$

где $\mathcal{P}_2(t) = t^3 + \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}_1(t) = t$. Уравнение, определяющее многообразие Бете—Дункла, примет вид

$$\frac{\gamma \left(-17\sqrt{3}x^4y + 6\sqrt{3}x^2y^3 - 9\sqrt{3}y^5 - x^5 - 42x^3y^2 - 9xy^4 + 2\sqrt{3}\gamma xy + 4\gamma x^2 + 6\gamma y^2 \right)}{\left(3\sqrt{3}y^3 + 9xy^2 + 3\sqrt{3}x^2y + x^3 + \gamma \right) (x + \sqrt{3}y) (8x^3 + \gamma) \left(3\sqrt{3}y^3 - 9xy^2 + 3\sqrt{3}x^2y - x^3 + \gamma \right)} = 0.$$

4.2. Многообразие Бете—Дункла в случае системы корней B_2 . Уравнение, задающее многообразие Бете—Дункла для системы корней B_2 в предположении, что $k = m = 2$, примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\gamma + 6xy^2 - 6x^2y + 2x^3 - 2y^3}{(\gamma - (x-y)^3)(x-y)} - \frac{(6xy^2 - \gamma + 6x^2y + 2x^3 + 2y^3)}{(x+y)(\gamma + (x+y)^3)} \frac{(\gamma - 2x^3)}{(x(\gamma + x^3))} - \\ - \frac{\gamma + 6xy^2 - 6x^2y + 2x^3 - 2y^3}{(\gamma - (x-y)^3)(x-y)} + \frac{(6xy^2 - \gamma + 6x^2y + 2x^3 + 2y^3)}{(x+y)(\gamma + (x+y)^3)} \frac{(\gamma - 2y^3)}{y(\gamma + y^3)} = 0. \end{aligned}$$

4.3. Многообразие Бете—Дункла в случае системы корней G_2 . Предположим опять, что $k = m = 2$. Система уравнений, задающая многообразие Бете—Дункла в случае системы корней G_2 , примет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{(x + \sqrt{3}y)(3x + \sqrt{3}y) \left(9x + 3\sqrt{3}y - \frac{\gamma + (3x + \sqrt{3}y)^3}{(3x + \sqrt{3}y)^2} \right) \left(3x - \frac{\gamma + (x + \sqrt{3}y)^3}{(x + \sqrt{3}y)^2} + 3\sqrt{3}y \right)}{(\gamma + (x + \sqrt{3}y)^3)(\gamma + (3x + \sqrt{3}y)^3)} + \\
& + \frac{2x \left(6x - \frac{8x^3 + \gamma}{4x^2} \right) (3x + \sqrt{3}y) \left(9x + 3\sqrt{3}y - \frac{\gamma + (3x + \sqrt{3}y)^3}{(3x + \sqrt{3}y)^2} \right)}{(\gamma + (3x + \sqrt{3}y)^3)(8x^3 + \gamma)} + \\
& + \frac{(x - \sqrt{3}y)(3x - \sqrt{3}y) \left(9x + \frac{\gamma - (3x - \sqrt{3}y)^3}{(3x - \sqrt{3}y)^2} - 3\sqrt{3}y \right) \left(3x - 3\sqrt{3}y + \frac{\gamma - (x - \sqrt{3}y)^3}{(x - \sqrt{3}y)^2} \right)}{(\gamma - (x - \sqrt{3}y)^3)(\gamma - (3x - \sqrt{3}y)^3)} - \\
& - \frac{2x \left(6x - \frac{8x^3 + \gamma}{4x^2} \right) (3x - \sqrt{3}y) \left(9x + \frac{\gamma - (3x - \sqrt{3}y)^3}{(3x - \sqrt{3}y)^2} - 3\sqrt{3}y \right)}{(\gamma - (3x - \sqrt{3}y)^3)(8x^3 + \gamma)} + \\
& + \frac{2\sqrt{3}y(x + \sqrt{3}y) \left(6\sqrt{3}y - \frac{24\sqrt{3}y^3 + \gamma}{12y^2} \right) \left(3x - \frac{\gamma + (x + \sqrt{3}y)^3}{(x + \sqrt{3}y)^2} + 3\sqrt{3}y \right)}{(\gamma + (x + \sqrt{3}y)^3)(24\sqrt{3}y^3 + \gamma)} + \\
& + \frac{2\sqrt{3}y(x - \sqrt{3}y) \left(6\sqrt{3}y - \frac{24\sqrt{3}y^3 + \gamma}{12y^2} \right) \left(3x - 3\sqrt{3}y + \frac{\gamma - (x - \sqrt{3}y)^3}{(x - \sqrt{3}y)^2} \right)}{(24\sqrt{3}y^3 + \gamma)(\gamma - (x - \sqrt{3}y)^3)} = 0, \\
& \frac{6\gamma(x^5 + 17\sqrt{3}x^4y + 42x^3y^2 - 6\sqrt{3}x^2y^3 - 4\gamma x^2 + 9xy^4 - 2\sqrt{3}\gamma xy + 9\sqrt{3}y^5 - 6\gamma y^2)}{(x + \sqrt{3}y)(8x^3 + \gamma) \left(-x^3 + 3\sqrt{3}x^2y - 9xy^2 + 3\sqrt{3}y^3 + \gamma \right) \left(x^3 + 3\sqrt{3}x^2y + 9xy^2 + 3\sqrt{3}y^3 + \gamma \right)} = 0, \\
& \frac{\gamma(486x^4y - 1620x^2y^3 + 9\sqrt{3}\gamma x^2 - 378y^5 + 21\sqrt{3}\gamma y^2)}{y(24\sqrt{3}y^3 + \gamma) \left(-27x^3 + 27\sqrt{3}x^2y - 27xy^2 + 3\sqrt{3}y^3 + \gamma \right) \left(27x^3 + 27\sqrt{3}x^2y + 27xy^2 + 3\sqrt{3}y^3 + \gamma \right)} = 0.
\end{aligned}$$

4.4. Графики многообразий. Проиллюстрируем полученные в этом пункте многообразия, построив их графики в пространстве переменных x, y, γ . Тогда для каждого заданного значения параметра γ соответствующее многообразие будет получаться как пересечение представленного графика с плоскостью $\gamma = \text{const}$.

Графики многообразий Бете—Дункла в случаях A_2 и B_2 представлены на рис. 1 и 2 соответственно. Графиком многообразия Бете—Дункла в случае системы корней G_2 будет пересечение трех графиков, изображенных на рис. 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берест Ю. Ю., Веселов А. П. Принцип Гюйгенса и интегрируемость // Усп. мат. наук. — 1994. — 49, № 6 (300). — С. 5–77.
2. Мещеряков В. В. Дифференциально-разностные операторы. Свойства, приложения, обобщения. — Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2010.
3. Хэжало С. П. Дифференциально-разностные операторы Дункла—Дарбу // Изв. РАН. Сер. мат. — 2017. — 81, № 1. — С. 161–182.

Рис. 1. Случай A_2 . Рис. 2. Случай B_2 . Рис. 3. Графики уравнений для случая G_2 .

4. *Burchall J. L., Chaundy T. W.* A set of differential equations which can be solved by polynomials// *Proc. London Math. Soc.* (2). — 1929-30. — 30, № 1. — P. 401–414.
5. *Dunkl C. F.* Differential-difference operators associated to reflection groups// *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1989. — 311, № 1. — P. 167–183.
6. *Golubeva V. A., Leksin V. P.* Heisenberg–Weyl operator algebras associated to the models of Calogero–Sutherland type and isomorphism of rational and trigonometric models// *J. Math. Sci.* — 2000. — 98, № 3. — P. 291–318.

Политов Кирилл Олегович

Московский государственный областной социально-гуманитарный университет, Коломна

E-mail: mr.politov.k@gmail.com