Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Раутиан,
Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 191, 135–148

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-191-135-148>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 05:11:58

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ ЯДРАМИ

© 2021 г. Н. А. РАУТИАН

Аннотация. Работа посвящена изучению интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы с сингулярными ядрами. Указанные уравнения представляют собой абстрактную форму интегро-дифференциального линейной вязкоупругости, уравнения Гуртина—Пипкина, описывающего процесс распространения тепла в средах с памятью, а также интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в задачах усреднения в перфорированных средах (закон Дарси). Устанавливаются условия существования и единственности сильных и обобщенных решений начально-краевых задач для указанных уравнений в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, оператор-функция, корректная разрешимость.

WELL-POSEDNESS OF VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULAR KERNELS

© 2021 N. A. RAUTIAN

ABSTRACT. This paper is devoted to the study of integro-differential equations with unbounded operator coefficients in a Hilbert space. The principal part of the equations considered is an abstract hyperbolic equation perturbed by terms containing Volterra integral operators with singular kernels. Such integro-differential equations describe, for example, linear viscoelastic phenomena, heat propagation processes in media with memory (the Gurtin–Pipkin equation), averaging problems in perforated media (Darcy’s law), etc. We establish conditions for the existence and uniqueness of strong and generalized solutions to initial-boundary-value problems for these equations in weighted Sobolev spaces on the positive semiaxis.

Keywords and phrases: integro-differential equation, operator function, well-posedness.

AMS Subject Classification: 47G20, 34K30, 47A56, 34K12

1. Введение. Рассмотрим простейший пример рассматриваемых в статье уравнений, которым является одномерное уравнение линейной вязкоупругости

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - \int_0^t K(t - \tau) u_{xx}(x, \tau) d\tau + f(x, t), \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00288а).

где функция ядра $K(t)$ является неотрицательной, монотонно убывающей функцией при $t > 0$ и называется ядром релаксации. Выбор ядра релаксации определяется характеристиками рассматриваемого материала.

Математическая модель вязкоупругости описывает поведение материалов, механические свойства которых зависят не только от деформации в данный момент времени, а учитывают всю историю деформирования материала (т.е. линейные определяющие уравнения более общего вида). Такие материалы в литературе называются материалами с памятью (см. [17, 18]). В настоящее время существует обширная литература, посвященная изучению материалов с памятью, как прикладного, так и фундаментального характера, посвященная построению математических моделей и развитию математических методов исследования указанных материалов (см. [4, 11–14, 19] и т. д.). Необходимость в изучении вязкоупругих материалов появилась еще в 50-е годы прошлого века, в связи с развитием химической промышленности и появлением различных полимерных и композитных материалов. В настоящее время большой интерес представляет направление исследований, связанное с изучением биополимеров, моделирующих поведение биологических тканей. Например, в [25, 27] изучаются вязкоупругие свойства синтетических тканей, обладающих качественными характеристиками костей человека, а также тканей искусственного сердца. В [22, 28] приведены модели вязкоупругости, нашедшие применение в пищевой промышленности.

Анализ уравнения (1) можно было бы существенно упростить, предположив, что ядро релаксации имеет вид

$$\sum_{j=1}^N c_j e^{-\gamma_j t}, \quad t > 0, \quad (2)$$

где и γ_j — некоторые положительные постоянные, поскольку в этом случае уравнение (1) нетрудно свести к дифференциальному (см. [20]). Однако при обработке экспериментальных данных оказалось, что ядра вида (2) плохо подходят для описания поведения реальных материалов. Для того чтобы учесть наблюдаемые в экспериментах закономерности, необходимо использовать сингулярные ядра релаксации, т.е. ядра, стремящиеся к бесконечности при $t \rightarrow +0$. Еще Больцман предлагал выбрать сингулярное ядро релаксации в виде

$$K(t) = \frac{k}{t}, \quad t > 0, \quad (3)$$

где $k > 0$. Однако ядро (3) обладает неинтегрируемой особенностью при $t \rightarrow +0$, и использовать его в уравнении (1) невозможно.

Простейшим сингулярным ядром релаксации, пригодным для использования в линейной наследственной модели, является так называемое ядро Абеля

$$K(t) = \frac{k}{t^\alpha}, \quad t > 0, \quad (4)$$

где $k > 0$, $0 < \alpha < 1$. Следует заметить однако, что для широкого класса материалов в испытаниях на релаксацию напряжение падает на больших временах быстрее, чем это может обеспечить ядро вида (4).

Стремление получить ядра, обладающие той же сингулярностью, что и ядро Абеля, и достаточно быстро убывающие при $t \rightarrow +0$, привело к построению целого набора ядер (см. [26]). Большое распространение получило ядро Работнова — дробно-экспоненциальная функция (см. [13]).

В нашей работе рассматривается абстрактное ядро релаксации вида,

$$K(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu(\tau), \quad (5)$$

которое представляет собой преобразование Лапласа положительной меры $d\mu$ и объединяет широкий класс сингулярных ядер, возникающих в приложениях.

Следует также отметить, что уравнение вида (1) носит название уравнения Гуртина—Пипкина и описывает процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью, а также возникает в задачах усреднения в перфорированных средах (закон Дарси).

В нашей работе мы получаем достаточные условия существования и единственности сильных и обобщенных решений начальных задач для абстрактных интегро-дифференциальных уравнений в весовых пространствах Соболева вектор-функций на положительной полуоси со значениями в гильбертовом пространстве. Указанные задачи могут быть реализованы как начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений с частными производными в областях с достаточно гладкой границей для уравнений Гуртина—Пипкина в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси и исследуем некоторые спектральные вопросы для оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений.

Предлагаемая работа является естественным продолжением исследований, начатых в [2–9].

2. Определения, обозначения, формулировка результатов.

2.1. *Определения и обозначения.* Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор, $A^* = A$, действующий в пространстве H , имеющий компактный обратный.

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + A^2 u - \int_0^t K(t-s) A^2 u(s) ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (6)$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad (7)$$

$$u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \quad (8)$$

Скалярная функция $K(t)$ имеет следующее представление:

$$K(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau} d\mu(\tau), \quad (9)$$

где $d\mu$ — положительная мера, которой соответствует возрастающая, непрерывная справа функция распределения μ . Интеграл понимается в смысле Стильтьеса. Мы предполагаем, что выполнено следующее условие:

$$\int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1, \quad (10)$$

где носитель μ принадлежит полуоси $(0, +\infty)$. Из условия (10) следует, что функция $K(t)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}_+)$.

В качестве примера можно рассмотреть функцию $K(t)$ вида

$$K(t) = \sum_{j=1}^\infty c_j R_j(t), \quad (11)$$

где $c_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, функции $R_j(t)$ — дробно-экспоненциальные функции вида (см. [13, гл. I])

$$R_j(t) = t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-\beta_j)^n t^{n\alpha}}{\Gamma[(n+1)\alpha]}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (12)$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма функция Эйлера. При этом предполагается, что последовательность $\{\beta_j\}$ удовлетворяет условиям $0 < \beta_j < \beta_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, $\beta_j \rightarrow +\infty$, $j \rightarrow +\infty$. Кроме того, выполнены условия

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{c_j}{\beta_j} < 1. \quad (13)$$

Преобразование Лапласа функции $R_j(t)$ имеет вид

$$\hat{R}_j(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha + \beta_j},$$

(см. [13, гл. II]). При этом под λ^α ($0 < \alpha < 1$) понимается главная ветвь многозначной функции $f(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}$ с разрезом по отрицательной действительной полуоси $\lambda^\alpha = |\lambda^\alpha|e^{i\alpha \arg \lambda}$, $-\pi < \arg \lambda < \pi$. При помощи обратного преобразования Лапласа, примененного к главной ветви функции $\hat{R}_j(\lambda)$, получено (см. [13, гл. II]) следующее интегральное представление функции $R_j(t)$:

$$R_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda^\alpha + \beta_j} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau} d\tau}{\tau^\alpha + 2\beta_j \cos \pi \alpha + \beta_j^2 \tau^{-\alpha}}.$$

Рассматривая преобразование Лапласа уравнения (6) при однородных начальных условиях, получаем уравнение $L(\lambda)\hat{u}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$, где оператор-функция

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \hat{K}(\lambda)A^2 \quad (14)$$

является символом этого уравнения, а $\hat{u}(\lambda)$ и $\hat{f}(\lambda)$ — преобразования Лапласа вектор-функций $u(t)$ и $f(t)$, соответственно. Здесь $\hat{K}(\lambda)$ — преобразование Лапласа ядра $K(t)$, имеющие представление

$$\hat{K}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\lambda + \tau}. \quad (15)$$

Через $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H , снабженное нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^n)} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t} (\|u^{(n)}(t)\|_H^2 + \|A^n u(t)\|_H^2) dt \right)^{1/2}, \quad \gamma \geq 0.$$

Подробнее о пространствах $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^2)$ см. монографию [21, глава 1]. Для $n = 0$ полагаем $W_{2,\gamma}^0(\mathbb{R}_+, A^0) = L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, где $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ обозначено пространство измеримых функций со значениями в пространстве H , снабженное нормой

$$\|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} = \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} \|f(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2}.$$

Определение 1. Будем называть вектор-функцию u сильным решением задачи (6)–(8), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geq 0$, удовлетворяет уравнению (6) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, и начальным условиям (7), (8).

Определение 2. Будем называть вектор-функцию u обобщенным решением задачи (6)–(8), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$ для некоторого $\gamma \geq 0$, удовлетворяет начальному условию (7) и удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} \left\langle A \left[u(t) - \int_0^t K(t-s)u(s)ds \right], Av(t) \right\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} - \langle u'(t), v'(t) \rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \\ + 2\gamma \langle u'(t), v(t) \rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} = \langle f(t), v(t) \rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + (\varphi_1, v(0))_H \end{aligned} \quad (16)$$

при всех $v(t) \in W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)e^{-2\gamma t} = 0.$$

Превратим область определения $\text{Dom}(A^\beta)$ оператора A^β , $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_β , введя на $\text{Dom}(A^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^β .

2.2. Формулировка результатов.

Теорема 1. *Предположим, что вектор-функция $Af(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ для некоторого $\gamma_0 > 0$, ядро $K(t)$ представимо в виде (9), а также выполняется условие (10), кроме того, $\varphi_0 \in H_3$, $\varphi_1 \in H_2$. Тогда существует такое $\gamma_1 > \gamma_0$, что для всех $\gamma \geq \gamma_1$ задача (6)–(8) имеет единственное сильное решение в пространстве $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$, удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)} \leq d(\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \|A^3\varphi_0\|_H + \|A^2\varphi_1\|_H), \quad (17)$$

с постоянной d , не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1 .

Следует отметить, что метод, используемый нами для доказательства корректной разрешимости начальных задач для абстрактных интегро-дифференциальных уравнений, существенно отличается от более традиционного подхода, использованного Л. Пандолфи в [23], где разрешимость изучается в функциональных пространствах на конечном временном интервале $(0, T)$. В нашей работе разрешимость изучается в весовых пространствах Соболева $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A)$ вектор-функций на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$, где A — положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Доказательство нашей теоремы 1 о разрешимости существенно использует гильбертову структуру пространств $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A)$, $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, а также теорему Пэли—Винера.

В настоящее время имеется обширная литература, посвященная изучению абстрактных интегро-дифференциальных уравнений, т.е. уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в банаховых и гильбертовых пространствах. Ограничимся здесь указанием работ [14–20, 22–31] (см. также указанную там библиографию).

Исследованию интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, имеющими интегрируемые особенности, посвящены работы [6–9], в которых изучается сильная разрешимость указанных уравнений, а также проводится их спектральный анализ.

Теорема 2. *Предположим, что вектор-функция $f(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ для некоторого $\gamma_0 > 0$, ядро $K(t)$ представимо в виде (9), а также выполняется условие (10), кроме того, $\varphi_0 \in H_2$, $\varphi_1 \in H$. Тогда существует такое $\gamma_1 > \gamma_0$, что для всех $\gamma \geq \gamma_1$ задача (6)–(8) имеет обобщенное решение в пространстве $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$, удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A^2)} \leq d(\|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \|A^2\varphi_0\|_H + \|A\varphi_1\|_H), \quad (18)$$

с постоянной d , не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1 .

3. Доказательства теорем 1 и 2. Доказательству теорем 1 и 2 предположим следующие предположения.

Предложение 1. *Для любого $\gamma \geq \gamma_1 > 0$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ существуют такие положительные константы d_1 и d_2 , что в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > \gamma\}$ справедливы неравенства*

$$\sup_{\operatorname{Re} \lambda > \gamma} \left| \frac{a_n}{l_n(\lambda)} \right| \leq d_1 < \infty, \quad (19)$$

$$\sup_{\operatorname{Re} \lambda > \gamma} \left| \frac{\lambda}{l_n(\lambda)} \right| \leq d_2 < \infty. \quad (20)$$

Доказательство. Пусть $\lambda = x + iy = |\lambda|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Рассмотрим функцию

$$\mathfrak{M}_n(\lambda) = \frac{l_n(\lambda)}{a_n^2}$$

и оценим снизу $|\mathfrak{M}_n(\lambda)|$. Вычисляя вещественную и мнимую части функции $\mathfrak{M}_n(\lambda)$, получим

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \mathfrak{M}_n(\lambda) &= \frac{x^2 - y^2}{a_n^2} + 1 - \int_0^\infty \frac{(x + \tau)d\mu(\tau)}{(x + \tau)^2 + y^2}, \quad \lambda = x + iy, \\ \operatorname{Im} \mathfrak{M}_n(\lambda) &= \frac{2xy}{a_n^2} + y \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{(x + \tau)^2 + y^2}, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Разделим полуплоскость $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > \gamma_0\}$ на две области

$$\Omega_1 = \{|y| > \operatorname{Re} \lambda := x > \gamma_0, y = \operatorname{Im} \lambda\}, \quad \Omega_2 = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda = x > |y|, y = \operatorname{Im} \lambda\}.$$

Вначале проведем оценку величины $|a_n/l_n(\lambda)|$ в области Ω_1 . Имеем

$$\begin{aligned}\frac{|l_n(\lambda)|}{a_n^2} &\geq |\operatorname{Im} \mathfrak{M}_n(\lambda)| > |y| \left(\frac{2\gamma}{a_n^2} + \frac{1}{y^2} \int_{d_1}^\infty \frac{d\mu(\tau)}{1 + (x + \tau)^2/y^2} \right) > \frac{2\gamma|y|}{a_n^2} + \frac{1}{|y|} \int_{d_1}^\infty \frac{d\mu(\tau)}{1 + (1 + \tau/|y|)^2} > \\ &> \frac{2\gamma|y|}{a_n^2} + \frac{\eta_0(\gamma)}{|y|},\end{aligned}$$

где

$$\eta_0(\gamma) = \int_{d_1}^\infty \frac{d\mu(\tau)}{1 + (1 + \tau/\gamma)^2}$$

и $0 < d_1 < +\infty$. Отсюда получаем

$$|\operatorname{Im} \mathfrak{M}_n(\lambda)| > \frac{2\gamma y^2 + \eta_0(\gamma)a_n^2}{a_n^2|y|} \geq \frac{\sqrt{2\gamma\eta_0}}{a_n} = \frac{k(\gamma)}{a_n}.$$

Из последнего неравенства при $|y| > x > \gamma > 0$ получаем оценку

$$\left| \frac{a_n}{l_n(\lambda)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\gamma \cdot \eta_0(\gamma)}} = \frac{1}{k(\gamma)}, \quad (21)$$

где $k(\gamma)$ — положительная константа, зависящая от параметра $\gamma > 0$. Следовательно, для всех $\lambda \in \Omega_1$ получаем оценку

$$\frac{a_n}{|l_n(\lambda)|} \leq \frac{1}{k(\gamma)}.$$

Проведем теперь оценку величины $|a_n/l_n(\lambda)|$ в области Ω_2 . Заметим, что при выполнении условия (10) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\int_0^\infty \frac{(x + \tau)d\mu(\tau)}{(x + \tau)^2 + y^2} \leq \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{(x + \tau)} \leq \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\gamma + \tau} < \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1.$$

Таким образом, при $x > |y|$ справедлива оценка

$$\frac{|l_n(\lambda)|}{a_n^2} \geq \operatorname{Re} \mathfrak{M}_n(\lambda) \geq \frac{x^2 - y^2}{a_n^2} + 1 - \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau + \gamma} \geq 1 - \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau + \gamma} =: \theta_0 > 0.$$

Следовательно, для всех $\lambda \in \Omega_2$ получаем оценку

$$\frac{a_n}{|l_n(\lambda)|} < \frac{1}{a_n |\operatorname{Re} \mathfrak{M}_n(\lambda)|} < \frac{1}{a_n \theta_0}. \quad (22)$$

Объединяя неравенства (21) и (22), приходим к тому, что в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda = x > \gamma\}$ выполнена оценка

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} \lambda > \gamma \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{a_n}{|l_n(\lambda)|} \leq \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\gamma\eta_0}}; \frac{1}{a_1\theta_0} \right\} =: d_1. \quad (23)$$

Неравенство (19) установлено.

Оценим для всех $\lambda = x + iy$, $x > \gamma$ выражение $|\lambda/l_n(\lambda)|$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{l_n(\lambda)}{\lambda} \right| &= \left| \lambda + \frac{a_n^2}{\lambda} \left(1 - \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\lambda + \tau} \right) \right| \geq \\ &\geq \left| \operatorname{Re} \frac{l_n(\lambda)}{\lambda} \right| \geq \left| x + \frac{a_n^2 x}{x^2 + y^2} \left(1 - \int_0^\infty \frac{(x + \tau) d\mu(\tau)}{((x + \tau)^2 + y^2)} \right) \right| > \gamma. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя оценку (24), при $x > \gamma > \gamma_1 \geq 0$ получаем

$$\left| \frac{\lambda}{l_n(\lambda)} \right| < \left| \operatorname{Re} \frac{l_n(\lambda)}{\lambda} \right|^{-1} < \frac{1}{\gamma}.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} \lambda > \gamma \\ n \in \mathbb{N}}} \left| \frac{1}{l_n(\lambda)} \right| < \frac{1}{\gamma} =: d_2. \quad (25)$$

Таким образом, получаем искомую оценку (20). Предложение 1 доказано. $\square$

В свою очередь из неравенств (19), (20) имеем

$$\sup_{\operatorname{Re} \lambda > \gamma} \|AL^{-1}(\lambda)\| \leq d_1 < \infty, \quad \sup_{\operatorname{Re} \lambda > \gamma} \|\lambda L^{-1}(\lambda)\| \leq d_2 < \infty. \quad (26)$$

Положим

$$h(t) = \int_0^t K(t-s) A^2 \left(\cos(As) \varphi_0 + A^{-1} \sin(As) \varphi_1 \right) ds.$$

Предложение 2. Пусть выполнены условия теоремы 1; тогда для любого $\gamma \geq \gamma_1 > \gamma_0$ справедлива оценка

$$\|h(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} \leq d_3 (\|A^2 \varphi_0\| + \|A \varphi_1\|) \quad (27)$$

с постоянной d_3 , не зависящей от φ_0 и φ_1 .

Доказательство. Оценим вектор-функцию $h(t)$. С этой целью оценим вектор-функцию $\hat{h}(\lambda)$ в пространстве Харди $H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)$. Вектор-функция $\hat{h}(\lambda)$ допускает представление

$$\hat{h}(\lambda) = \hat{K}(\lambda) \left[\lambda(\lambda^2 I + A^2)^{-1} A^2 \varphi_0 + A(\lambda^2 I + A^2)^{-1} A \varphi_1 \right].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\hat{h}(\lambda)\|_{H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)}^2 &= \\ &= \sup_{x > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \hat{K}(x + iy) [(x + iy)((x + iy)^2 I + A^2)^{-1} A^2 \varphi_0 + A((x + iy)^2 I + A^2)^{-1} A \varphi_1] \right\|_H^2 dy. \end{aligned}$$

Проведем оценку полученного интеграла.

$$\begin{aligned} &\left\| \hat{K}(x + iy) [(x + iy)((x + iy)^2 I + A^2)^{-1} A^2 \varphi_0 + A((x + iy)^2 I + A^2)^{-1} A \varphi_1] \right\|_H^2 \leq \\ &\leq C \left| \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{x + iy + \tau} \right|^2 \left(\left\| (x + iy)((x + iy)^2 I + A^2)^{-1} A^2 \varphi_0 \right\|_H^2 + \left\| A((x + iy)^2 I + A^2)^{-1} A \varphi_1 \right\|_H^2 \right) \leq \\ &\leq C \left(\int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{|x + iy + \tau|} \right)^2 \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{(x^2 + y^2) a_n^4 |\varphi_{0n}|^2}{((x^2 - y^2 + a_n^2)^2 + 4x^2 y^2)} + \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n^4 |\varphi_{1n}|^2}{((x^2 - y^2 + a_n^2)^2 + 4x^2 y^2)} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Заметим, что

$$(x^2 - y^2 + a_n^2)^2 + 4x^2y^2 = (x^2 + (y - a_n^2))(x^2 + (y + a_n)^2).$$

Кроме того, при $x > \gamma$ справедливо неравенство

$$\int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{|x + iy + \tau|} \leq \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{x + \tau} \leq \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1.$$

Используя оценку (28), получаем оценку для интеграла

$$\begin{aligned} \|\hat{h}(\lambda)\|_{H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)}^2 &\leq \\ &\leq C \sup_{x > \gamma} \sum_{n=1}^\infty \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + y^2)a_n^4 |\varphi_{0n}|^2}{(x^2 + (y - a_n^2))(x^2 + (y + a_n)^2)} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_n^4 |\varphi_{1n}|^2}{(x^2 + (y - a_n^2))(x^2 + (y + a_n)^2)} dy \right) \leq \\ &\leq 2C \sup_{x > \gamma} \sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^{+\infty} \frac{a_n^4 |\varphi_{0n}|^2}{(x^2 + (y - a_n^2))} dy + \int_0^{+\infty} \frac{a_n^4 |\varphi_{1n}|^2}{a_n^2 (x^2 + (y - a_n^2))} dy \right) \leq \\ &\leq C \frac{2\pi}{\gamma} \left(\sum_{n=1}^\infty a_n^4 |\varphi_{0n}|^2 + \sum_{n=1}^\infty a_n^2 |\varphi_{1n}|^2 \right) = C \frac{2\pi}{\gamma} (\|A^2 \varphi_0\|_H^2 + \|A \varphi_1\|_H^2). \quad \square \end{aligned}$$

3.1. Доказательство теоремы 1. Начнем с доказательства теоремы 1 в случае однородных (нулевых) начальных условий $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. При доказательстве теоремы 1 с нулевыми начальными условиями используется схема доказательства корректной разрешимости задачи Коши для уравнений гиперболического типа, основанная на применении преобразования Лапласа. В связи с этим, для удобства читателя, напомним широко известные факты, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Определение 3. Назовем пространством Харди $H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)$ класс вектор-функций $\hat{f}(\lambda)$ со значениями в H , голоморфных в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \gamma \geq 0\}$, для которых

$$\sup_{x > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{f}(x + iy)\|_H^2 dy < \infty, \quad \lambda = x + iy. \quad (29)$$

Сформулируем теорему Пэли—Винера для пространств Харди $H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)$.

Теорема 3. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пространство $H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)$ совпадает с множеством вектор-функций (преобразований Лапласа), допускающих представление

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt, \quad (30)$$

где $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \lambda > \gamma \geq 0$.

2. Для любой вектор-функции $\hat{f}(\lambda) \in H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)$ существует и единственно представление (30), где вектор-функция $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, причем справедлива формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\gamma + iy) e^{(\gamma + iy)t} dy, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \gamma \geq 0. \quad (31)$$

3. Для вектор функций $\hat{f}(\lambda) \in H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)$ и $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, связанных соотношением (30), справедливо равенство

$$\|\hat{f}\|_{H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)}^2 \equiv \sup_{x > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{f}(x + iy)\|_H^2 dy = \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} \|f(t)\|_H^2 dt \equiv \|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2. \quad (32)$$

Сформулированная теорема широко известна для скалярных функций. Однако без труда обобщается на случай вектор-функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Вернемся к доказательству теоремы 1. Вначале рассмотрим задачу (6), (7) с нулевыми начальными данными $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (6), получаем следующее представление для преобразования Лапласа решения задачи (6), (7):

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda). \quad (33)$$

Перейдем к доказательству однозначной разрешимости задачи (6), (7) в пространстве $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$. Покажем вначале, что вектор-функция $A^2 u(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$. Легко видеть, что

$$A^2 \hat{u}(\lambda) = A^2 L^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda) = A L^{-1}(\lambda) A \hat{f}(\lambda). \quad (34)$$

Согласно теореме Пэли—Винера $A \hat{f}(\lambda) \in H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma_0; H)$, поскольку $A f(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$. Кроме того, справедливо равенство

$$\|A \hat{f}\|_{L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)} = \|A \hat{f}\|_{H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma_0, H)}. \quad (35)$$

Согласно (26), (34), (35) получаем цепочку неравенств

$$\|A^2 u\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2 = \|A^2 \hat{u}\|_{H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)}^2 = \|A L^{-1}(\lambda) A \hat{f}(\lambda)\|_{H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)}^2 \leq d_1^2 \|A \hat{f}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2. \quad (36)$$

Таким образом, вектор-функция $A^2 u(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, и справедлива следующая оценка

$$\|A^2 u\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} \leq d_1 \|A \hat{f}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}. \quad (37)$$

Покажем, что вектор-функция $\lambda^2 \hat{u}(\lambda)$ также принадлежит пространству $H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)$. Заметим, что при $\operatorname{Re} \lambda > \gamma$ справедливо представление

$$I = \lambda^2 L^{-1}(\lambda) + (1 - \hat{K}(\lambda)) A^2 L^{-1}(\lambda). \quad (38)$$

Следовательно, при $\operatorname{Re} \lambda > \gamma$ имеем

$$\hat{f}(\lambda) = \lambda^2 \hat{u}(\lambda) + (1 - \hat{K}(\lambda)) A^2 L^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda). \quad (39)$$

В силу предположений относительно функции $K(t)$ функция $1 - \hat{K}(\lambda)$ является ограниченной и аналитической в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda = x > \gamma\}$. В самом деле, справедливо следующее неравенство:

$$|1 - \hat{K}(\lambda)| \leq 1 + \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{|\lambda + \tau|} \leq 1 + \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{x + \tau} \leq 1 + \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 2.$$

Оценим вектор-функцию $\lambda^2 \hat{u}(\lambda)$ в пространстве Харди $H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)$. Из представления (39) неравенства (26) и предыдущей оценки получаем

$$\begin{aligned} \|\lambda^2 \hat{u}(\lambda)\|_{H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)} &\leq \|\hat{f}(\lambda)\|_{H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)} + |1 - \hat{K}(\lambda)| \cdot \|A L^{-1}(\lambda) A \hat{f}(\lambda)\|_{H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)} \leq \\ &\leq \operatorname{const} \|A \hat{f}(\lambda)\|_{H_2(\operatorname{Re} \lambda > \gamma, H)}. \end{aligned} \quad (40)$$

Таким образом, из теоремы Пэли—Винера вытекает неравенство

$$\left\| \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2 \leq d_1 \|A \hat{f}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2. \quad (41)$$

Наконец, объединяя оценки (37) и (41), мы получаем, что вектор-функция $u(t)$ принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, H)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)} \leq d_2 \|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}. \quad (42)$$

Рассмотрим теперь задачу (6), (7) с неоднородными начальными данными φ_0 и φ_1 . Положим

$$u(t) = \cos(At)\varphi_0 + A^{-1}\sin(At)\varphi_1 + w(t). \quad (43)$$

Тогда вектор-функция $w(t)$ является решением следующей задачи

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + A^2 w(t) - \int_0^t K(t-s)A^2 w(s)ds = f_1(t), \quad w(+0) = w^{(1)}(+0) = 0,$$

где $f_1(t) = f(t) - h(t)$,

$$h(t) = \int_0^t K(t-s)A^2(\cos(As)\varphi_0 + A^{-1}\sin(As)\varphi_1)ds.$$

Для доказательства теоремы достаточно установить следующее неравенство:

$$\|Af_1\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} \leq \|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \|Ah\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} < \infty. \quad (44)$$

Из оценки (27) вытекает требуемая для доказательства теоремы 1 оценка

$$\|Ah(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} \leq d_4(\|A^3\varphi_0\| + \|A^2\varphi_1\|) \quad (45)$$

с постоянной d_4 , не зависящей от φ_0 и φ_1 .

Докажем единственность сильного решения задачи (6), (7). Предположим, что существуют два различных сильных решения задачи (6), (7) $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Тогда вектор-функция $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$ является сильным решением задачи (6), (7) с нулевой правой частью $f(t) \equiv 0$ и нулевыми начальными векторами $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$, и его преобразование Лапласа $\hat{v}(\lambda)$ удовлетворяет уравнению $L(\lambda)\hat{v}(\lambda) = 0$. Следовательно, $\hat{v}(\lambda) = 0$ и в соответствии с формулой обращения преобразования Лапласа $v(t) \equiv 0$. Теорема 1 доказана. $\square$

3.2. Доказательство теоремы 2. Пусть $u(t)$ — сильное решение задачи (6)–(8) с нулевыми начальными данными $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (6), получаем следующее представление для преобразования Лапласа сильного решения $u(t)$ задачи (6)–(8):

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda). \quad (46)$$

Рассмотрим проекцию $u_n(t)$ вектор-функции $u(t)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n , т.е. $u_n(t) = (u(t), e_n)_H$, тогда $\hat{u}_n(\lambda) = (\hat{u}(\lambda), e_n)_H = l_n^{-1}(\lambda)\hat{f}_n(\lambda)$.

Перейдем к доказательству обобщенной разрешимости задачи (6), (7) с нулевыми начальными данными $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ в пространстве $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$ для любого $\gamma \geq \gamma_1 > \gamma_0$.

Утверждение 1. Если функция $u_n(t)e_n$ является сильным решением задачи

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + A^2 u - \int_0^t K(t-s)A^2 u(s)ds = f_n(t)e_n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad u(+0) = 0, \quad u^{(1)}(+0) = 0, \quad (47)$$

то функция $u_n(t)e_n$ является обобщенным решением этой задачи.

Действительно, умножим скалярно уравнение (47) на функцию $v(t) \in W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$ в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, где $\gamma \geq \gamma_1 > \gamma_0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (u_n''(t)e_n, v(t))_H e^{-2\gamma t} dt + \int_0^{+\infty} \left(A^2 \left[u_n(t)e_n - \int_0^t K(t-s)u_n(s)e_n ds \right], v(t) \right)_H e^{-2\gamma t} dt = \\ = \int_0^{+\infty} (f_n(t)e_n, v(t))_H e^{-2\gamma t} dt. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям первое слагаемое, получаем следующее равенство:

$$\int_0^{+\infty} (u_n''(t)e_n, v(t))_H e^{-2\gamma t} dt = -(\varphi_1, v(0))_H - \langle u_n'(t), v'(t) \rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + 2\gamma \langle u_n'(t), v(t) \rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}.$$

Преобразуя второе слагаемое, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(A^2 \left[u_n(t)e_n - \int_0^t K(t-s)u_n(s)e_n ds \right], v(t) \right)_H e^{-2\gamma t} dt = \\ = \left\langle A \left[u_n(t)e_n - \int_0^t K(t-s)u_n(s)e_n ds \right], Av(t) \right\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $u_n(t)e_n$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} \left\langle A \left[u_n(t)e_n + \int_0^t K(t-s)u_n(s)e_n ds \right], Av(t) \right\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} - \langle u_n'(t)e_n, v'(t) \rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \\ + 2\gamma \langle u_n'(t)e_n, v(t) \rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} = \langle f_n(t)e_n, v(t) \rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} \end{aligned}$$

и, следовательно, является обобщенным решением задачи (47).

Следствие. Если вектор-функция

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^N u_n(t)e_n$$

является сильными решениям задачи

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + A^2 u - \int_0^t K(t-s)A^2 u(s)ds = F_N(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad u(+0) = 0, \quad u^{(1)}(+0) = 0, \quad (48)$$

где

$$F_N(t) = \sum_{n=1}^N f_n(t),$$

то вектор-функция $S_N(t)$ является обобщенным решением задачи (48), т.е. справедливо тождество

$$\begin{aligned} \left\langle A \left[S_N(t) + \int_0^t K(t-s)S_N(s)ds \right], Av(t) \right\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} - \langle S_N'(t), v'(t) \rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \\ + 2\gamma \langle S_N'(t), v(t) \rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} = \langle F_N(t), v(t) \rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}. \quad (49) \end{aligned}$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы 1 вектор-функция

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)e_n$$

(где для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $u_n(t)e_n$ является сильным решением соответствующей задачи (47)) является обобщенным решением задачи (6)–(8).

Для этого покажем, что последовательность

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^N u_n(t)e_n$$

является фундаментальной в пространстве $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$, используя оценки (19), (20) из предложения 1.

$$\begin{aligned} \|S_N(t) - S_M(t)\|_{W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)}^2 &= \left\| \sum_{n=M+1}^N u_n(t)e_n \right\|_{W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)}^2 = \\ &= \left\| A \sum_{n=M+1}^N u_n(t)e_n \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2 + \left\| \sum_{n=M+1}^N u'_n(t)e_n \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2 = \\ &= \left\| A \sum_{n=M+1}^N \hat{u}_n(\lambda)e_n \right\|_{H_2(\operatorname{Re} \lambda > 0, H)}^2 + \left\| \sum_{n=M+1}^N \lambda \hat{u}_n(\lambda)e_n \right\|_{H_2(\operatorname{Re} \lambda > 0, H)}^2 = \\ &= \sup_{x > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=M+1}^N |a_n \hat{u}_n(x + iy)|^2 + \sum_{n=M+1}^N |(x + iy) \hat{u}_n(x + iy)|^2 \right) dy = \\ &= \sup_{x > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=M+1}^N \left| \frac{a_n \hat{f}_n(x + iy)}{l_n(x + iy)} \right|^2 + \sum_{n=M+1}^N \left| \frac{(x + iy) \hat{f}_n(x + iy)}{l_n(x + iy)} \right|^2 \right) dy \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=M+1}^N \sup_{x > \gamma} \left(\left| \frac{a_n}{l_n(x + iy)} \right|^2 + \left| \frac{x + iy}{l_n(x + iy)} \right|^2 \right) |\hat{f}_n(x + iy)|^2 dy \leq \\ &\leq d_5 \sup_{x > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=M+1}^N |\hat{f}_n(x + iy)|^2 dy = d_5 \left\| \sum_{n=M+1}^N \hat{f}_n(\lambda)e_n \right\|_{H_2(\operatorname{Re} \lambda > 0, H)}^2 = \\ &= d_5 \left\| \sum_{n=M+1}^N f_n(t)e_n \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2. \quad (50) \end{aligned}$$

По условию теоремы 1 вектор-функция $f(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, следовательно, последовательность вектор-функций $S_N(t)$ сходится в пространстве $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$ к вектор-функции $u(t)$, при $F_N(t)$, стремящейся к $F(t)$ в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$. Переходя к пределу при $N \rightarrow +\infty$ в тождестве (49), получаем тождество (16) при $\varphi_1 = 0$, т.е. функция

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)e_n$$

является обобщенным решением задачи (6)–(8).

Получим оценку нормы обобщенного решения

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)e_n$$

в пространстве $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$. Полагая $M = 0$ и $S_M(t) = 0$ в цепочке неравенств (50), приходим к неравенству

$$\|S_N(t)\|_{W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)}^2 \leq d_5 \left\| \sum_{n=1}^N f_n(t) e_n \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2 \leq d_5 \|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2.$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow +\infty$ в последнем неравенстве, получаем следующую оценку

$$\|u(t)\|_{W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)}^2 \leq d_5 \|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2. \quad (51)$$

Рассмотрим теперь задачу (6)–(8) с неоднородными начальными данными φ_0 и φ_1 . Положим

$$u(t) = \cos(At)\varphi_0 + A^{-1} \sin(At)\varphi_1 + w(t). \quad (52)$$

Утверждение 2. Вектор-функция $u(t)$ является обобщенным решением задачи (6)–(8), если вектор-функция $w(t)$ является обобщенным решением следующей задачи:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + A^2 w(t) - \int_0^t K(t-s) A^2 w(s) ds = f_1(t), \quad w(+0) = w^{(1)}(+0) = 0, \quad (53)$$

где $f_1(t) = f(t) - h(t)$,

$$h(t) = \int_0^t K(t-s) A^2 (\cos(As)\varphi_0 + A^{-1} \sin(As)\varphi_1) ds.$$

Из условий теоремы 2 и предложения 2 следует справедливость следующей оценки

$$\|f_1\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} \leq \|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \|h\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} < \infty. \quad (54)$$

Таким образом, для задачи (53) выполнены условия теоремы 2. Непосредственной подстановкой вектор-функции $u(t)$, заданной формулой (52), в тождество (16) можно убедиться в справедливости утверждения 2. Кроме того, из оценки (51) и предложения 2 следует оценка (18). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В. В., Гавриков А. А., Иванов С. А., Князьков Д. Ю., Самарин В. А., Шамаев А. С. Спектральные свойства комбинированных сред // Совр. пробл. мат. мех. * — 2009. — 5, № 1. — С. 134–155.
2. Власов В. В., Раутиан Н. А. О свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории теплообмена // Тр. Моск. мат. о-ва. — 2014. — 75, № 2. — С. 131–155.
3. Власов В. В., Раутиан Н. А. Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Совр. мат. Фундам. напр. — 2015. — 58. — С. 22–42.
4. Власов В. В., Раутиан Н. А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
5. Власов В. В., Раутиан Н. А. Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 9. — С. 1168–1177.
6. Власов В. В., Раутиан Н. А. Исследование операторных моделей, возникающих в теории вязкоупругости // Совр. мат. Фундам. напр. — 2018. — 64, № 1. — С. 60–73.
7. Власов В. В., Раутиан Н. А. Корректная разрешимость и спектральный анализ вольтерровых интегродифференциальных уравнений с сингулярными ядрами // Докл. РАН. — 2018. — 482, № 6. — С. 635–638.
8. Власов В. В., Раутиан Н. А. Корректная разрешимость и представление решений вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Диффер. уравн. — 2019. — 55, № 4. — С. 574–587.
9. Власов В. В., Раутиан Н. А. Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 2019. — 32. — С. 91–110.
10. Жиков В. В. Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Мат. сб. — 2000. — 191, № 7. — С. 31–72.

11. *Ильюшин А. А., Победра Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970.
12. *Лыков А. В.* Проблема тепло- и массообмена. — Минск: Наука и техника, 1976.
13. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.
14. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J. M.* Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. — New York–Dordrecht–Heidelberg–London: Springer-Verlag, 2012.
15. *Desch W., Miller R.* Exponential stabilization of Volterra Integrodifferential equations in Hilbert space// J. Differ. Equations. — 1987. — 70. — P. 366–389.
16. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin–Pipkin-type equations// SIAM J. Math. Anal. — 2011. — 43, № 5. — P. 2296–2306.
17. *Fabrizio M., Gentili G., Golden J. M.* Non-isothermal free energies for linear theories with memory// Math. Comp. Model. — 2004. — 39. — P. 219–253.
18. *Fabrizio M., Morro A.* Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity. — Philadelphia, PA: SIAM Stud. Appl. Math., 1992.
19. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* Theory of heat conduction with finite wave speed// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1968. — 31. — P. 113–126.
20. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2. Non-self-adjoint Problems for Viscous Fluids. — Basel: Springer-Verlag, 2003.
21. *Lions J. L. and Magenes E.* Nonhomogeneous Boundary-Value Problems and Applications. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1972.
22. *Mahiuddin M., Khan M. I. H., Nghia Duc Pham, Karim M. A.* Development of fractional viscoelastic model for characterising viscoelastic properties of food material during drying// Food Biosci. — 2018. — 23. — P. 45–53.
23. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin–Pipkin equations: a cosine operator approach// Appl. Math. Optim. — 2005. — 52. — P. 143–165.
24. *Prüss J.* Evolutionary Integral Equations and Applications. — Birkhäuser-Verlag: Basel–Boston–Berlin.
25. *Rassoli A., Fatourae N., Guidoin R.* Structural model for viscoelastic properties of pericardial bioprosthetic valves// Artificial Organs. — 2018. — 42. — P. 630–639.
26. *Seneta E.* Regularly Varying Functions. — Springer-Verlag, 1976.
27. *Shahin-Shamsabadi A. et al.* Mechanical, material, and biological study of a PCL/bioactive glass bone scaffold: Importance of viscoelasticity// Mat. Sci. Eng. C. — 2018. — 90. — P. 280–288.
28. *Stropek Z., Golacki K.* Viscoelastic response of apple flesh in a wide range of mechanical loading rates// Int. Agrophys. — 2018. — 32. — P. 335–340.
29. *Vlasov V. V., Rautian N. A.* Well-defined solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations// J. Math. Sci. — 2011. — 179, № 3. — P. 390–415.
30. *Vlasov V. V., Wu J.* Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay// Funct. Differ. Equations. — 2009. — 16, № 4. — P. 751–768.
31. *Wu J.* Semigroup and integral form of class of partial differential equations with infinite delay// Differ. Integr. Equations. — 1991. — 4, № 6. — P. 1325–1351.

Раутиан Надежда Александровна
 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
 E-mail: nrautian@mail.ru