Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Рустанов, С. В. Харитонов, Тензор Нейенхейса псевдокосимплектического многообразия, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 191, 149–156

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-191-149-156>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 02:13:44

ТЕНЗОР НЕЙЕНХЕЙСА ПСЕВДОКОСИМПЛЕКТИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2021 г. А. Р. РУСТАНОВ, С. В. ХАРИТОНОВА

Аннотация. В данной работе исследуется тензор Нейенхейса псевдокосимплектических многообразий. Построена присоединенная G -структура почти контактного метрического многообразия, определена первая группа таких многообразий. Выделен подкласс квазикосимплектических многообразий — псевдокосимплектические многообразия, для них получена первая группа структурных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия того, что псевдокосимплектическое многообразие является косимплектическим, точнее косимплектическим, нормальным, интегрируемым.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, тензор Нейенхейса, квазикосимплектическая структура, псевдокосимплектическая структура, точнее косимплектическая структура.

THE NIJENHUIS TENSOR OF A PSEUDO-COSYMPLECTIC MANIFOLD

© 2021 A. R. RUSTANOV, S. V. KHARITONOVA

ABSTRACT. In this paper, we examine the Nijenhuis tensor of pseudo-cosymplectic manifolds. The adjoint G -structure of an almost contact metric manifold is constructed, the first group of such manifolds is defined. The pseudo-cosymplectic subclass of quasi-cosymplectic manifolds is distinguished and the first group of structure equations is obtained for them. We obtained necessary and sufficient conditions under which a pseudo-cosymplectic manifold is cosymplectic, most precisely cosymplectic, normal, or integrable.

Keywords and phrases: almost contact metric structure, Nijenhuis tensor, quasi-cosymplectic structure, pseudo-cosymplectic structure, most precisely cosymplectic structure.

AMS Subject Classification: 53D15, 53C25

1. Предварительные сведения. Наиболее интересные геометрические свойства почти контактных многообразий появляются, когда к ним применяются дополнительные условия. Естественным является изучение геометрии отдельного объекта на многообразии. В частности, представляет интерес изучение геометрии тензора Нейенхейса структурного эндоморфизма почти контактной метрической структуры, которая благодаря дополнительным требованиям является псевдокосимплектической.

Пусть M — гладкое многообразие, $\dim M = 2n + 1$; $X(M) = C^\infty(M)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии M ; d — оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и т. п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞ .

Определение 1 (см. [7]). Почти контактной структурой на многообразии M называется тройка (η, ξ, Φ) тензорных полей на этом многообразии, где η — дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры, ξ — векторное поле, называемое характеристическим, Φ — эндоморфизм модуля $X(M)$, называемый структурным эндоморфизмом. При этом

$$\eta(\xi) = 1; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \Phi^2 = -\text{id} + \eta \otimes \xi.$$

Если, кроме того, на M фиксирована риманова структура $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, такая, что

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in X(M),$$

четверка $(\eta, \xi, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ называется почти контактной метрической структурой (AC -структурой).

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется почти контактным метрическим многообразием (AC -многообразием).

Легко проверить, что тензор $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$, $X, Y \in X(M)$ кососимметричен, т.е. является 2-формой на M . Он называется фундаментальной формой структуры. Хорошо известно, что необходимыми условиями существования почти контактной метрической структуры на многообразии является его нечетномерность и ориентируемость.

Пусть (η, ξ, Φ, g) — почти контактная метрическая структура на многообразии M^{2n+1} . В модуле $X(M)$ внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $m = \eta \otimes \xi$ и $l = \text{id} - m = -\Phi^2$ (см. [2, 3]); таким образом, $X(M) = L \oplus M$, где $L = \text{Im}(\Phi) = \ker \eta$ — так называемое контактное распределение, $\dim L = 2n$, $M = \text{Im } m = \ker(\Phi)$ — линейная оболочка характеристического вектора ξ (причем l и m являются проекторами на подмодули L , M соответственно). Очевидно, распределения L и M инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны. Очевидно также, что

$$\tilde{\Phi}^2 = -\text{id}, \quad \langle \tilde{\Phi} X, \tilde{\Phi} Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in L,$$

где $\tilde{\Phi} = \Phi|_L$. Поэтому, если $p \in M$, то в касательном пространстве $T_p(M)$ можно построить ортонормированный репер $(p, e_0, e_1, \dots, e_n, \Phi e_1, \dots, \Phi e_n)$, где $e_0 = \xi$. Такой репер называется вещественно адаптированным репером (см. [2, 3]). С другой стороны, пусть $L^C = L \oplus C$ — комплексификация распределения L . В ней внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} - \sqrt{-1}\Phi)$ и $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\text{id} + \sqrt{-1}\Phi)$ на собственные подмодули $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$ и $D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}}$ эндоморфизма Φ , отвечающие собственным значениям $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$ соответственно. Следовательно, можно построить репер $(p, \epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon_{\hat{1}}, \dots, \epsilon_{\hat{n}})$ комплексификации пространства $T_p(M)$, где $\epsilon_a = \sqrt{2}\sigma_p(e_a)$, $\epsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}_p(e_a)$; $\epsilon_0 = \xi_p$, состоящий из собственных векторов оператора Φ_p . Такой репер называется A -репером (см. [2, 3]). Легко видеть, что компоненты тензоров Φ_p и g_p в A -репере имеют вид соответственно

$$\Phi_b^a = \sqrt{-1}\delta_b^a, \quad \Phi_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -\sqrt{-1}\delta_{\hat{b}}^{\hat{a}}, \quad g_{00} = 1, \quad g_{a\hat{b}} = \delta_a^b, \quad g_{\hat{a}b} = \delta_b^a, \quad (1)$$

остальные компоненты равны нулю. Хорошо известно (см. [2, 3]), что совокупность таких реперов определяет G -структуру на M со структурной группой $1 \times U(n)$. Эта G -структура называется присоединенной (см. [2, 3]).

Подчеркнем, что пространство присоединенной G -структуры состоит из комплексных реперов, т.е. реперов комплексификации соответствующих касательных пространств. Поэтому, даже имея дело с вещественными тензорами, мы, говоря об их компонентах на пространстве присоединенной G -структуры, подразумеваем компоненты комплексных расширений этих тензоров. В свою очередь, комплексный тензор является комплексным расширением вещественного тензора тогда и только тогда, когда он инвариантен относительно оператора комплексного сопряжения. Такой тензор называется вещественным (см. [3]). В частности, сумма чистого комплексного тензора и комплексно сопряженного ему тензора является вещественным тензором (см. [3]).

На протяжении всей работы будем подразумевать, что индексы $i, j, k, \dots$ пробегают значения от 0 до $2n$, а индексы $a, b, c, d, \dots$ — значения от 1 до n , и положим $\hat{a} = a + n$, $\hat{\hat{a}} = a$, $\hat{0} = 0$. Поскольку Φ и g — тензоры типов $(1, 1)$ и $(2, 0)$ соответственно, их компоненты на пространстве

расслоения всех комплексных реперов над M удовлетворяют уравнениям (см. [3])

$$d\Phi_j^i + \Phi_j^k \theta_k^i - \Phi_k^i \theta_j^k = \Phi_{j,k}^i \omega^k, \quad dg_{ij} - g_{kj} \theta_i^k - g_{ik} \theta_j^k = g_{ij,k} \omega^k, \quad (2)$$

где ω^i , θ_j^i — компоненты форм смещения и римановой связности ∇ соответственно, $\Phi_{j,k}^i$, $g_{ij,k}$ — компоненты ковариантного дифференциала тензоров Φ и g этой связности соответственно. Более того, в силу определения римановой связности $\nabla g = 0$ и, значит (см. [3]),

$$g_{ij,k} = 0. \quad (3)$$

С учетом (1) и (3) соотношения (2) на пространстве присоединенной G -структуры переписутся в следующей форме (см. [3, 4]):

$$\begin{aligned} \Phi_{b,k}^a &= 0; \quad \Phi_{\hat{b},k}^{\hat{a}} = 0; \quad \Phi_{0,k}^0 = 0; \quad \theta_{\hat{b}}^a = \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{b},k}^a \omega^k; \quad \theta_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{b},k}^{\hat{a}} \omega^k; \\ \theta_0^a &= \sqrt{-1} \Phi_{0,k}^a \omega^k; \quad \theta_0^{\hat{a}} = -\sqrt{-1} \Phi_{0,k}^{\hat{a}} \omega^k; \quad \theta_a^0 = -\sqrt{-1} \Phi_{a,k}^0 \omega^k; \\ \theta_{\hat{a}}^0 &= \sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},k}^0 \omega^k; \quad \theta_0^0 = 0; \quad \theta_j^i + \theta_{\hat{j}}^{\hat{i}} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, заметим, что в силу вещественности соответствующих форм и тензоров $\overline{\omega^i} = \omega^{\hat{i}}$, $\overline{\Phi_{j,k}^i} = \Phi_{\hat{j},\hat{k}}^{\hat{i}}$, где $t \rightarrow \hat{t}$ — оператор комплексного сопряжения.

С учетом этих соотношений первая группа структурных уравнений римановой связности $d\omega^i = -\theta_j^i \wedge \omega^j$ на пространстве присоединенной G -структуры примет вид:

$$\begin{aligned} d\omega &= C_{ab} \omega^a \wedge \omega^b + C^{ab} \omega_a \wedge \omega_b + C_a^b \omega^a \wedge \omega_b + C_a \omega \wedge \omega^a + C^a \omega \wedge \omega_a; \\ d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{ab} \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + B_a^b \omega^b \wedge \omega + B^{ab} \omega_b \wedge \omega; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab} \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + B_a^b \omega_b \wedge \omega + B_{ab} \omega^b \wedge \omega; \end{aligned} \quad (5)$$

где $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$; π — естественная проекция пространства присоединенной G -структуры на многообразие M . Соотношения (5) называют первой группой структурных уравнений почти контактного метрического многообразия (см. [3, 4]0. При этом справедливы равенства:

$$\begin{aligned} B^{abc} &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^a, \quad B_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^{\hat{a}}, \quad B^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{b},\hat{c}}^a, \quad B_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}}, \\ B^a{}_b &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{0,b}^a, \quad B_a{}^b = \sqrt{-1} \Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}}, \quad B^{ab} = -\sqrt{-1} \left(\Phi_{0,\hat{b}}^a - \frac{1}{2} \Phi_{\hat{b},0}^a \right), \\ B_{ab} &= \sqrt{-1} \left(\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{1}{2} \Phi_{\hat{b},0}^{\hat{a}} \right), \quad C^{ab} = \sqrt{-1} \Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0, \quad C_{ab} = -\sqrt{-1} \Phi_{[a,b]}^0, \\ C^a &= -\sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},0}^0, \quad C_a = \sqrt{-1} \Phi_{a,0}^0, \quad C_a^b = -\sqrt{-1} (\Phi_{\hat{b},\hat{a}}^0 + \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0). \end{aligned} \quad (6)$$

Введем обозначения

$$C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{b},\hat{c}}^a, \quad C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}}, \quad F^{ab} = \sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0, \quad F_{ab} = -\sqrt{-1} \Phi_{a,b}^0. \quad (7)$$

2. Псевдокосимплектические многообразия.

Определение 2 (см. [9]). AC -структура называется квазикосимплектической структурой (QCS -структурой), если

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y = \eta(Y)\nabla_{\Phi X}\xi, \quad X, Y \in X(M), \quad (8)$$

где ∇ — риманова связность метрики $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Заметим, что в [10] эта структура называется квази-К-косимплектической.

Многообразие, снабженное квазикосимплектической структурой, называется квазикосимплектическим многообразием (QCS -многообразием).

Поскольку ξ — тензор типа $(0, 1)$, его компоненты на пространстве расслоения всех комплексных реперов над M удовлетворяют уравнениям: $d\xi^i + \xi^j \theta_j^i = \xi^i{}_{,j} \omega^j$, где $\xi^i{}_{,j}$ — компоненты тензора

$\nabla\xi$. Записывая эти соотношения на пространстве присоединенной G -структуры с учетом (2) и того обстоятельства, что на этом пространстве $\xi^a = 0$, $\xi^{\hat{a}} = 0$, $\xi^0 = 1$, получаем, что

$$\xi^0_{,j} = 0; \quad \xi^a_{,i} = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,i}; \quad \xi^{\hat{a}}_{,i} = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,i}. \quad (9)$$

Аналогично, для η — тензора типа $(1, 0)$, его компоненты на пространстве расслоения всех комплексных реперов над M удовлетворяют уравнениям: $d\eta_i - \eta_j\theta^j_i = \eta_{i,j}\omega^j$, где $\eta_{i,j}$ — компоненты тензора $\nabla\eta$. Записывая эти соотношения на пространстве присоединенной G -структуры с учетом (2) и того обстоятельства, что на этом пространстве $\eta_a = 0$, $\eta_{\hat{a}} = 0$, $\eta_0 = 1$, получаем, что

$$\eta_{0,j} = 0; \quad \eta_{a,i} = \sqrt{-1}\Phi^0_{a,i}; \quad \eta_{\hat{a},i} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},i}. \quad (10)$$

Тождество (8) на пространстве расслоения всех комплексных реперов над M запишется в виде

$$\Phi^i_{j,k} + \Phi^i_{l,m}\Phi^l_j\Phi^m_k = \eta_j\xi^i_{,l}\Phi^l_k.$$

Последние соотношения на пространстве присоединенной G -структуры равносильны следующим:

$$\Phi^0_{i,0} = \Phi^i_{0,0} = \Phi^a_{0,b} = \Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} = \Phi^{\hat{a}}_{b,0} = \Phi^a_{b,0} = \Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}} = \Phi^a_{b,c} = 0. \quad (11)$$

Тогда с учетом полученных соотношений первая группа структурных уравнений квазикосимплектических многообразий на пространстве присоединенной G -структуры примет вид:

$$\begin{aligned} d\omega &= C_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + C^{ab}\omega_a \wedge \omega_b; \\ d\omega^a &= -\theta^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^{ab}\omega_b \wedge \omega; \\ d\omega_a &= \theta^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_{ab}\omega^b \wedge \omega. \end{aligned}$$

Определение 3. QC_S -структуру назовем псевдокосимплектической структурой (PC_S -структурой), если

$$\begin{aligned} d\eta &= 0; \\ \Phi \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X &= 0; \quad \forall X, Y \in X(M). \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$; π — естественная проекция пространства присоединенной G -структуры на многообразие M , то условие $d\eta = 0$ на пространстве присоединенной G -структуры равносильно соотношениям: $C_{ab} = C^{ab} = 0$, т.е.

$$\Phi^0_{[\hat{a},\hat{b}]} = \Phi^0_{[a,b]} = 0. \quad (13)$$

Тождество (12) на пространстве расслоения всех комплексных реперов над M запишется в виде

$$\Phi^i_j\Phi^j_{k,r}\Phi^k_m\Phi^r_l + \Phi^i_j\Phi^j_{r,k}\Phi^r_l\Phi^k_m = 0.$$

Последние соотношения на пространстве присоединенной G -структуры равносильны следующим:

$$\Phi^0_{i,0} = \Phi^i_{0,0} = \Phi^a_{0,b} = \Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} = \Phi^{\hat{a}}_{b,0} = \Phi^a_{b,0} = \Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}} = \Phi^a_{b,c} = 0; \quad \Phi^a_{b,\hat{c}} + \Phi^a_{\hat{c},\hat{b}} = 0; \quad \Phi^{\hat{a}}_{b,c} + \Phi^{\hat{a}}_{c,b} = 0. \quad (14)$$

С учетом полученных соотношений (6), (7), (13) и (14) первая группа структурных уравнений PC_S -многообразий на пространстве присоединенной G -структуры примет вид:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta^a_b \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + F^{ab}\omega_b \wedge \omega, \\ d\omega_a &= \theta^b_a \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + F_{ab}\omega^b \wedge \omega; \\ d\omega &= 0; \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} C^{abc} &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}}, \quad C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,c}, \quad C^{[abc]} = C^{abc}, \quad C_{[abc]} = C_{abc}, \\ \overline{C^{ac}} &= C_{abc}, \quad F^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},\hat{b}}, \quad F_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,b}, \\ F^{[ab]} &= F_{[ab]} = 0, \quad \overline{F^{ab}} = F_{ab}. \end{aligned} \quad (16)$$

Определение 4. QC_S -структуру назовем строго псевдокосимплектической структурой (SPC_S -структурой), если

$$\begin{aligned} d\eta &= 0; \\ \Phi \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y &= 0; \quad \forall X, Y \in X(M). \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что в [11] класс строго псевдокосимплектических структур называется классом C_9 и определяется тождеством

$$\nabla_X(\Omega)(Y, Z) = \eta(Z)\nabla_Y(\eta)(\Phi X) - \eta(Y)\nabla_{\Phi X}(\eta)Z; \quad X, Y, Z \in X(M).$$

Тождество (17) на пространстве присоединенной G -структуры на M запишется в виде $\Phi_j^i \Phi_{k,r}^j \Phi_m^k \Phi_l^r = 0$.

Последние соотношения равносильны следующим:

$$\Phi_{i,0}^0 = \Phi_{0,0}^i = \Phi_{0,b}^a = \Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} = \Phi_{b,0}^{\hat{a}} = \Phi_{b,0}^a = \Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}} = \Phi_{b,c}^a = \Phi_{b,\hat{c}}^a = \Phi_{b,c}^{\hat{a}} = 0. \quad (18)$$

Из определений 3 и 4 следует, что SPC_S -структура является PC_S -структурой. Обратное верно не всегда.

С учетом полученных соотношений (18), первая группа структурных уравнений SPC_S -многообразий на пространстве присоединенной G -структуры примет вид:

$$d\omega^a = -\theta_b^a \wedge \omega^b + F^{ab}\omega_b \wedge \omega; \quad d\omega_a = \theta_a^b \wedge \omega_b + F_{ab}\omega^b \wedge \omega; \quad d\omega = 0.$$

Наш интерес к PC_S -структурам объясняется еще и тем, что они обобщают точнее косимплектические структуры.

Напомним (см. [4]), что почти контактная метрическая структура является косимплектической, если $\nabla_X(\Phi)Y = 0$, $X, Y \in X(M)$.

Почти контактная метрическая структура называется слабо (nearly) косимплектической, если $\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = 0$, $X, Y \in X(M)$ (см. [4]).

Слабо косимплектическая структура с замкнутой контактной формой называется точнее (closely) косимплектической (см. [4]).

Предложение 1. PC_S -структура является точнее косимплектической структурой тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры $F^{ab} = F_{ab} = 0$.

Доказательство. Определяющее условие слабо косимплектических многообразий

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = 0, \quad X, Y \in X(M),$$

на пространстве присоединенной G -структуры выглядит так:

$$\Phi_{j,k}^i + \Phi_{k,j}^i = 0.$$

Из соотношений (13), (14) и (16) следует, что PC_S -структура является слабо косимплектической структурой тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры выполняется условие $F^{ab} = F_{ab} = 0$. По определению контактная форма PC_S -структуры замкнута, а, значит, PC_S -структура у которой $F^{ab} = F_{ab} = 0$, является точнее косимплектической. $\square$

Таким образом, первая группа структурных уравнений точнее косимплектической структуры на пространстве присоединенной G -структуры имеет вид:

$$d\omega^a = -\theta_b^a \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c; \quad d\omega_a = \theta_a^b \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c; \quad d\omega = 0.$$

Предложение 2. PC_S -структура является косимплектической структурой тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры

$$C^{abc} = C_{abc} = 0, \quad F^{ab} = F_{ab} = 0.$$

Доказательство. Определяющее условие косимплектических многообразий $\nabla_X(\Phi)Y = 0$, $X, Y \in X(M)$, на пространстве присоединенной G -структуры можно переписать в виде $\Phi_{j,k}^i = 0$. Из соотношений (13), (14) и (16) следует, что это возможно тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры $C^{abc} = C_{abc} = 0$ и $F^{ab} = F_{ab} = 0$. $\square$

3. Тензор Нейенхейса. Напомним (см. [5]), что тензором (или оператором) Нейенхейса эндоморфизма Φ касательного пучка многообразия называется тензор N типа $(2, 1)$, определяемый формулой

$$N(X, Y) = \frac{1}{4}(\Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]), \quad X, Y \in X(M).$$

Его обращение в нуль равносильно интегрируемости структуры (см. [5]). Прямой подсчет с учетом тождества $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ показывает, что

$$N(X, Y) = \frac{1}{4} \nabla_\Phi X (\Phi) Y - \Phi \nabla_X (\Phi) Y - \nabla_\Phi Y (\Phi) X + \Phi \nabla_Y (\Phi) X.$$

С учетом (4) получаем отсюда, что на пространстве присоединенной G -структуры компоненты тензора N определяются тождествами

$$\begin{aligned} N_{ab}^0 &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{[a,b]}^0; & N_{\hat{a}b}^0 &= -N_{b\hat{a}}^0 = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{(\hat{a},b)}^0; & N_{\hat{a}\hat{b}}^0 &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0; \\ N_{\hat{b}0}^a &= -N_{0\hat{b}}^a = \frac{\sqrt{-1}}{4} \Phi_{\hat{b},0}^a - \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{0,\hat{b}}^a; & N_{\hat{b}\hat{c}}^a &= \sqrt{-1} \Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^a; \\ N_{\hat{b}\hat{c}}^{\hat{a}} &= -\sqrt{-1} \Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^{\hat{a}}; & N_{\hat{b}0}^{\hat{a}} &= -N_{0\hat{b}}^{\hat{a}} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} - \frac{i}{4} \Phi_{\hat{b},0}^{\hat{a}}. \end{aligned}$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно равны нулю.

Согласно (11), (13) и (14) компоненты тензора Нейенхейса структурного оператора PCS -структуры задаются равенствами:

$$N_{\hat{b}0}^a = -N_{0\hat{b}}^a = \frac{1}{2} F^{ab}; \quad N_{\hat{b}\hat{c}}^a = 2C^{abc}; \quad N_{\hat{b}\hat{c}}^{\hat{a}} = 2C_{abc}; \quad N_{\hat{b}0}^{\hat{a}} = -N_{0\hat{b}}^{\hat{a}} = \frac{1}{2} F_{ab}. \quad (19)$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно равны нулю.

Определение 5 (см. [3, 4]). Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если $N(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0$.

Понятие нормальности было введено Сасаки и Хатакеямой (см. [13]) и является одним из наиболее фундаментальных понятий контактной геометрии, тесно связанных с понятием интегрируемости структуры.

В силу определения 3 PCS -структура нормальна тогда и только тогда, когда $N(X, Y) = 0$.

Пусть PCS -структура нормальна (т.е. $N(X, Y) = 0$), тогда из (19) следует, что $C^{abc} = C_{abc} = 0$, $F_{ab} = F^{ab} = 0$, т.е. структура является косимплектической.

Теорема 1. *Нормальная PCS -структура является косимплектической, а, значит, локально эквивалентна произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.*

Доказательство непосредственно следует из (20) и предложения 2. □

Известно (см. [13]), что задание тензора Нейенхейса равносильно заданию четырех тензоров:

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X, Y) &= N(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi; \\ N^{(2)}(X, Y) &= (\mathcal{L}_\Phi \eta)(Y) - (\mathcal{L}_\Phi \eta)(X); \quad N^{(3)}(X) = (\mathcal{L}_\xi \Phi)(X); \\ N^{(4)}(X, Y) &= (\mathcal{L}_\xi \eta)(Y); \quad X, Y \in X(M), \end{aligned}$$

где $\mathcal{L}_X$ — производная Ли в направлении векторного поля X .

Вычислим компоненты этих тензоров для PCS -многообразия на пространстве присоединенной G -структуры.

Учитывая, что $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$, где π — естественная проекция пространства присоединенной G -структуры на многообразие M , согласно (15) находим, что на этом пространстве тензор

$N^{(1)}(X, Y) = N(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = N(X, Y)$ имеет компоненты:

$$\begin{aligned} (N^{(1)})_{\hat{b}0}^a &= -(N^{(1)})_{0\hat{b}}^a = \frac{1}{2}F^{ab}, & (N^{(1)})_{\hat{b}\hat{c}}^a &= 2C^{abc}, \\ (N^{(1)})_{bc}^{\hat{a}} &= 2C_{abc}, & (N^{(1)})_{b0}^{\hat{a}} &= -(N^{(1)})_{0b}^{\hat{a}} = \frac{1}{2}F_{ab}; \end{aligned} \quad (20)$$

все остальные компоненты нулевые.

Поскольку $N^{(1)}(X, Y) = N(X, Y)$, интегрируемая PC_S -структура является нормальной и наоборот.

С учетом сделанного замечания теорему 1 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. Пусть $S = (\Phi, \xi, \eta, g)$ — PC_S -структура. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $S = (\Phi, \xi, \eta, g)$ — нормальная структура;
- (2) $S = (\Phi, \xi, \eta, g)$ — интегрируемая структура;
- (3) $S = (\Phi, \xi, \eta, g)$ — косимплектическая структура.

В [6] приводится аналитическое выражение тензоров $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$:

$$\begin{aligned} N^{(2)}(X, Y) &= \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\nabla_Y(\Phi)X - \nabla_{\Phi Y}(\eta)(X) - \eta\nabla_X(\Phi)Y; \\ N^{(3)}(X) &= \nabla_{\xi}(\Phi)X - \nabla_{\Phi X}\xi + \Phi\nabla_X\xi; \quad N^{(4)}(X) = \nabla_{\xi}(\eta)(X); \quad X, Y \in X(M). \end{aligned} \quad (21)$$

Пусть M — PC_S -многообразие; тогда тензорные компоненты формы римановой связности (4), с учетом (11), (13), (14) и (16) запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \theta_{\hat{b}}^a &= C^{abc}\omega_c; & \theta_{\hat{b}}^{\hat{a}} &= C_{abc}\omega^c; & \theta_0^a &= -F^{ab}\omega_b; & \theta_0^{\hat{a}} &= -F_{ab}\omega^b; \\ \theta_a^0 &= F_{ab}\omega^b; & \theta_{\hat{a}}^0 &= F^{ab}\omega_b; & \theta_0^0 &= 0; & \theta_j^i + \theta_{\hat{j}}^{\hat{i}} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим характеристический вектор PC_S -многообразия. Соотношения (9) для PC_S -многообразий с учетом соотношений (14) примут вид

$$\xi_{\hat{b}}^a = -F^{ab} \quad \xi_{,b}^a = -F_{ab},$$

а остальные компоненты нулевые.

Аналогично для контактной формы η PC_S -многообразия имеем

$$\eta_{a,b} = -F_{ab} \quad \eta_{\hat{a},\hat{b}} = -F^{ab}, \quad (23)$$

а остальные компоненты нулевые.

На пространстве присоединенной G -структуры тождество (21) примет вид

$$N_{ij}^{(2)} = \eta_{j,k}\Phi_i^k - \eta_{i,k}\Phi_j^k + \eta_k\Phi_{i,j}^k - \eta_k\Phi_{j,i}^k. \quad (24)$$

С учетом соотношений $\eta_{\hat{a}} = \eta_a = 0$, $\eta_0 = 1$, вида матрицы Φ (1), (13), (16) и (23), из (24) имеем

$$N_{ij}^{(2)} = 0. \quad (25)$$

Из (25) непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. На PC_S -многообразии $N^{(2)}(X, Y) = 0$.

На пространстве присоединенной G -структуры тождество (21) равносильно соотношениям:

$$(N^{(3)})_j^i = \Phi_{j,0}^i - \xi_{,k}^i\Phi_j^k + \xi_{,j}^k\Phi_k^i. \quad (26)$$

Таким образом, получим

$$(N^{(3)})_{\hat{b}}^a = -2\sqrt{-1}F^{ab}; \quad (N^{(3)})_{\hat{b}}^{\hat{a}} = 2\sqrt{-1}F_{ab}, \quad (27)$$

остальные компоненты нулевые.

Из (27) и предложения 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. На PC_S -многообразии $N^{(3)}(X) = 0$ тогда и только тогда, когда $F^{ab} = F_{ab} = 0$, т.е. когда многообразие является точнейше косимплектическим многообразием.

Используя локальное строение точнее косиплектического многообразия (см. [4]), теорему 4 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5. *PC_S -многообразие с $N^{(3)}(X) = 0$ локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.*

А теперь рассмотрим тензор $N^{(4)}(X) = \nabla_\xi(\eta)(X)$, $X \in X(M)$. Которое с учетом (23) на пространстве присоединенной G -структуры равносильно соотношениям: $(N^{(4)})_i = 0$, т.е. $N^{(4)}(X) = 0$.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 6. *На PC_S -многообразии $N^{(4)}(X) = 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириченко В. Ф. Почти эрмитовы многообразия постоянного типа // Докл. АН СССР. — 1981. — 259, № 6. — С. 1293–1297.
2. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техн. Пробл. геом. — 1986. — 18. — С. 25–71.
3. Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Мат. сб. — 2002. — 193, № 8. — С. 71–100.
4. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Одесса, 2013.
5. Кобаяши Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1981.
6. Рустанов А. Р. Свойства интегрируемости NC_{10} -многообразий // Мат. физ. комп. модел. — 2017. — 20, № 5. — С. 32–38.
7. Blair D. E. Contact manifolds in Riemannian geometry // Lect. Notes Math. — 1976. — 509. — P. 1–146.
8. Blair D. E. Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds // Progr. Math. — 2002. — 203.
9. Capursi M. Quasi cosymplectic manifolds // Rev. Roum. Math. Pures Appl. — 1987. — 32, № 1. — P. 27–35.
10. Chinea D. Quasi-K-cosymplectic submersions // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1984. — 2, № 33. — P. 319–330.
11. Chinea D., Gonzalez C. Classification of almost contact metric structures // Ann. Mat. Pura Appl. (IV). — 1990. — 5, № 161. — P. 15–36.
12. Gray A. Nearly Kähler manifolds // J. Differ. Geom. — 1970. — 4, № 4. — P. 283–309.
13. Sasaki S., Hatakeyama J. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. II // Tohoku Math. J. — 1961. — 13, № 2. — P. 281–294.

Рустанов Алигаджи Рабаданович
Институт фундаментального образования,
Московский государственный строительный университет
(национальный исследовательский университет)
E-mail: aligadzhi@yandex.ru

Харитоновна Светлана Владимировна
Оренбургский государственный университет
E-mail: hcb@yandex.ru