Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Духновский, Аппроксимационное решение системы McKean, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 191, 157–161

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-191-157-161>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:55:10

АППРОКСИМАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ МСКЕАН

© 2021 г. С. А. ДУХНОВСКИЙ

Аннотация. Исследуется одномерная кинетическая система уравнений McKean с дробными производными по времени. С помощью одного аналитического метода (аналог обобщенного ряда Тейлора) строится аппроксимационное решение по начальным данным. Приводится сравнение графиков точного и приближенного решения для различных значений параметров.

Ключевые слова: система McKean, аппроксимационное решение, дробная производная Капуто.

APPROXIMATION SOLUTION OF THE MCKEAN SYSTEM

© 2021 S. A. DUKHNOVSKII

ABSTRACT. A one-dimensional kinetic system of McKean equations with fractional time derivatives is examined. Using an analytical method similar to the generalized Taylor series, we construct an approximation solution and compare the exact and approximate solutions for various values of the parameters.

Keywords and phrases: McKean system, approximation solution, fractional Caputo derivative.

AMS Subject Classification: 35L45, 35L60, 35Q20

1. Введение. В данной статье мы продолжаем исследовать дискретные кинетические модели (см. [3, 4, 9, 14]). Точные решения моделей Больцмана были найдены в недавних работах [1, 2, 8, 13] при помощи разложения Пенлеве, уравнения Бейтмена, а также обобщенного метода Бернулли. Интересно проанализировать указанные решения численно, в связи с чем многие авторы применяют различные численные и аналитические методы для нахождения приближенных решений: декомпозиционный метод Адомяна (см. [6]), дробно-комплексное преобразование (см. [11]), метод преобразования Лапласа (см. [12]), вейвлет-метод (см. [10]), вариационный метод (см. [15]) и др. В данной работе аналитический метод, называемый «residual power series method» (см. [5, 7]), применен к системе McKean.

Рассмотрим дробную по времени систему McKean:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(x, t) + D_x u(x, t) &= \frac{1}{\varepsilon}(w^2 - uw), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ D_t^\alpha w(x, t) - D_x w(x, t) &= -\frac{1}{\varepsilon}(w^2 - uw), & 0 < \alpha \leq 1, \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = \frac{\varepsilon}{4}(7 - \operatorname{th} x), \quad w(x, 0) = \frac{3\varepsilon}{4}(1 + \operatorname{th} x). \quad (2)$$

В кинетической теории $u = u(x, t)$, $w = w(x, t)$ играют роль плотностей двух групп частиц, движущихся с единичной скоростью в разных направлениях. Здесь дробная производная понимается

в смысле Капуто:

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial \tau^n} d\tau, \quad n - 1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}_+, \quad (3)$$

$$D_t^n u(x, t) = \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n}. \quad (4)$$

Одно из точных решений в виде бегущей волны имеет вид

$$u(x, t) = \frac{7}{4}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon \operatorname{th}(x + 2t), \quad w(x, t) = \frac{3}{4}\varepsilon(1 + \operatorname{th}(x + 2t)), \quad \alpha = 1.$$

2. Описание метода. Рассмотрим задачу Коши

$$D_t^\alpha u(x, t) = M(u(x, t)), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad u|_{t=0} = f(x), \quad (5)$$

где $M(u(x, t))$ — нелинейный дифференциальный оператор. Будем искать решение задачи (5) в виде обобщенного степенного ряда в окрестности точки $t = t_0$:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)(t - t_0)^{n\alpha}, \quad f_n(x) = \frac{D_t^{n\alpha}(x, t_0)}{\Gamma(1 + n\alpha)}, \quad x \in D, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + R.$$

Функцию $f_0(x)$ находим из начального условия. Производим усечение суммирования ряда до k слагаемых:

$$u_k(x, t) = \sum_{n=0}^k f_n(x)(t - t_0)^{n\alpha}, \quad f_n(x) = \frac{D_t^{n\alpha}(x, t_0)}{\Gamma(1 + n\alpha)}, \quad x \in D, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + R.$$

Введем вспомогательную функцию

$$\operatorname{Res}_u(x, t) = D_t^\alpha u(x, t) - M(u(x, t))$$

и аналогично для k слагаемых:

$$\operatorname{Res}_{u_k}(x, t) = D_t^\alpha u(x, t) - M(u(x, t)). \quad (6)$$

Очевидно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Res}_{u_k}(x, t) = \operatorname{Res}_u(x, t).$$

Возьмем производную порядка $(k - 1)\alpha$ от обеих частей (6) в точке $t = t_0$:

$$D_t^{(k-1)\alpha} \operatorname{Res}_{u_k}(x, t_0) = 0. \quad (7)$$

Решая данное уравнение, находим последовательность функций $f_k(x)$, $k \geq 1$, и записываем аппроксимационное решение.

3. Нахождение приближенного решения. Ищем решение в виде степенных рядов в окрестности точки $t = 0$:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)}, \quad x \in D, \quad 0 \leq t \leq R,$$

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)}, \quad x \in D, \quad 0 \leq t \leq R.$$

Согласно описанному выше алгоритму, введем функции

$$\operatorname{Res}_u(x, t) = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon}(w^2 - uw),$$

$$\operatorname{Res}_w(x, t) = \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}(w^2 - uw).$$

Для k членов имеем

$$\begin{aligned}\text{Res}_{u,k}(x, t) &= \frac{\partial^\alpha u_k}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial u_k}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon}(w_k^2 - u_k w_k), \\ \text{Res}_{w,k}(x, t) &= \frac{\partial^\alpha w_k}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial w_k}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}(w_k^2 - u_k w_k).\end{aligned}$$

При $k = 1$ система приобретает вид

$$\begin{aligned}\text{Res}_{u,1}(x, t) &= \frac{\partial^\alpha u_1}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon}(w_1^2 - u_1 w_1), \\ \text{Res}_{w,1}(x, t) &= \frac{\partial^\alpha w_1}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}(w_1^2 - u_1 w_1).\end{aligned}\tag{8}$$

В этом случае ищем решение в виде

$$\begin{aligned}u_1(x, t) &= f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \\ w_1(x, t) &= g_0(x) + g_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}.\end{aligned}\tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), получаем

$$\begin{aligned}f_1 + f'_0 + f'_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - \frac{1}{\varepsilon} \left(g_0^2 + 2g_0 g_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + g_1^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma^2(1 + \alpha)} - \right. \\ \left. - f_0 g_0 - f_0 g_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - g_0 f_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - f_1 g_1 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma^2(1 + \alpha)} \right) = 0, \\ g_1 - g'_0 - g'_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(g_0^2 + 2g_0 g_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + g_1^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma^2(1 + \alpha)} - \right. \\ \left. - f_0 g_0 - f_0 g_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - g_0 f_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - f_1 g_1 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma^2(1 + \alpha)} \right) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда при $t = 0$

$$f_1 = -f'_0 + \frac{1}{\varepsilon}(g_0^2 - f_0 g_0) = 0, \quad g_1 = g'_0 - \frac{1}{\varepsilon}(g_0^2 - f_0 g_0) = 0.$$

Для первых составляющих имеем

$$\begin{aligned}u_1(x, t) &= \frac{1}{4}\varepsilon(7 - \text{th } x) - \frac{1}{2}\varepsilon \text{sech}^2 x \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \\ w_1(x, t) &= \frac{3}{4}\varepsilon(1 + \text{th } x) + \frac{3}{2}\varepsilon \text{sech}^2 x \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}.\end{aligned}$$

Для $k = 2$ имеем

$$\begin{aligned}\text{Res}_{u,2}(x, t) &= \frac{\partial^\alpha u_2}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon}(w_2^2 - u_2 w_2), \\ \text{Res}_{w,2}(x, t) &= \frac{\partial^\alpha w_2}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}(w_2^2 - u_2 w_2).\end{aligned}$$

На этот раз подставляем решение в виде

$$\begin{aligned}u_2(x, t) &= f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)}, \\ w_2(x, t) &= g_0(x) + g_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + g_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)}.\end{aligned}$$

При вычислении учтем, что

$$\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} \frac{\partial \tau^{2\alpha}}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{2\alpha t^\alpha \Gamma(1 - \alpha) \Gamma(2\alpha)}{\Gamma(1 + \alpha)} \frac{1}{\Gamma(1 + 2\alpha)} = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}.$$

Рис. 1. Графики аппроксимационных решений $u_2(x, t)$ при $-10 < x < 10$, $0 < t < 0,4$, $\varepsilon = 1$

Отсюда при $t = 0$

$$D_t^\alpha \text{Res}_{u,2}(x, 0) = f_2 + f_1' - \frac{1}{\varepsilon}(2g_0g_1 - f_1g_0 - f_0g_1),$$

$$D_t^\alpha \text{Res}_{w,2}(x, 0) = g_2 - g_1' + \frac{1}{\varepsilon}(2g_0g_1 - f_1g_0 - f_0g_1).$$

Решая уравнения $D_t^\alpha \text{Res}_{u,2}(x, 0) = 0$, $D_t^\alpha \text{Res}_{w,2}(x, 0) = 0$, находим f_2 , g_2 в следующем виде:

$$f_2(x) = 2\varepsilon \text{sech}^2 x \text{th} x, \quad g_2(x) = -6\varepsilon \text{sech}^2 x \text{th} x.$$

Теорема 1. Аппроксимационное решение задачи (1)–(2) в области $x \in D$, $0 \leq t \leq R$ имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{4}\varepsilon(7 - \text{th} x) - \frac{1}{2}\varepsilon \text{sech}^2 x \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + 2\varepsilon \text{sech}^2 x \text{th} x \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} + \dots,$$

$$w(x, t) = \frac{3}{4}\varepsilon(1 + \text{th} x) + \frac{3}{2}\varepsilon \text{sech}^2 x \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - 6\varepsilon \text{sech}^2 x \text{th} x \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} + \dots$$

Рис. 2. График точного решения $u(x, t)$, $\alpha = 1$ при $-10 < x < 10$, $0 < t < 0,4$, $\varepsilon = 1$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Духновский С. А. Тест Пенлеве и автомодельное решение кинетической модели// Итоги науки техн. Современ. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 176. — С. 91–94.
2. Духновский С. А. Решения системы Карлемана через разложение Пенлеве// Владикавказ. мат. ж. — 2020. — 22, № 4. — С. 58–67.
3. Ильин О. В. Стационарные решения кинетической модели Бродуэлла// Теор. мат. физ. — 2012. — 170, № 3. — С. 481–488.
4. Радкевич Е. В. О дискретных кинетических уравнениях// Докл. РАН. — 2012. — 447, № 4. — С. 369–373.
5. Abu Arqub O., El-Ajou A., Momani S. Constructing and predicting solitary pattern solutions for nonlinear time-fractional dispersive partial differential equations// J. Comput. Phys. — 2015. — 293. — P. 385–399.
6. Adomian G. A review of the decomposition method in applied mathematics// J. Math. Anal. Appl. — 1988. — 135, № 2. — P. 501–544.
7. Al Qurashi M. M., Korpınar Z., Baleanu D., Inc M. A new iterative algorithm on the time-fractional Fisher equation: Residual power series method// Adv. Mech. Eng. — 2017. — 9, № 9. — P. 1–8.
8. Dukhnovsky S. On solutions of the kinetic McKean system// Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2020. — 94, № 3.
9. Euler N., Steeb W.-H. Painlevé test and discrete Boltzmann equations// Austr. J. Phys. — 1989. — 42. — P. 1–10.
10. Hariharan G. Wavelet method for a class of fractional Klein–Gordon equations// J. Comput. Nonlin. Dynam. — 2013. — 8, № 2. — 021008.
11. He J., Elagan S. K., Li Z. B. Geometrical explanation of the fractional complex transform and derivative chain rule for fractional calculus// Phys. Lett. A. — 2012. — 376, № 4. — P. 257–259.
12. Khuri S. A. A new approach to Bratu’s problem// Appl. Math. Comput. — 2004. — 147, № 1. — P. 131–136.
13. Tchier F., Inc M., Yusuf A. Symmetry analysis, exact solutions and numerical approximations for the space-time Carleman equation in nonlinear dynamical systems// Eur. Phys. J. Plus. — 2019. — 134, № 250. — P. 1–18.
14. Vasil’eva O. A., Dukhnovskii S. A., Radkevich E. V. On the nature of local equilibrium in the Carleman and Godunov–Sultangazin equations// J. Math. Sci. — 2018. — 235, № 4. — P. 393–453.
15. Wazwaz A.-M. The variational iteration method: a reliable analytic tool for solving linear and nonlinear wave equations// Comput. Math. Appl. — 2007. — 54, № 7–8. — P. 926–932.

Духновский Сергей Анатольевич

Московский государственный строительный университет

(национальный исследовательский университет)

E-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru