Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Асташова, Д. А. Соколов, О периодических решениях одной нелинейной спектральной задачи четвертого порядка, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 192, 20–25

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-20-25>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 16:27:45

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. И. В. АСТАШОВА, Д. А. СОКОЛОВ

Аннотация. В работе доказано существование периодического решения нелинейной спектральной задачи четвертого порядка с интегральным условием.

Ключевые слова: нелинейная задача четвертого порядка, интегральное условие, периодическое решение, задача со спектральным параметром.

PERIODIC SOLUTIONS OF A FOURTH-ORDER NONLINEAR SPECTRAL PROBLEM

© 2021 I. V. ASTASHOVA, D. A. SOKOLOV

ABSTRACT. In this paper, the existence of a periodic solution to a nonlinear spectral problem of the fourth order with an integral condition is proved.

Keywords and phrases: fourth-order nonlinear problem, integral condition, periodic solution, problem with spectral parameter.

AMS Subject Classification: 34C25

1. Об истории вопроса. Исследуется вопрос о существовании 1-периодического решения для спектральной задачи

$$y^{IV} - |y|^\alpha \operatorname{sgn} y = \lambda y, \quad \alpha > 1, \quad (1)$$

с интегральным условием

$$\int_0^1 |y(s)|^{\alpha+1} ds = r. \quad (2)$$

При оценивании первого собственного значения для различных спектральных задач для уравнений высших порядков (в том числе и нелинейных), в частности, задачи Штурма–Лиувилля с интегральным условием на потенциал, возникает вопрос о существовании решений с заданными свойствами некоторых связанных с этими задачами нелинейных задач со спектральным параметром. В [2, теорема 23], а также в [9], подобные задачи для уравнений второго порядка возникают в связи с оценкой минимального собственного значения задачи

$$y'' + \lambda Q(x)y = 0, \quad x \in (0, 1), \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \int_0^1 Q^\gamma(x) dx = 1, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0.$$

В [1, 3–5, 7, 12, 13, 17, 18] изучены оценки первого собственного значения задачи

$$y'' + Q(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in (0, 1),$$

при различных граничных условиях и весовым интегральным условием на потенциал:

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x) dx = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0.$$

Классическим примером задачи четвертого порядка является задача Лагранжа об устойчивости колонны (см. [17]); другие задачи четвертого порядка исследуются в [9, гл. 6.3]. Рассматривалась нелинейная самосопряженная спектральная задача второго порядка, а также задача Эйлера—Бернулли с краевыми условиями Лидстоуна:

$$y^{IV} + q(x)y = \lambda y, \quad y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0,$$

приводящая к постановке рассматриваемой в работе задачи. Другая задача четвертого порядка, связанная с получением экстремальных оценок собственных значений, рассматривается в [15]. Отметим, что результаты о периодических решениях нелинейных уравнений типа Эмдена—Фаулера четвертого порядка без младших членов получены в [4–8, 12, 13, 16, 18], а также в [1, § 6.4, 7.1].

2. Вспомогательная теорема.

Теорема 1. Для любого $\beta > 0$ существует такое $R_\beta > 0$, что для любого $R \in (0; R_\beta]$ найдется такая заданная на некотором отрезке $[0; X]$ неотрицательная функция v , что

$$v'(0) = v'''(0) = v(X) = v''(X) = 0, \quad (3)$$

$$v^{IV} = (v^\beta + 1)v, \quad (4)$$

$$X^{3+8/\beta} \cdot \int_0^X v(s)^{\beta+2} ds = R. \quad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала задачу Коши с начальными условиями

$$v(0) = h > 0, \quad v''(0) = w < 0, \quad v'(0) = v'''(0) = 0 \quad (6)$$

для уравнения $v^{IV}(x) = f_h(v(x))$, где

$$f_h(v) = \begin{cases} 0 & \text{при } v < 0, \\ v(1 + v^\beta) & \text{при } v \in [0, h], \\ h(1 + h^\beta) & \text{при } v > h. \end{cases} \quad (7)$$

Ввиду липшицевости функции f_h эта задача имеет единственное решение $v(x) \in C^4(\mathbb{R})$ при любых значениях h и w . С помощью этого решения определим функции v_i трех переменных, которые будут определены следующим образом: $v_i(h, w, x) = v^{(i)}(x)$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Дальнейшие рассуждения основаны на знаках параметров $h > 0$ и $w < 0$.

Заметим, что существует такое достаточно малое $\varepsilon > 0$, что $v(x) > 0$ для любого $x \in [0, \varepsilon]$ и, соответственно, $v^{IV}(x) = f_h(v(x)) > 0$. Отсюда следует, что $v'''(x) > 0$ при любом $x > 0$ (так как $f_h(v) \geq 0$ при всех v). Таким образом, $\partial v_2 / \partial x > 0$ при всех $h > 0$, $w < 0$, $x > 0$.

Из неравенства $v''' > 0$ следует существование на $(0; +\infty)$ не более одной точки перегиба у функции v . Существование же такой точки следует из того, что $v'''(x) \geq v'''(\varepsilon) > 0$ при $x \geq \varepsilon$. Пусть ξ — единственная положительная точка перегиба функции v . Ее зависимость от h и w задается неявно: $v_2(h, w, \xi(h, w)) = 0$. Из последнего равенства дифференцированием получаем

$$\frac{\partial \xi}{\partial w}(h, w) = - \frac{\partial v_2 / \partial w(h, w, \xi(h, w))}{\partial v_2 / \partial x(h, w, \xi(h, w))}. \quad (8)$$

Уже доказана положительность знаменателя в последнем выражении. Для оценки знака числителя заметим, что функция $z = \partial v_0 / \partial w$ как функция от x является решением задачи

$$z^{IV} = \frac{\partial f_h}{\partial v} z, \quad z(0) = z'(0) = z'''(0) = 0, \quad z''(0) = 1.$$

Отсюда ввиду неравенства $\partial f_h / \partial v \geq 0$ вытекает положительность при $x > 0$ функции z и ее производных z' и $z'' = \partial^3 v_0 / \partial^2 x \partial w = \partial v_2 / \partial w$, так что ввиду (8) получаем $\partial \xi / \partial w(h, w) < 0$.

Рассмотрим два случая для значений h и w (не исчерпывающие все возможности).

Случай 1. $w^2 > \frac{6h}{5} f_h(h)$. Введем обозначение $x_1 = \sqrt{-\frac{2w}{f_h(h)}} > 0$. Интегрируя нужное число раз неравенство $v^{\text{IV}}(x) \leq f_h(h)$ (строгое при достаточно малых положительных x) и учитывая начальные условия (6), получим

$$v''(x_1) < w + \frac{x_1^2}{2} f_h(h) = w - w = 0, \quad (9)$$

$$v(x_1) < h + \frac{x_1^2}{2} w + \frac{x_1^4}{4!} f_h(h) = h - \frac{w^2}{f_h(h)} + \frac{f_h(h)w^2}{6f_h(h)^2} = h - \frac{5w^2}{6f_h(h)} < 0. \quad (10)$$

Из (9) следует, что $\xi(h, w) > x_1$, а так как v убывает на интервале $(0; \xi(h, w))$, имеем $v(\xi(h, w)) < v(x_1) < 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае $v_0(h, w, \xi(h, w)) < 0$.

Случай 2. $w^2 < \frac{h}{2} f_h\left(\frac{h}{2}\right)$. Введем обозначение $x_2 = \sqrt{-\frac{2w}{f_h(h/2)}} > 0$. Интегрируя нужное число раз неравенство $v^{\text{IV}}(x) \geq 0$ (строгое при достаточно малых положительных x) и учитывая начальные условия (6), получим для всех $x \in (0; x_2]$ оценки

$$v(x) > h + \frac{x^2}{2} w \geq h + \frac{x_2^2}{2} w = h - \frac{w^2}{f_h(h/2)} > \frac{h}{2} > 0, \\ v^{\text{IV}}(x) = f_h(v(x)) > f_h(h/2).$$

Интегрируя дважды последнее неравенство, убедимся, что

$$v''(x_2) > w + \frac{x_2^2}{2} f_h(h/2) = w - w = 0.$$

Отсюда $\xi(h, w) < x_2$, так что $v(\xi(h, w)) > 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае $v_0(h, w, \xi(h, w)) > 0$.

В силу непрерывности найдется такое

$$w_h \in \left(-\sqrt{\frac{6h}{5} f_h(h)}; -\sqrt{\frac{h}{2} f_h\left(\frac{h}{2}\right)} \right), \quad (11)$$

что $v_0(h, w_h, \xi(h, w_h)) = 0$. Таким образом, при соответствующих начальных условиях, т.е.

$$v(0) = h, \quad v''(0) = w_h, \quad v'(0) = v'''(0) = 0, \quad (12)$$

точка перегиба решения $v(x)$ является также его нулем. Отметим также, что в этом случае на отрезке $[0; \xi(h, w_h)]$ функция v удовлетворяет неравенству $0 \leq v \leq h$ и поэтому является решением не только уравнения $v^{\text{IV}} = f_h(v)$, но и уравнения (4).

Покажем, что для любого $h > 0$ значение $w_h > 0$ единственно и непрерывно зависит от h . Для этого заметим, что производная по w выражения $v_0(h, w, \xi(h, w))$ равна

$$\frac{\partial v_0}{\partial w}(h, w, \xi(h, w)) + \frac{\partial v_0}{\partial x}(h, w, \xi(h, w)) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial w}(h, w). \quad (13)$$

Выше уже было показано, что $\partial v_0 / \partial w > 0$ при $x > 0$ и $\partial \xi / \partial w < 0$. Кроме того,

$$\frac{\partial v_0}{\partial x}(h, w, \xi(h, w)) < 0,$$

так как левая часть является производной в единственной точке перегиба решения v , имеющего отрицательные первую и вторую производные в правой полукрестности нуля. Таким образом, выражение (13) строго положительно, что, с одной стороны, делает невозможным существование более одного w_h , удовлетворяющего равенству $v_0(h, w_h, \xi(h, w_h)) = 0$. С другой стороны, теорема

о неявной функции обеспечивает непрерывную (и даже класса C^1) зависимость w_h от h . Поэтому непрерывно зависят от h также

$$X_h = \xi(h, w_h), \quad I_{\beta,h} = X_h^{3+8/\beta} \int_0^{X_h} v_0(h, w_h, s)^{\beta+2} ds.$$

Определив область возможных значений для $I_{\beta,h}$ при $0 < h < \infty$, мы нашли бы те значения R , для которых существуют заявленные в теореме число X и функция v .

Рассмотрим поведение w_h , X_h и $I_{\beta,h}$ при $h \rightarrow 0$. Из (7) следует, что $f_h(h/2) < f_h(h) = O(h)$, так что (11) влечет $|w_h| = O(h)$.

Оценим поведение X_h . Пусть $x_* \in (0; X_h)$ — значение x , при котором решение v уравнения $v^{IV} = f_h(v)$ с начальными условиями (12) принимает значение $h/2$. Тогда

$$\frac{h}{2} = v(x_*) > h + \frac{x_*^2}{2}w_h + \frac{x_*^4}{4!}f_h(h/2) \quad \text{или} \quad f_h(h/2)x_*^4 + 12w_hx_*^2 + 12h < 0,$$

откуда

$$x_*^2 < \frac{-6w_h + \sqrt{36w_h^2 - 12hf_h(h/2)}}{f_h(h/2)} < \frac{12|w_h|}{f(h/2)} < \frac{24|w_h|}{h} = O(1).$$

Учитывая, что $v'' < 0$ на интервале $(0; X_h)$, можно утверждать, что в любой точке интервала $(0; x_*)$ модуль производной $|v'|$ меньше, чем в любой точке интервала $(x_*; X_h)$. А так как на этих интервалах приращения самого решения v совпадают (оба равны $-h/2$), второй интервал должен быть короче первого, т.е. $X_h - x_* < x_*$, откуда $X_h < 2x_* = O(1)$. Из этой оценки и неравенства $0 \leq v \leq h$ на $[0; X_h]$ вытекает, что $I_{\beta,h} = O(h^{\beta+2})$, откуда $I_{\beta,h} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Аналогично, учитывая, что $f_h(h) = O(h^{\beta+1})$ при $h \rightarrow +\infty$, получим для этих больших h оценки $w_h = O(h^{1+\beta/2})$, $X_h = O(h^{-\beta/4})$ и $I_{\beta,h} = O(h^{-2})$, откуда $I_{\beta,h} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +\infty$.

Таким образом, область возможных значений для $I_{\beta,h}$ при $0 < h < \infty$ не совпадает с $(0; +\infty)$, а имеет вид $(0; R_\beta]$, где $R_\beta = \sup\{I_{\beta,h} : 0 < h < \infty\}$. Теорема доказана. $\square$

3. Теоремы о существовании периодических решений. Перейдем к построению периодических решений.

Пусть для некоторых $\beta > 0$ и $R > 0$ существует, согласно теореме 1, функция v , удовлетворяющая условиям (3)–(5). Зададим на отрезке $[0; 4X]$ функцию u с помощью соотношений

$$u(x) = \begin{cases} v(x), & x \in [0; X], \\ -v(2X - x), & x \in [X; 2X], \\ -v(x - 2X), & x \in [2X; 3X], \\ v(4X - x), & x \in [3X; 4X]; \end{cases} \quad u(x) = \begin{cases} v(x), & x \in [0; X], \\ -v(2X - x), & x \in [X; 2X], \\ -v(x - 2X), & x \in [2X; 3X], \\ v(4X - x), & x \in [3X; 4X]. \end{cases}$$

Отметим, что в стыковых точках X и $3X$ приведенные выше разные соотношения дают одинаковые значения для первой и третьей производных функции u . Значения самой функции u и ее второй производной в этих точках, вообще говоря, получаются с разными знаками, но, благодаря условиям (3), в обоих случаях равны нулю. В стыковой точке $2X$, наоборот, разные соотношения приводят к одинаковым значениям функции u и ее второй производной, а первая и третья производная в этой точке обращаются в ноль.

В любой точке отрезка $[0; 4X]$ модули функции u и ее четвертой производной совпадают с модулями функции v и ее четвертой производной в соответствующей точке отрезка $[0; X]$. При этом знак функции совпадает со знаком ее четвертой производной. Поэтому из равенства (4) следует

$$u^{IV} = (|u|^\beta + 1)u \quad \text{или} \quad u^{IV} - |u|^\beta u = u. \quad (14)$$

Далее заметим, что в точке $4X$ функция u и ее первая, вторая и третья производные принимают те же значения, что и в точке 0. Учитывая (14), то же можно сказать и про четвертую производную. Поэтому заданную на отрезке $[0; 4X]$ функцию u можно продолжить до $4X$ -периодической

функции класса C^4 на всей прямой. При этом $4X$ будет, очевидно, ее минимальным периодом. Кроме того, из (5) следует

$$X^{3+8/\beta} \cdot \int_0^{4X} |u(s)|^{\beta+2} ds = 4R. \quad (15)$$

Пусть теперь n — некоторое целое положительное число. Введем новую функцию

$$y(x) = (4nX)^{4/\beta} u(4nXx),$$

а также новые константы

$$\alpha = \beta + 1, \quad r = (4n)^{4+8/\beta} R, \quad \lambda = (4nX)^4.$$

Непосредственной подстановкой с учетом уравнения (14) получаем

$$\begin{aligned} y^{\text{IV}}(x) - |y(x)|^\alpha \operatorname{sgn} y(x) &= \\ &= (4nX)^{4+4/\beta} u^{\text{IV}}(4nXx) - (4nX)^{(\beta+1) \cdot 4/\beta} |u(4nXx)|^\beta u(4nXx) = \\ &= (4nX)^{4+4/\beta} (u^{\text{IV}}(4nXx) - |u(4nXx)|^\beta u(4nXx)) = \\ &= (4nX)^4 \cdot (4nX)^{4/\beta} u(4nXx) = \lambda y(x), \end{aligned}$$

а также с учетом (15)

$$\begin{aligned} \int_0^1 |y(s)|^{\alpha+1} ds &= (4nX)^{(\beta+2) \cdot 4/\beta} \int_0^1 |u(4nXs)|^{\beta+2} ds = (4nX)^{3+8/\beta} \int_0^{4nX} |u(t)|^{\beta+2} dt = \\ &= (4nX)^{3+8/\beta} \cdot n \cdot 4RX^{-3-8/\beta} = (4n)^{4+8/\beta} R = r. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $y(x)$ является решением задачи (1)–(2). Заметим также, что функция y является 1-периодической, причем если $n = 1$, то 1 является ее минимальным периодом.

При ограничении $n = 1$ существование соответствующего решения доказано, учитывая формулировку теоремы 1, только для $r \in (0; 4^{4+8/\beta} R_{\alpha-1})$. При отсутствии же ограничения можно для любого $r > 0$ подобрать достаточно большое n , чтобы сделать $R = (4n)^{-4-8/\beta} r$ достаточно малым.

Итак, доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. Для любых $\alpha > 1$ и $r > 0$ существует при некотором λ периодическое решение задачи (1)–(2) с периодом 1.

Теорема 3. Для любого $\alpha > 1$ существует такое $r_\alpha > 0$, что для любого $r \in (0; r_\alpha]$ найдется λ , при котором задача (1)–(2) имеет решение $y(x)$ с наименьшим периодом, равным 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асташова И. В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // в кн.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа (Асташова И. В., ред.). — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. — С. 22–290.
2. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма—Лиувилля // Усп. мат. наук. УМН — 1996. — 51, № 3 (309). — С. 73–144.
3. Ежак С. С., Карулина Е. С., Тельнова М. Ю. Оценки первого собственного значения задачи Штурма—Лиувилля с интегральным условием на потенциал // в кн.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа (Асташова И. В., ред.). — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. — С. 506–647.
4. Ежак С. С., Тельнова М. Ю. Тр. семин. им. И. Г. Петровского — 2019. — 32. — С. 162–190.
5. Тельнова М. Ю. Об оценках сверху первого собственного значения задачи Штурма—Лиувилля с весовым интегральным условием // Вестн. СамГУ. — 2015. — 6 (128). — С. 124–129.
6. Astashova I. Application of dynamical systems to the study of asymptotic properties of solutions to nonlinear higher-order differential equations // J. Math. Sci. — 2005. — 126, № 5. — P. 1361–1391.

7. *Astashova I. V.* On asymptotic behavior of solutions to a forth-order nonlinear differential equation// Proc. 1 Int. Conf. on Pure Math. (Tenerife, Spain, January 10–12, 2014). — WSEAS Press, 2014. — P. 32–41.
8. *Astashova I.* On asymptotic classification of solutions to fourth-order differential equations with singular power nonlinearity// Math. Model. Anal. — 2016. — 21, № 4. — P. 502–521.
9. *Egorov Yu. V., Kondratiev V. A.* On Spectral Theory of Elliptic Operators. — Basel, 1996.
10. *Ezhak S. S.* On the estimates for the minimum eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with integral condition (English)// J. Math. Sci. — 2007. — 145, № 5. — P. 5205–5218.
11. *Ezhak S. S.* On estimates for the first eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with Dirichlet boundary conditions and integral condition// in: Differential and Difference Equations with Applications (*Pinelas S., Chipot M., Dosla Z.*, eds.). — New York: Springer, 2013. — P. 387–394.
12. *Ezhak S., Telnova M.* On estimates for the first eigenvalue of some Sturm–Liouville problems with Dirichlet boundary conditions and a weighted integral condition// Int. Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations. — Tbilisi, Georgia: Razmadze Math. Inst., 2016. — P. 81–85.
13. *Ezhak S., Telnova M.* On one upper estimate for the first eigenvalue of a Sturm–Liouville problem with Dirichlet boundary conditions and a weighted integral condition// Mem. Differ. Equations Math. Phys. — 2018. — 73. — P. 55–64.
14. *Karulina E.* Some estimates for the minimal eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with third-type boundary conditions// Math. Bohem. — 2011. — 136, № 4. — P. 377–384.
15. *Karulina E. S.* Oscillation properties of one fourth-order problem with a spectral parameter in boundary conditions// . Мат. Междунар. конф. «Современные проблемы математики и механики», посв. 80-летию акад. В. А. Садовниченко. — М.: МАКС Пресс, 2019. — С. 197–198.
16. *Kiguradze I. T., Kusano T.* On periodic solutions of even-order ordinary differential equations// Ann. Mat. Pura Appl. — 2001. — 180, № 3. — P. 285–301.
17. *Lagrange J. L.* Sur la figure des colonnes// in: Ouvres de Lagrange. — Paris: Gauthier-Villars, 1868. — Vol. 2. — P. 125–170.
18. *Telnova M.* Some estimates for the first eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with a weight integral condition// Math. Bohem. — 2012. — 137, № 2. — P. 229–238.

Асташова Ирина Викторовна

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва

E-mail: ast.diffiety@gmail.com

Соколов Дмитрий Андреевич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: dmtry@nxt.ru